MTH8207 – Mathématiques des éléments finis
Cours # 8

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques

Polytechnique Montréal
Automne 2021

Sommaire du cours #8

- Problèmes dépendants du temps
- Problèmes non linéaires

Problèmes dépendants du temps

Trouver $u = u(x, t)$ telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) = f(t), &\qquad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u = 0, &\qquad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u = u_0 &\qquad \forall x \in \Omega,\ t = 0 \end{aligned}}$$

Formulation faible (en espace seulement) :

On multiplie l'EDP par une fonction test $v = v(x)$ suffisamment régulière, on intègre sur Ω pour tout t, et on fait une intégration par partie :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v\, dx + \int_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \forall t \in (0, T)$$

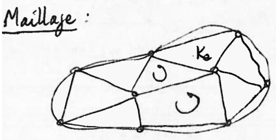
Problème faible

Trouver u, $u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$, $\forall t$; $u(x, \cdot) \in C^1(0, T)$, $\forall x$, telle que :

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx + \int_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \forall t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0, \qquad \forall x \in \Omega \end{array}}$$

On introduit un espace EF $V^h = \text{vect}\{\phi_j\} \subset H_0^1(\Omega)$:

$$\boxed{u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N} u_j(t) \phi_j(x)}$$



Les degrés de liberté $u_j(t)$ dépendent maintenant du temps.

Problème éléments finis

Par la méthode de Galerkine, le problème EF devient :

Trouver u_h, $u_h(\cdot, t) \in V^h, \forall t$; $u_h(x, \cdot) \in C^1(0, T), \forall x$, telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h\, dx + \int_\Omega \varepsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h\, dx = \int_\Omega f v_h\, dx, \qquad \forall v_h \in V^h,\ \forall t \in (0, T) \\ u_h(x, 0) = u_{h,0}, \qquad \forall x \in \Omega \end{aligned}}$$

où $u_{h,0}$ est choisie comme l'interpolant (ou une projection) de u_0 dans V^h:

$$\boxed{u_{h,0} = \sum_{j=1}^{N} u_{j,0} \phi_j(x)}$$

On pose alors le vecteur :

$$U_0 = \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{N,0} \end{bmatrix}$$

Problème éléments finis

On rappelle qu'il est équivalent de tester l'équation avec toutes les fonctions de base ϕ_i, soit :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h}{\partial t}\phi_i\,dx + \int_\Omega \varepsilon\nabla u_h\cdot\nabla\phi_i\,dx = \int_\Omega f\phi_i\,dx, \quad \forall i = 1,\dots,N,\ \forall t\in(0,T)$$

On remplace maintenant u_h par $\sum u_j\phi_i$ dans l'équation :

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum u_j\phi_j\right)\phi_i\,dx + \int_\Omega \varepsilon\nabla\left(\sum u_j\phi_j\right)\cdot\nabla\phi_i\,dx = \int_\Omega f\phi_i\,dx$$

$$\int_\Omega \left(\sum \frac{du_j}{dt}\phi_j\right)\phi_i\,dx + \int_\Omega \varepsilon\nabla\left(\sum u_j\phi_j\right)\cdot\nabla\phi_i\,dx = \int_\Omega f\phi_i\,dx$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^N \frac{du_j}{dt}\underbrace{\int_\Omega \phi_j\phi_i\,dx}_{M_{ij}} + \sum_{j=1}^N u_j\underbrace{\int_\Omega \varepsilon\nabla\phi_j\cdot\nabla\phi_i\,dx}_{K_{ij}} = \underbrace{\int_\Omega f\phi_i\,dx}_{F_i}}$$

Problème éléments finis

Matrice de masse M :

$$M = \left[M_{ij}\right]_{i,j=1,\ldots,N} = \left[\int_\Omega \phi_j \phi_i \, dx\right]_{i,j=1,\ldots,N}$$

Matrice de rigidité K :

$$K = \left[K_{ij}\right]_{i,j=1,\ldots,N} = \left[\int_\Omega \varepsilon \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx\right]_{i,j=1,\ldots,N}$$

Vecteur chargement F :

$$F = \left[F_i\right]_{i=1,\ldots,N} = \left[\int_\Omega f \phi_i \, dx\right]_{i=1,\ldots,N}$$

Vecteur solution U :

$$U = \left[U_i\right]_{i=1,\ldots,N} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \qquad \frac{dU}{dt} = \left[\frac{dU_i}{dt}\right]_{i=1,\ldots,N} = \begin{bmatrix} du_1/dt \\ \vdots \\ du_N/dt \end{bmatrix}$$

Problème éléments finis

Le problème est donc de trouver la solution $U = U(t)$ telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} M\frac{dU}{dt} + KU = F, \quad \forall t \in (0, T] \\ U(0) = U_0 \end{aligned}}$$

C'est un système de N équations linéaires d'ordre 1 en temps.

En général, on cherche une solution approchée de ce système par des méthodes de différences finies.

Pour cela, on discrétise l'intervalle de temps $I = [0, T]$ en $\mathcal{N}$ sous-intervalles $I_n = [t^{n-1}, t^n]$, $n = 1, \dots, \mathcal{N}$. On suppose ici que le pas de temps (i.e. la taille de chaque sous-intervalle I_n) est constant de valeur Δt.

Discrétisation en temps

Schéma d'Euler explicite d'ordre 1 :

Au temps t^n, la dérivée première est approchée par la différence avant :

$$\frac{dU}{dt}(t^n) = \frac{U(t^{n+1}) - U(t^n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Given U_0, on cherche alors $U^n \approx U(t^n)$, $n = 1, \ldots, \mathcal{N}$, tel que

$$M \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + KU^n = F^n$$

$$MU^{n+1} = (M - \Delta t\, K)U^n + \Delta t\, F^n$$

Soit, en changeant l'indice :

$$\boxed{MU^n = (M - \Delta t\, K)U^{n-1} + \Delta t\, F^{n-1}, \quad n = 1, \ldots, \mathcal{N}}$$

Le schéma est conditionnellement stable.

Discrétisation en temps

Schéma d'Euler implicite d'ordre 1 :

Au temps t^n, la dérivée première est approchée par la différence arrière :

$$\frac{dU}{dt}(t^n) = \frac{U(t^n) - U(t^{n-1})}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Given U_0, on cherche alors $U^n \approx U(t^n)$, $n = 1, \ldots, \mathcal{N}$, tel que

$$M \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} + KU^n = F^n$$

Soit :

$$\boxed{(M + \Delta t\, K)U^n = MU^{n-1} + \Delta t\, F^{n-1}, \quad n = 1, \ldots, \mathcal{N}}$$

Le schéma est inconditionnellement stable.

Discrétisation en temps

Schéma de Crank-Nicolson d'ordre 2 :

Au temps t^n, la dérivée première est approchée par la différence centrée :

$$\frac{dU}{dt}(t^n) = \frac{U(t^{n+1}) - U(t^{n-1})}{2\Delta t} + \mathcal{O}\big((\Delta t)^2\big)$$

Given U_0, on cherche alors $U^n \approx U(t^n)$, $n = 1, \dots, \mathcal{N}$, tel que

$$M\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} + K\frac{U^{n+1} + U^{n-1}}{2} = \frac{F^{n+1} + F^{n-1}}{2}$$

$$\big(M + \Delta t\, K\big)U^{n+1} = \big(M - \Delta t\, K\big)U^{n-1} + \Delta t\left(F^{n+1} + F^{n-1}\right)$$

Soit, par un changement d'indice,

$$\boxed{\left(M + \frac{\Delta t}{2}K\right)U^n = \left(M - \frac{\Delta t}{2}K\right)U^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\big(F^n + F^{n-1}\big), \quad n = 1, \dots, \mathcal{N}}$$

Problèmes non linéaires

Équation de Burgers : Trouver u telle que

$$\boxed{\begin{aligned} -\varepsilon u'' + uu' = f, \quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u = 0, \quad x = 0, 1 \end{aligned}}$$

Formulation faible :

$$\text{Trouver } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ telle que } \underbrace{\int_\Omega \varepsilon u'v' + uu'v\,dx}_{B(u;v)} = \underbrace{\int_\Omega fv\,dx}_{F(v)}, \quad \forall v \in V$$

$B(u;v)$ est non linéaire par rapport à la variable u, ce qui est indiqué par l'usage du point-virgule. Le problème s'écrit :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } B(u;v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

Méthode de Newton

Supposons que l'on recherche les racines $x \in I$ d'une fonction f, i.e. $f(x) = 0$. La méthode de Newton est une méthode itérative qui consiste, donné un point initial x_0, à trouver les itérations :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

On pose $\delta x = x_{k+1} - x_k$. On peut décomposer le calcul en 2 étapes :

1) Calculer δx tel que $f'(x_k)\delta x = -f(x_k)$
2) Calculer x_{k+1} tel que $x_{k+1} = x_k + \delta x$

On note que l'on peut calculer δx si $f'(x_k) \neq 0$. D'autre part, la convergence de la méthode n'est pas garantie. Cela dépend de la fonction f.

Méthode de Newton-Raphson

Le problème peut s'écrire :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } \mathcal{R}(u;v) = F(v) - B(u;v) = 0, \quad \forall v \in V}$$

Soit $u_0 \in V$ donnée. La méthode consiste alors à, pour $k = 0, 1, \ldots$:

1) Calculer $\delta u \in V$ tel que :

$$\mathcal{R}'(u_k; \delta u, v) = -\mathcal{R}(u_k; v), \quad \forall v \in V$$

2) Calculer $u_{k+1} \in V$ tel que :

$$u_{k+1} = u_k + \delta u$$

où $\mathcal{R}'(u_k; \delta u, v)$ est la dérivée de Gâteaux :

$$\boxed{\mathcal{R}'(u_k; \delta u, v) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathcal{R}(u_k + \theta \delta u; v) - \mathcal{R}(u_k; v)}{\theta}, \quad \forall v \in V}$$

Méthode de Newton-Raphson

On montre que $\mathcal{R}'(u_k; \delta u, v) = -B'(u_k; \delta u, v), \forall v \in V$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'(u_k; \delta u, v) &= \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathcal{R}(u_k + \theta \delta u; v) - \mathcal{R}(u_k; v)}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{F(v) - B(u_k + \theta \delta u; v) - F(v) + B(u_k; v)}{\theta} \\
&= - \lim_{\theta \to 0} \frac{B(u_k + \theta \delta u; v) - B(u_k; v)}{\theta} \\
&= -B'(u_k; \delta u, v)
\end{aligned}$$

Méthode : Soit $u_0 \in V$ donnée. Pour $k = 0, 1, \ldots$

1) Trouver $\delta u \in V$ tel que $B'(u_k; \delta u, v) = \mathcal{R}(u_k; v), \quad \forall v \in V$
2) Calculer $u_{k+1} \in V$ tel que $u_{k+1} = u_k + \delta u$

We note that $B'(u_k; \delta u, v)$ est une forme bilinéaire par rapport à δu et v.

Calcul de B' pour l'équation de Burgers

De la définition de B, on a :

$$\begin{aligned}
B(u_k + \theta\delta u; v) &= \int_\Omega \varepsilon(u_k + \theta\delta u)' v' + (u_k + \theta\delta u)(u_k + \theta\delta u)' v \, dx \\
&= \int_\Omega \varepsilon u_k' v' + u_k u_k' v \, dx \\
&\quad + \theta \int_\Omega \varepsilon(\delta u)' v' + u_k(\delta u)' v + (\delta u) u_k' v \, dx \\
&\quad + \theta^2 \int_\Omega (\delta u)(\delta u)' v \, dx
\end{aligned}$$

D'où l'on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned}
B'(u_k; \delta u, v) &= \lim_{\theta \to 0} \frac{B(u_k + \theta\delta u; v) - B(u_k; v)}{\theta} \\
&= \int_\Omega \varepsilon(\delta u)' v' + u_k(\delta u)' v + (\delta u) u_k' v \, dx
\end{aligned}}$$

Solution EF

On introduit un espace EF $V^h = \text{vect}\{\phi_j\} \subset V$.

Méthode EF : Soit $u_{h,0} \in V^h$ donnée. Pour $k = 0, 1, \ldots$

1) Trouver $\delta u_h \in V^h$ tel que $B'(u_{h,k}; \delta u_h, v_h) = \mathcal{R}(u_{h,k}; v_h), \quad \forall v_h \in V^h$
2) Calculer $u_{h,k+1} \in V^h$ tel que $u_{h,k+1} = u_{h,k} + \delta u_h$

En fait, on cherche $\delta u_h = \sum_j \delta u_j \phi_j$ telle que :

$$\sum_j \delta u_j \underbrace{B'(u_{h,k}; \phi_j, \phi_i)}_{=K_{ij}(u_{h,k})} = \underbrace{\mathcal{R}(u_{h,k}; \phi_i)}_{=F_i(u_{h,k})}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

soit :

$$\boxed{K(u_{h,k})\delta U = F(u_{h,k})}$$

Il faut assembler la matrice $K(u_{h,k})$ et vecteur $F(u_{h,k})$ et résoudre le système d'équations à chaque itération de Newton-Raphson.

Résumé du cours

- Les problèmes en temps et en espace sont en général discrétisés par une méthode des éléments finis en espace et par une méthode de différences finies en temps.
- La formulation faible du problème est alors définie seulement par rapport à la variable d'espace.
- Les problèmes non linéaires sont résolus par des méthodes itératives, e.g. Newton-Raphson. On a besoin de résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération.
- Il est donc important d'utiliser une méthode qui converge rapidement vers la solution du problème non linéaire (Newton-Raphson est une méthode d'ordre 2).