

MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

Cours # 7

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques

Polytechnique Montréal
Automne 2022

Sommaire du cours #7

- Estimation a posteriori des erreurs :
 - Méthode explicite pour estimer la norme du résiduel.
 - Méthode pour estimer l'erreur dans quantité d'intérêt basée sur la solution du problème adjoint.
- Adaptation des maillages éléments finis.

Estimation a posteriori des erreurs

On veut quantifier l'erreur $e(x) = u(x) - u_h(x)$:

Trouver $u \in V$ telle que $B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$

Trouver $u_h \in V^h$ telle que $B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V^h$

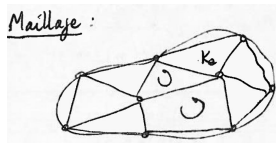
Deux approches fondamentales :

- 1) Estimation des erreurs en normes globales (H^1 , L^2 , ou normes dites d'énergie).
Premiers travaux dès la fin des années 1970.
- 2) Estimation par rapport à des grandeurs physiques (que l'on appelle aussi quantités d'intérêt), par exemple, la solution en un point donné $x_0 \in \Omega$, la moyenne locale de la solution dans un sous-domaine $\omega \subset \Omega$, le flux à travers certaines parties de la frontière, etc.
Premiers travaux dès le milieu des années 1990.

Sources d'erreur

- 1) Erreurs de discrétisation du domaine
- 2) Erreurs de quadrature

$$\begin{aligned}
 B(u_h, v_h) &= \int_{\Omega} u_h v_h dx \\
 &\approx \int_{\Omega_h} u_h v_h dx = \sum_K \int_K u_h v_h dx \\
 &\approx \sum_K \sum_g \omega(\xi_g) u_h(\xi_g) v_h(\xi_g) |J(\xi_g)|
 \end{aligned}$$



$$\Omega_h = \cup_e K_e \neq \Omega$$

- 3) Erreurs dans la solution du système $KU = F$ (e.g. erreurs d'arrondi si solveur direct ou erreurs de convergence si solveur itératif)
- 4) Approximation de la solution u par des fonctions u_h continues et polynomiales par morceaux

⇒ On ignore ici les sources d'erreur #1, #2, et #3 et se concentre sur #4!

Relation entre l'erreur et le résiduel

$$\text{Trouver } \mathbf{e} \in V \text{ telle que } B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \mathcal{R}_h(\mathbf{v}) \equiv F(\mathbf{v}) - B(u_h, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

The résiduel \mathcal{R} est une forme linéaire (fonctionnelle) de V dans \mathbb{R} .

$$\|\mathcal{R}\| = \sup_{\mathbf{v} \neq 0 \in V} \frac{|\mathcal{R}(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_V} \Rightarrow \frac{|\mathcal{R}(\mathbf{e})|}{\|\mathbf{e}\|_V} \leq \|\mathcal{R}\| \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{e}) \leq \|\mathcal{R}\| \|\mathbf{e}\|_V$$

Coercivité de B :

$$\alpha \|\mathbf{e}\|_V^2 \leq B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \mathcal{R}(\mathbf{e}) \leq \|\mathcal{R}\| \|\mathbf{e}\|_V \Rightarrow \boxed{\alpha \|\mathbf{e}\|_V \leq \|\mathcal{R}\|}$$

Continuité de B :

$$\|\mathcal{R}\| = \sup_{\mathbf{v} \neq 0 \in V} \frac{|\mathcal{R}(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_V} = \sup_{\mathbf{v} \neq 0 \in V} \frac{|B(\mathbf{e}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_V} \leq \sup_{\mathbf{v} \neq 0 \in V} \frac{M \|\mathbf{e}\|_V \|\mathbf{v}\|_V}{\|\mathbf{v}\|_V} = M \|\mathbf{e}\|_V$$

On a donc :

$$\boxed{\alpha \|\mathbf{e}\|_V \leq \|\mathcal{R}\| \leq M \|\mathbf{e}\|_V}$$

Méthodes d'estimation d'erreur a posteriori

$$\boxed{\alpha \|e\|_V \leq \|\mathcal{R}\| \leq M \|e\|_V} \quad \text{où } \|\mathcal{R}\| = \sup_{v \neq 0 \in V} \frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|_V}$$

Remarques :

- $\|\mathcal{R}\|$ est une bonne mesure de l'erreur $\|e\|_V$ si $\alpha \approx 1$ et $M \approx 1$.
En particulier, $\|\mathcal{R}\| = \|e\|_V$ si $\alpha = M = 1$.
- Puisque \mathcal{R} est le terme source dans l'équation d'erreur, c'est le terme à contrôler dans une stratégie d'adaptation de maillage.

L'objectif est alors de trouver une norme $\|\cdot\|_V$ (norme énergie), de sorte que α et M soient proches de 1, et de développer des méthodes efficaces pour estimer la norme $\|\mathcal{R}\|$:

- **Méthodes explicites** : aucun problème supplémentaire à résoudre.
- **Méthodes implicites** : résolution de problèmes auxiliaires sur chaque élément ou sur des sous-domaines de Ω .

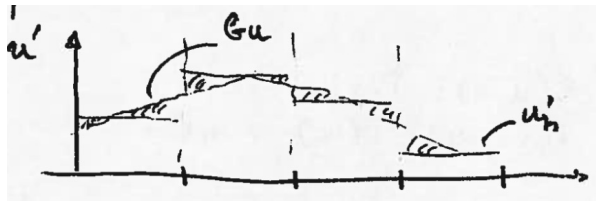
Méthodes d'estimation d'erreur a posteriori

Les “Recovery-type methods” :

Dans la méthode des éléments finis, puisque les fonctions u_h sont continues par morceaux, les dérivées premières, e.g. les gradients de u_h , sont discontinues à l'interface des éléments.

L'idée de ces méthodes est alors de “reconstruire” des dérivées continues par morceaux Gu_h en se servant de u_h , qui soient de meilleures approximations de u' que u'_h .

$$\|e\| = \|e'\|_{L^2} \approx \sqrt{\int_{\Omega} (Gu_h - u'_h)^2 dx}$$



Méthode explicite

Un exemple en 1D :

$$\begin{aligned} -\varepsilon u'' + u &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0, 1) \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Forme faible :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que : } \underbrace{\int_0^1 \varepsilon u' v' + uv \, dx}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f v \, dx}_{F(v)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Définition du résiduel :

$$\mathcal{R}(v) = F(v) - B(u_h, v) = \int_0^1 f v - \varepsilon u_h' v' - u_h v \, dx$$

Méthode explicite

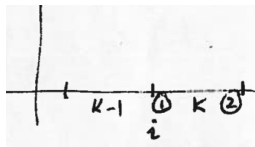
$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(v) &= \int_0^1 fv - \varepsilon u_h' v' - u_h v \, dx = \sum_{K=1}^{N_e} \int_K fv - \varepsilon u_h' v' - u_h v \, dx \\
 &= \sum_{K=1}^{N_e} \left[\int_K (fv + \varepsilon u_h'' v - u_h v) \, dx - \varepsilon u_h'(x) v(x) \Big|_{x_{1,K}}^{x_{2,K}} \right] \\
 &= \sum_{K=1}^{N_e} \int_K \underbrace{(f + \varepsilon u_h'' - u_h)}_{=r_K(x)} v \, dx + \sum_{i=2}^{N-1} \underbrace{[\varepsilon u_h'(x_i^+) - \varepsilon u_h'(x_i^-)]}_{=j_i} v(x_i) \\
 &= \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_K(x) v \, dx + \sum_{i=2}^{N-1} j_i v(x_i)
 \end{aligned}$$

Résiduel intérieur :

$$r_K(x) = (f + \varepsilon u_h'' - u_h) \in L^2(K), \forall K$$

Saut interfacial (jump) :

$$j_i = \varepsilon u_h'(x_i^+) - \varepsilon u_h'(x_i^-), \forall i = 2, \dots, N-1$$



Méthode explicite

Soit $v_h \in V^h \subset H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{R}(v) = \mathcal{R}(v - v_h) = \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_k [v - v_h] dx + \sum_{i=2}^{N-1} j_i [v(x_i) - v_h(x_i)]$$

On choisit $v_h = I_h v$, ce qui implique que $v(x_i) - I_h v(x_i) = 0, \forall i = 1, \dots, N$.
Et donc, dans ce cas :

$$\mathcal{R}(v) = \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_k [v - I_h v] dx$$

Soit :

$$|\mathcal{R}(v)| \leq \sum_{K=1}^{N_e} \int_K |r_k [v - I_h v]| dx \leq \sum_{K=1}^{N_e} \|r_k\|_{L^2(K)} \|v - I_h v\|_{L^2(K)}$$

Méthode explicite

Estimation de l'erreur d'interpolation $\|v - I_h v\|$:

$$\|v - I_h v\|_{L^2(K)} \leq C_I h_K \|v\|_{H^1(K)}$$

où C_I est une constante d'interpolation indépendante de h_K .

$$|\mathcal{R}(v)| \leq C_I \sum_{K=1}^{N_e} \underbrace{h_K \|r_k\|_{L^2(K)}}_{a_K} \underbrace{\|v\|_{H^1(K)}}_{b_K}$$

En utilisant la relation du produit scalaire des deux vecteurs

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{N_e})$ et $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{N_e})$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_K a_K b_K \leq \sqrt{\sum_K a_K^2} \sqrt{\sum_K b_K^2}$$

on obtient :

$$|\mathcal{R}(v)| \leq C_I \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|_{L^2(K)}^2} \sqrt{\sum_K \|v\|_{H^1(K)}^2}$$

Méthode explicite

Puisque

$$\sum_K \|v\|_{H^1(K)}^2 = \sum_K \int_K v^2 + v'^2 dx = \int_\Omega v^2 + v'^2 dx = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{H^1}^2$$

on a :

$$\frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|_{H^1}} \leq C_I \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|_{L^2(K)}^2}$$

On remarque que le terme à droite de l'inégalité est indépendant de v , donc :

$$\|\mathcal{R}\| = \sup_{v \neq 0 \in H^1(\Omega)} \frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|_{H^1}} \leq C_I \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|_{L^2(K)}^2}$$

Finalement, on utilise :

$$\|e\|_{H^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{R}\| \leq C_I \times \frac{1}{\alpha} \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|_{L^2(K)}^2}$$

Méthode explicite

Estimateur : En général, $C_I \approx 1$, on peut alors définir un estimateur de l'erreur comme :

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|_{L^2(K)}^2}$$

Il est important de choisir une norme telle que la constante de coercivité α soit le plus proche de 1.

On rappelle que :

$$\|r_k\|_{L^2(K)}^2 = \int_K (f + \varepsilon u_h'' - u_h)^2 dx$$

On mesure la performance de l'estimateur par l'index d'efficacité :

$$\lambda = \frac{\eta}{\|e\|}$$

Un bon estimateur d'erreur a de préférence un index $\lambda \geq 1$ et proche de 1.

Méthode explicite

Adaptivité du maillage :

On décompose l'estimateur en contributions élémentaires :

$$\eta_K = h_K \|r_K\|_{L^2(K)}$$

de sorte que

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\sum_K \eta_K^2}$$

Exemple d'indicateur de raffinement :

$$\gamma_K = \frac{\eta_K}{\max_K \eta_K}$$

On note que $0 \leq \gamma_K \leq 1$.

Si $\gamma_K \geq 0.5$, on décompose l'élément K en 2 éléments de taille égale.

Estimation d'erreur en quantité d'intérêt

Définition :

Une **fonctionnelle**, en mathématiques, est une application d'un espace vectoriel – généralement un espace vectoriel de fonctions – vers \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Lorsqu'une fonctionnelle est linéaire, on parle de **forme linéaire**.

Exemples de quantités d'intérêt (fonctionnelles) :

Moyenne de u sur Ω :

$$Q(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, dx$$

Moyenne locale sur $\omega \subset \Omega$:

$$Q(u) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} u \, dx$$

Valeur de u en un point x_0 :

$$Q(u) = u(x_0) = \int_{\Omega} \delta(x - x_0) u(x) \, dx$$

Énergie cinétique (si u = vitesse) :

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u^2 \, dx$$

Flux à travers la frontière Γ_N :

$$Q(u) = \int_{\Gamma_N} n \cdot u \, ds$$

Estimation d'erreur en quantité d'intérêt

De manière générale, toutes les fonctionnelles linéaires sur un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ peuvent s'écrire :

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(u) = \int_{\Omega} k_i(x)u(x) dx + \int_{\partial\Omega} k_f(s)u(s) ds$$

- 1) Moyenne globale : $k_i(x) = 1/|\Omega|$ et $k_f(s) = 0$.
- 2) Moyenne locale : $k_i(x) = 1/|\omega|$ si $x \in \omega$ et 0 sinon, et $k_f(s) = 0$.
- 3) Valeur en un point : $k_i(x) = \delta(x - x_0)$ et $k_f(s) = 0$.
- 4) Flux : $k_i(x) = 0$ et $k_f(s) = n \cdot$ si $s \in \Gamma_N$ et 0 sinon.

Problème adjoint (dual)

Soit le problème primal sous forme faible :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

On définit le problème adjoint associé à une fonctionnelle Q linéaire comme :

$$\text{Trouver } p \in V \text{ telle que } B(v, p) = Q(v), \quad \forall v \in V$$

où p est appelée la solution adjointe.

On obtient alors la relation fondamentale :

$$Q(u) = B(u, p) = F(p)$$

de laquelle on peut évaluer l'erreur dans la quantité d'intérêt :

$$\mathcal{E} = Q(u) - Q(u_h) = F(p) - B(u_h, p) = \mathcal{R}(p)$$

Estimation de l'erreur \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = Q(u) - Q(u_h) = \mathcal{R}(p)$$

La solution p du problème adjoint indique comment les sources d'erreur \mathcal{R} affectent l'erreur \mathcal{E} dans l'approximation $Q(u_h)$ de la quantité d'intérêt $Q(u)$.

Approximation de p et de \mathcal{E} :

- On ne connaît la solution p que pour des problèmes simples.
- Si p_h est une approximation de $p \in V^h$, alors, par la condition d'orthogonalité, on a $\mathcal{R}(p_h) = 0$.
- Il faut donc trouver une approximation de la solution adjointe p dans un espace EF plus riche que $V^h = V^{h,p}$ (où p est ici le degré des polynômes). On choisit par exemple $\tilde{V} = V^{h/2,p}$ ou $\tilde{V} = V^{h,p+1}$.

$$\text{Trouver } \tilde{p} \in \tilde{V} \text{ telle que } B(v, \tilde{p}) = F(v), \quad \forall v \in \tilde{V}$$

- La quantité $\eta = \mathcal{R}(\tilde{p})$ fournit une approximation de \mathcal{E} .

Adaptation du maillage

L'idée est de décomposer l'estimateur η en des contributions η_K sur chacun des éléments K du maillage.

On peut suivre l'approche utilisée pour la méthode explicite :

$$\begin{aligned}
 \eta &= \mathcal{R}(\tilde{p}) = \mathcal{R}(\tilde{p} - I_h \tilde{p}) \\
 &= \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_k [\tilde{p} - I_h \tilde{p}] dx + \sum_{i=2}^{N-1} j_i [\tilde{p}(x_i) - I_h \tilde{p}(x_i)] \\
 &= \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_k [\tilde{p} - I_h \tilde{p}] dx \\
 &\leq \sum_{K=1}^{N_e} \|r_k\|_{L^2(K)} \|\tilde{p} - I_h \tilde{p}\|_{L^2(K)}
 \end{aligned}$$

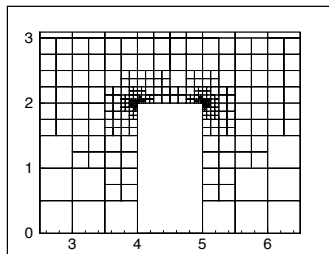
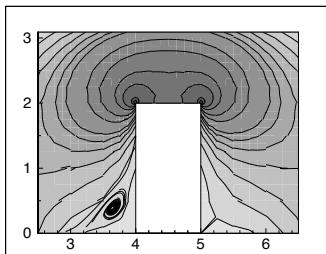
On définit alors les contributions élémentaires :

$$\eta_K = \|r_k\|_{L^2(K)} \|\tilde{p} - I_h \tilde{p}\|_{L^2(K)}$$

Flow around obstacle (Stokes flow)

Top plots:

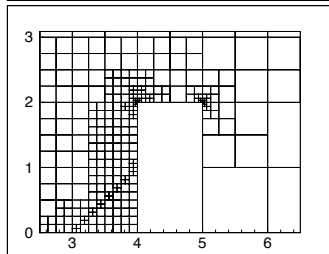
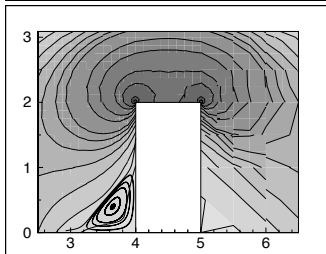
Residual-based
Error Estimation
and adaptivity



Bottom plots:

Goal-Oriented
Error Estimation
and adaptivity

QoI = averaged
vorticity in lower
left corner.



Résumé du cours

- Les méthodes d'estimation a posteriori permettent de quantifier les erreurs d'approximation.
- Il existe deux types d'approches : les approches globales, par rapport à des normes, et les approches par rapport à des quantités d'intérêt.
- Les approches globales sont en général basées sur l'estimation de la norme du résiduel $\|\mathcal{R}\|$, puisque pour des problèmes bien posés, cette dernière est équivalente à la norme de l'erreur $\|e\|_V$.
- Les approches pour estimer l'erreur par rapport à des quantités d'intérêt sont basées sur l'approximation de la solution du problème adjoint et fournissent un estimateur construit comme le produit du résiduel et de la solution duale.
- Les estimateurs d'erreur peuvent être décomposés en contributions élémentaires afin de servir d'indicateurs de raffinement.