Département de Mathématiques et de Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2021

Devoir 4	100 points
Distribué le 2021/11/06	À rendre le 2021/11/15

Question 1 :

Soient $\widehat{K} = [-1,1] \times [-1,1]$ l'élément tensoriel de référence en 2D et K un élément dans l'espace physique. On définit la transformation $T_K = (T_{K,x}, T_{K,y})$ de $\widehat{K}$ vers K comme :

$$x = T_{K,x}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} x_i \hat{\theta}_i(\xi,\eta), \qquad y = T_{K,y}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} y_i \hat{\theta}_i(\xi,\eta)$$

où (x_i, y_i) sont les coordonnées des sommets de l'élément K et $\hat{\theta}_i$ sont les fonctions de forme :

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1(\xi,\eta) &= 0.25(1-\xi)(1-\eta)\\
\hat{\theta}_2(\xi,\eta) &= 0.25(1+\xi)(1-\eta)\\
\hat{\theta}_3(\xi,\eta) &= 0.25(1+\xi)(1+\eta)\\
\hat{\theta}_4(\xi,\eta) &= 0.25(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}$$

Montrer que la transformation T_K est affine si et seulement si K est un parallélogramme.

Question 2 (Élément fini de Nédélec) :

L'élément fini de Nédélec de degré 1 en dimension 2 est défini par le triplet $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ où $\widehat{K}$ est le simplexe unitaire de $\mathbb{R}^2$, i.e.

$$\widehat{K} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2;\ \xi \geq 0,\ \eta \geq 0,\ \text{et } \xi + \eta \leq 1\},$$

$\widehat{P}$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômiales vectorielles de degré 1 tel que

$$\widehat{P} = \Big\{ \boldsymbol{p} \in [\mathbb{P}_1(\widehat{K})]^2 :\ \boldsymbol{p}(\xi,\eta) = (a,b) + c(\eta,-\xi) \Big\},$$

et $\widehat{\Sigma}$ est l'ensemble des degrés de liberté tels que pour $\boldsymbol{p} \in \widehat{P}$:

$$\hat{\sigma}_i(\boldsymbol{p}) = \int_{E_i} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{t}_i \, ds, \quad i = 1,2,3.$$

Ici, $\boldsymbol{t}_i$ est le vecteur unitaire tangent à l'arête E_i du simplexe (triangle).

Trouver les fonctions de forme de l'élément fini de Nédélec et donner une représentation graphique de ces fonctions.

Question 3 :

Soit $\widehat{K}$ le simplexe unitaire de $\mathbb{R}^2$ et K le triangle de sommets $\boldsymbol{x}_1 = (0,0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2,0)$, et $\boldsymbol{x}_3 = (1,a)$, où $a \in \mathbb{R}^+$. On considère l'élément fini P1, i.e. l'élément fini linéaire de Lagrange, sur $\widehat{K}$.

a) Donner la forme explicite, en fonction de a, de la transformation T_K, qui à tout point $(\xi,\eta) \in \widehat{K}$ donne un point (x,y) appartenant à K, et telle que $\boldsymbol{x}_1 = T_K(0,0)$, $\boldsymbol{x}_2 = T_K(1,0)$, et $\boldsymbol{x}_3 = T_K(0,1)$. La transformation T_K obtenue est-elle bijective?

b) Calculer, pour chaque point (x,y) de K, le gradient des trois fonctions de forme θ_i définies sur K, c'est-à-dire,

$$\nabla\theta_i(x,y) = \left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\theta_i}{\partial y}(x,y)\right), \quad \forall (x,y) \in K, \quad i = 1,2,3.$$

Que deviennent les gradients lorsque a tend vers zéro?

c) En se servant des résultats obtenus en 3b), évaluer le gradient de la fonction $f(x,y)$ définie comme :

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i(x,y)$$

en chaque point $(x,y) \in K$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat? Expliquer.

Question 4 (Problème de convection-diffusion) :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1$, 2, ou 3 et u la solution du problème de convection-diffusion stationnaire :

$$\begin{aligned} \beta \cdot \nabla u - \Delta u = f, &\quad \forall x \in \Omega \\ u = 0, &\quad \forall x \in \Gamma_D \\ n \cdot \nabla u = 0, &\quad \forall x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

où n est le vecteur normal à $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur de Ω, β est un champ de vitesses satisfaisant $\nabla \cdot \beta = 0$ dans Ω et $\beta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$.

a) Donner la forme faible du problème et l'écrire sous la forme :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que :} \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V,$$

i.e. identifier l'espace vectoriel V, la forme bilinéaire B, et la forme linéaire F.

b) Montrer que le problème ci-dessus est bien posé lorsque $f \in L^2(\Omega)$.

c) Soit $Q : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire, on définit le problème adjoint associé au problème ci-dessus comme celui de :

$$\text{Trouver } p \in V \text{ telle que :} \quad B(v,p) = Q(v), \quad \forall v \in V.$$

La fonctionnelle Q représente une grandeur physique ou une quantité d'intérêt de la solution u. Trouver la forme forte du problème adjoint correspondant à la grandeur physique :

$$Q(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)dx,$$

où $|\Omega|$ est l'aire de Ω en 2D ou le volume de Ω en 3D. On observe que cette grandeur physique correspond en fait à la valeur moyenne sur Ω de la solution u.

d) Montrer que le problème adjoint ci-dessus est bien posé.

SOLUTIONS

QUESTION 1 (15 POINTS) :

Soit un quadrilatère K donné par les sommets $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, 4$. La transformation T_K de $\widehat{K}$ dans K est donnée par :

$$x = x_1(1-\xi)(1-\eta)/4 + x_2(1+\xi)(1-\eta)/4 + x_3(1+\xi)(1+\eta)/4 + x_4(1-\xi)(1+\eta)/4$$
$$y = y_1(1-\xi)(1-\eta)/4 + y_2(1+\xi)(1-\eta)/4 + y_3(1+\xi)(1+\eta)/4 + y_4(1-\xi)(1+\eta)/4$$

On en déduit que les coefficients du monôme $\xi\eta$ sont, pour x et y, respectivement :

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/4$$
$$(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)/4$$

La transformation T_K est affine si on a $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 0$ et $(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) = 0$, soit :

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_4,$$
$$y_2 - y_1 = y_3 - y_4,$$

ce qui implique que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$ et que K est un parallélogramme.

Inversement, si K est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}$ (ou $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$), ce qui donne :

$$\begin{cases} x_4 - x_1 = x_3 - x_2 \\ y_4 - y_1 = y_3 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 \end{cases}$$

ce qui implique que T_K est nécessairement une transformation affine.

QUESTION 2 (20 POINTS) :

On suppose que les sommets du triangle sont numérotés de 1 à 3 dans le sens trigonométrique et que le sommet 1 est donné par $(0,0)$. De plus, le numéro de chaque côté E_i est donné par le numéro du sommet opposé au côté. Par exemple, E_1 est le côté qui joint les sommets 2 et 3.

On cherche les fonctions de forme $\boldsymbol{\theta}_j(\xi,\eta) = (a_j + c_j\eta, b_j - c_j\xi)$, $j = 1, 2, 3$, telles que :

$$\sigma_i(\boldsymbol{\theta}_j) = \int_{E_i} \boldsymbol{\theta}_j(\xi,\eta) \cdot \boldsymbol{t}_i ds = \int_{E_i} \left(a_j + c_j\eta, b_j - c_j\xi\right) \cdot \boldsymbol{t}_i ds = \delta_{ij}$$

1. On paramétrise E_1 par $(\xi,\eta) = (1-t, t)$, $t \in [0,1]$, de sorte que $ds = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} = \sqrt{2}dt$. Puisque $\boldsymbol{t}_1 = (-1,1)/\sqrt{2}$, on obtient :

$$\sigma_1(\boldsymbol{\theta}_j) = \int_0^1 \begin{bmatrix} a_j + c_j t \\ b_j - c_j(1-t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}dt = \int_0^1 -a_j + b_j - c_j dt = -a_j + b_j - c_j.$$

2. On paramétrise E_2 par $(\xi,\eta) = (0, 1-t)$, $t \in [0,1]$, ce qui donne $ds = dt$ et $\boldsymbol{t}_2 = (0,-1)$. Donc

$$\sigma_2(\boldsymbol{\theta}_j) = \int_0^1 \begin{bmatrix} a_j + c_j(1-t) \\ b_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 -b_j dt = -b_j.$$

3. On paramétrise E_3 par $(\xi, \eta) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$, ce qui donne $ds = dt$ et $\boldsymbol{t}_2 = (1, 0)$. Donc

$$\sigma_3(\boldsymbol{\theta}_j) = \int_0^1 \begin{bmatrix} a_j \\ b_j - c_j t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 a_j dt = a_j.$$

Puisque l'on veut $\sigma_i(\boldsymbol{\theta}_j) = \delta_{ij}$, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution du système nous donne :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de forme valent alors :

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} -\eta \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -\eta \\ -1 + \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_3 = \begin{bmatrix} 1 - \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta \\ \xi \end{bmatrix}.$$

On représente les fonctions de forme par leurs champs vectoriels sur l'élément de référence $\widehat{K}$.

<u>Question 3 (15 points) :</u>

a) La transformation T_K est donnée par $(x, y) = T_K(\xi, \eta)$ telle que :

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{\theta}_i(\xi, \eta) = 0 \times \hat{\theta}_1(\xi, \eta) + 2 \times \hat{\theta}_2(\xi, \eta) + 1 \times \hat{\theta}_3(\xi, \eta)$$
$$y = \sum_{i=1}^{3} y_i \hat{\theta}_i(\xi, \eta) = 0 \times \hat{\theta}_1(\xi, \eta) + 0 \times \hat{\theta}_2(\xi, \eta) + a \times \hat{\theta}_3(\xi, \eta)$$

où :

$$\hat{\theta}_1(\xi, \eta) = 1 - (\xi + \eta)$$
$$\hat{\theta}_2(\xi, \eta) = \xi$$
$$\hat{\theta}_3(\xi, \eta) = \eta$$

On a donc :

$$x = 2\xi + \eta$$
$$y = a\eta$$

On peut écrire la transformation sous forme matricielle comme :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T_K \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

La transformation T_K est bijective puisque la matrice ci-dessus, pour $a \neq 0$, est inversible.

b) La matrice jacobienne J associée à la transformation T_K est donnée ici par :

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

D'autre part, on a vu en cours que les gradients des fonctions de forme sur K sont calculés à partir des gradients des fonctions de forme sur $\widehat{K}$ par la relation :

$$\nabla_x \theta_i(x, y) = J^{-T} \nabla_\xi \hat{\theta}_i(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, 3$$

où $J^{-T} = (J^{-1})^T = (J^T)^{-1}$ et :

$$\nabla_x \theta_i(x, y) = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x}, \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \right), \quad \nabla_\xi \hat{\theta}_i(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial \hat{\theta}_i}{\partial \xi}, \frac{\partial \hat{\theta}_i}{\partial \eta} \right)$$

On a :

$$J^{-T} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} a & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \nabla_\xi \hat{\theta}_1(\xi, \eta) = (-1, -1), \quad \nabla_\xi \hat{\theta}_2(\xi, \eta) = (1, 0), \quad \nabla_\xi \hat{\theta}_3(\xi, \eta) = (0, 1)$$

Comme le jacobien et les gradients sont constants sur l'élément de référence, on obtient :

$$\nabla_x \theta_1(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a} \right), \quad \nabla_x \theta_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a} \right), \quad \nabla_x \theta_3(x, y) = \left(0, \frac{1}{a} \right), \quad \forall (x, y) \in K.$$

On observe que les composantes en y des gradients tendent vers l'infini lorsque $a \to 0$.

c) De la définition de f, on a :

$$\nabla_x f(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \nabla_x \theta_i(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a} \right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a} \right) + \left(0, \frac{1}{a} \right) = (0, 0) = \mathbf{0}$$

Ceci était prévisible puisque :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \hat{\theta}_i(T_K^{-1}(x, y)) = 1 - (\xi + \eta) + \xi + \eta = 1, \quad \forall (x, y) \in K$$

Comme f est constante, son gradient est nécessairement le vecteur nul. Le fait que la somme des trois fonctions de forme est égale à 1 sur chaque élément K d'un maillage est appelé la partition de l'unité. De la même manière, la somme de toutes les fonctions de base continues et linéaires par morceaux vaut :

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_i(x, y) = 1$$

Question 4 (50 points) :

a) La forme faible du problème est :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que:} \quad B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V,$$

avec :

$$V = \{ v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}$$
$$B(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + (\beta \cdot \nabla u) v \, dx$$
$$F(v) = \int_\Omega f v \, dx$$

b) L'espace V est un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$ et est donc un espace de Hilbert muni de la norme H^1. Pour montrer que le problème est bien posé, il suffit de vérifier les conditions du théorème de Lax-Milgram.

Continuité de B. On suppose que les composantes du champ de vitesses β sont bornées, par exemple qu'il existe une constante $\beta_{\max} > 0$ telle que $|\beta_i(x)| \leq \beta_{\max}$, $\forall x \in \Omega$, $i = 1, \ldots, d$. Il s'ensuit par Cauchy-Schwarz que :

$$|B(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| dx + \int_\Omega |(v\beta) \cdot \nabla u| dx \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|v\beta\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}$$

De plus,

$$\|v\beta\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \beta_i^2 v^2 dx \leq \beta_{\max}^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^d v^2 dx \leq d\beta_{\max}^2 \|v\|_{L^2}^2$$

ce qui conduit à :

$$|B(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \sqrt{d}\beta_{\max} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq (1 + \sqrt{d}\beta_{\max}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad \forall u, v \in V$$

Donc B est continue avec pour constante de continuité $M = 1 + \sqrt{d}\beta_{\max}$. On note que l'on aurait aussi pu supposer que le champ de vitesses satisfasse $\|\beta(x)\|_E \leq \beta_{\text{emax}}$, où $\|\beta\|_E$ est la norme euclidienne du vecteur β et $\beta_{\text{emax}} > 0$. Dans ce cas, on aurait :

$$\|v\beta\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \beta_i^2 v^2 dx = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d \beta_i^2 \Big) v^2 dx = \int_\Omega \|\beta\|_E^2 v^2 dx \leq \beta_{\text{emax}}^2 \|v\|_{L^2}^2$$

et :

$$|B(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \beta_{\text{emax}} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \qquad \forall u, v \in V$$

avec $M = 1 + \beta_{\text{emax}}$.

Continuité de F. Par Cauchy-Schwarz, on a :

$$|F(v)| \leq \int_\Omega |fv| dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}, \qquad \forall v \in V$$

Comme $f \in L^2$, la norme de f est finie et donc F est continue de constante $C = \|f\|_{L^2}$.

Coercivité de B. Soit $u \in V$. On observe que :

$$B(u,u) = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla u) u \, dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla u) u \, dx$$

Une difficulté ici est que la dernière intégrale pourrait être a priori positive ou négative. En fait, on remarque par le théorème de la divergence que :

$$\int_{\partial\Omega} u^2 (\beta \cdot n) ds = \int_\Omega \nabla \cdot (\beta u^2) dx = \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) u^2 + \beta \cdot \nabla u^2 dx = \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) u^2 dx + 2 \int_\Omega (\beta \cdot \nabla u) u \, dx$$

Comme $\beta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\nabla \cdot \beta = 0$ dans Ω, la dernière intégrale s'annule et donc :

$$B(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

On ne peut cependant pas encore conclure car il faut montrer que le terme $B(u,u)$ est plus grand que $\|u\|_{H^1}$ (pour l'instant, on n'a que la semi-norme H^1 de u). Cependant, comme $u=0$ sur Γ_D, on sait par le théorème de Poincaré qu'il existe une constante $C_p > 0$, telle que :

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2}$$

On peut alors introduire le paramètre ε tel que $0 < \varepsilon < 1$ et écrire :

$$B(u,u) = \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 + (1-\varepsilon)\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 + (1-\varepsilon) C_p^{-2} \|u\|_{L^2}^2$$

En choisissant ε tel que $\varepsilon = (1-\varepsilon)C_p^{-2}$, soit :

$$\varepsilon = \frac{1}{1+C_p^2} < 1$$

on obtient finalement l'inégalité suivante :

$$B(u,u) \geq \frac{1}{1+C_p^2} \|u\|_{H^1}^2$$

Autrement dit, la forme bilinéaire B est coercive et la constante est $\alpha = 1/(1+C_p^2)$. Ici, on aurait pu choisir $\varepsilon = 1/2$ et prendre $\alpha = \min(1, C_p^2)/2$. Cependant, on remarque que α converge vers 0 lorsque C_p tend vers 0, alors qu'elle tendrait vers une valeur de 1 dans le cas précédent. Inversement, si C_p devient infiniment grand, alors α tend vers 0 et vers $1/2$, respectivement.

Comme on a montré que B est continue et coercive et que F est continue sur l'espace de Hilbert V, le théorème de Lax-Milgram s'applique et le problème est donc bien posé.

c) Le problème adjoint pour la quantité d'intérêt donnée s'écrit :

$$\text{Trouver } p \in V \text{ telle que :} \quad \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla p + (\beta \cdot \nabla v) p \, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v \, dx, \quad \forall v \in V.$$

En supposant que p est suffisamment régulière (ce qui dépend de la régularité du domaine Ω pour $d \geq 2$), on peut intégrer par partie la première intégrale :

$$\int_\Omega (\beta \cdot \nabla v) p + \Big(-\Delta p - |\Omega|^{-1} \Big) v \, dx + \int_{\Gamma_N} (n \cdot \nabla p) v \, ds = 0, \quad \forall v \in V,$$

où on a utilisé le fait que $v = 0$ sur Γ_D. Pour retrouver la forme forte du problème, il faut encore isoler v dans la première intégrale. Par le théorème de la divergence, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} vp(\beta \cdot n) ds &= \int_\Omega \nabla \cdot (\beta vp) dx = \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) vp + \beta \cdot \nabla(vp) dx \\ &= \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) vp \, dx + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla v) p \, dx + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla p) v \, dx \end{aligned}$$

Comme $\nabla \cdot \beta = 0$ dans Ω et $\beta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ (on remarque ici que l'on aurait pu ne prendre $\beta \cdot n = 0$ que sur Γ_N puisque $v = 0$ sur Γ_D), cette dernière équation devient :

$$\int_\Omega (\beta \cdot \nabla v) p \, dx = -\int_\Omega (\beta \cdot \nabla p) v \, dx$$

On a donc :

$$\int_\Omega \Big(-\beta \cdot \nabla p - \Delta p - |\Omega|^{-1} \Big) v \, dx + \int_{\Gamma_N} (n \cdot \nabla p) v \, ds = 0, \quad \forall v \in V.$$

Le choix judicieux des fonctions test permet d'obtenir la forme forte du problème adjoint :

$$\begin{aligned} -\beta \cdot \nabla p - \Delta p = |\Omega|^{-1}, &\quad \forall x \in \Omega \\ p = 0, &\quad \forall x \in \Gamma_D \\ n \cdot \nabla p = 0, &\quad \forall x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

d) Comme on a vu que B est continue et coercive sur V, pour montrer que le problème adjoint est bien posé, il suffit de prouver que Q est une forme continue sur V, ce qui est immédiat puisque par Cauchy-Schwarz:

$$|Q(v)| \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |v| dx \leq \frac{\|1\|_{L^2}}{|\Omega|} \|v\|_{L^2} = \frac{\sqrt{|\Omega|}}{|\Omega|} \|v\|_{H^1} = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \|v\|_{H^1}$$

La constante de continuité pour Q est donc $C = 1/\sqrt{|\Omega|}$.