Département de Mathématiques et de Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2021

Devoir 2 | 100 points

Distribué le 2021/09/29 | À rendre le 2021/10/08

Question 1 :

On considère le problème suivant sous sa forme abstraite :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \quad B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V,$$

où V est un espace vectoriel tel que la forme bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $F(\cdot)$ soient bien définies sur V. Pour approcher la solution u de ce problème par la méthode des éléments finis, on introduit l'espace de dimension finie $V_h \subset V$ tel que $V_h = \text{vect}\{\phi_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, où les fonctions ϕ_i forment une base de V_h.

Démontrer qu'il est équivalent d'écrire le problème élément fini sous les deux formes :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ \Longleftrightarrow \ & \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad \forall i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

Question 2 (Equation de la Caténaire Linéarisée) :

On considère une corde de longueur L, fixée en ses deux extrémités et soumise à la fois à son propre poids et à une force ponctuelle en un point $x_0 \in (0, L)$. La déflexion u satisfait alors le problème faible :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \quad \int_0^L T u' v' dx = -\int_0^L \rho g v dx + \int_0^L q_0 \delta(x - x_0) v dx, \qquad \forall v \in V,$$

où la tension T de la corde est constante, ρ est la densité linéique de la corde, g la constante de gravité, q_0 un réel (mesurant l'énergie de la force ponctuelle), et :

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega);\ v(0) = 0 \text{ et } v(L) = 0\}.$$

Noter que le zéro dans $H_0^1(\Omega)$ indique que les fonctions s'annulent sur l'ensemble de la frontière du domaine Ω et se rappeler que la fonction de Dirac satisfait :

$$\int_0^L q_0 \delta(x - x_0) v dx = q_0 v(x_0), \qquad \forall v \in V,$$

puisque V est sous-espace de $C(\overline{\Omega})$.

a) Trouver la formulation forte du problème.

b) En supposant que le poids de la corde est négligeable par rapport à la force ponctuelle, i.e. prendre $\rho = 0$, trouver la solution analytique u du problème.

QUESTION 3 :

Soient $\Omega = (0,1)$ et la fonctionnelle J définie sur l'espace $U = \{v \in H^1(\Omega) : \ v(1) = 2\}$ par :

$$J(v) = \int_0^1 (v')^2 + 2v^2 - 5x^{3/4} v dx + 3v^2(0) - v(0).$$

Construire les problèmes faible et fort que satisfait le minimisant de $J(v)$.

QUESTION 4 (THÉORIE DES POUTRES DE TIMOSHENKO) :

On considère la théorie des poutres de Timoshenko dont l'équation d'ordre 4 qui gouverne la flèche u d'une poutre homogène de section transversale d'aire constante A est donnée par :

$$(EIu'')'' = q - \frac{EI}{\kappa AG} q'', \quad \forall x \in \Omega = (0,1),$$

où E, I, G, et κ sont le module d'élasticité, le second moment de l'aire de section de la poutre, le module de cisaillement, et le coefficient de cisaillement de Timoshenko, respectivement (supposés constants ici), et $q = q(x) \in H^1(\Omega)$, représente une charge répartie sur la poutre. De plus, on considère que la poutre est soumise aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u' &= 0, \quad x = 0, \\ (EIu'')' &= g, \quad x = 0, \\ u &= \bar{u}, \quad x = 1, \\ u'' &= 0, \quad x = 1, \end{aligned}$$

où g et $\bar{u} \in \mathbb{R}$. Trouver une formulation faible symétrique du problème ci-dessus. En particulier, définir l'ensemble des solutions admissibles et celui des fonctions tests et spécifier lesquelles des conditions aux limites sont essentielles ou naturelles. Justifier clairement chacune de vos réponses.

QUESTION 5 (ÉLÉMENT FINI DE HERMITE EN DIMENSION 1) :

Afin de résoudre le problème de la Question 5 par la méthode des éléments finis, on considère l'élément fini de référence $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ où :

$$\begin{aligned} &\widehat{K} = [-1, 1], \\ &\widehat{P} = \mathbb{P}_3(\widehat{K}) = \Big\{ p(\xi) = \textstyle\sum_{i=0}^{3} a_i \xi^i, \ \forall \xi \in \widehat{K}, \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, \dots, 3 \Big\}, \\ &\widehat{\Sigma} = \Big\{ \hat{\sigma}_i : \widehat{P} \longrightarrow \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, 4 \Big\}. \end{aligned}$$

Pour tout $p \in \widehat{P}$, les degrés de liberté sont choisis comme étant :

$$\hat{\sigma}_1(p) = p(-1), \quad \hat{\sigma}_2(p) = p(1), \quad \hat{\sigma}_3(p) = p'(-1), \quad \hat{\sigma}_4(p) = p'(1).$$

a) Calculer les fonctions de forme $\hat{\theta}_i(\xi)$, $i = 1, \dots, 4$, et représenter sur une figure chacune de ces fonctions sur l'élément de référence $\widehat{K}$.

b) Soit le domaine $\Omega = (0,5)$ et une partition de Ω en deux éléments, $K_1 = [0,3]$ et $K_2 = [3,5]$, tels que $\overline{\Omega} = K_1 \cup K_2$. Tracer toutes les fonctions de base globales qui génèrent le sous-espace de $C^1(\overline{\Omega})$ formé par les fonctions polynomiales par morceaux, de degré 3, et définies sur $\overline{\Omega}$. L'espace $C^1(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions dont les dérivées premières sont continues sur $\overline{\Omega}$.

SOLUTIONS

Question 1 (10 points) :

a) On suppose que la solution u_h satisfait :

$$B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Puisque $\phi_i \in V_h$ (fonctions de base de V_h), $i = 1, \ldots, N$, alors il suffit de prendre $v_h = \phi_i$ dans l'équation ci-dessus, ce qui implique :

$$B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

b) On suppose maintenant que u_h satisfait: $B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Comme $V_h = \text{vect}\{\phi_i\}$, toute fonction v_h de V_h peut s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions de base, i.e.

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v_i \phi_i.$$

où $v_i \in \mathbb{R}$. Soit $v_h \in V_h$, on a donc, en utilisant la linéarité de B et F :

$$\begin{aligned} B(u_h, v_h) - F(v_h) &= B\big(u_h, \sum_i v_i \phi_i\big) - F\big(\sum_i v_i \phi_i\big) = \sum_i v_i B(u_h, \phi_i) - \sum_i v_i F(\phi_i) \\ &= \sum_i v_i \big[B(u_h, \phi_i) - F(\phi_i)\big] = 0 \end{aligned}$$

Comme le résultat ci-dessus est valable pour toute fonction v_h de V_h, on a donc bien :

$$B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Question 2 (25 points) :

a) Comme la fonction de Dirac δ n'est pas dans $L^2(\Omega)$, la dérivée seconde de la solution u n'existe pas au sens classique. On décompose alors chaque intégrale en deux intégrales :

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} T u' v' dx + \int_{x_0}^{L} T u' v' dx &= -\int_0^{x_0} \rho g v \, dx - \int_{x_0}^{L} \rho g v \, dx + \int_0^{L} q_0 \delta(x - x_0) v \, dx \\ &= -\int_0^{x_0} \rho g v \, dx - \int_{x_0}^{L} \rho g v \, dx + q_0 v(x_0). \end{aligned}$$

En choisissant $v \in V$ arbitraire telle que $v(x) = 0$ sur $[x_0, L]$, on a :

$$\int_0^{x_0} T u' v' dx = -\int_0^{x_0} \rho g v \, dx.$$

On en conclut que u est dans $H^2(0,x_0)$. En prenant $v(x)=0$ sur $[0,x_0]$, on en déduit que u est aussi dans $H^2(x_0,L)$, et on peut alors faire des intégrations par partie sur chacun des sous-intervalles, soit :

$$\int_0^{x_0}(-Tu''+\rho g)v\,dx+\int_{x_0}^{L}(-Tu''+\rho g)v\,dx+Tu'(x_0^-)v(x_0^-)-Tu'(x_0^+)v(x_0^+)-q_0v(x_0)=0.$$

Comme $v\in H^1(\Omega)$, la fonction v est continue en x_0, i.e. $v(x_0^-)=v(x_0^+)=v(x_0)$, et donc :

$$\int_0^{x_0}(-Tu''+\rho g)v\,dx+\int_{x_0}^{L}(-Tu''+\rho g)v\,dx+\big[Tu'(x_0^-)-Tu'(x_0^+)-q_0\big]v(x_0)=0,\quad \forall v\in V.$$

La forme forte du problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
-Tu''&=-\rho g, &&\forall x\in(0,x_0)\\
-Tu''&=-\rho g, &&\forall x\in(x_0,L)\\
u(0)&=0,\\
u(L)&=0,\\
u(x_0^-)-u(x_0^+)&=0,\\
Tu'(x_0^-)-Tu'(x_0^+)&=q_0.
\end{aligned}$$

b) Il suffit de résoudre le problème fort ci-dessus pour trouver la solution exacte :

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{q_0}{T}\dfrac{x(L-x_0)}{L}, & \forall x\in[0,x_0]\\[2mm] \dfrac{q_0}{T}\dfrac{x_0(L-x)}{L}, & \forall x\in[x_0,L]\end{cases}$$

<u>Question 3 (20 points) :</u>

Le problème faible s'obtient par minimisation de $J(v)$ dans U. Il suffit de calculer la dérivée de Gâteaux de J dans chaque direction $v\in V=\{v\in H^1(0,1):\ v(1)=0\}$, soit :

$$J'(u)(v)=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta}\big[J(u+\theta v)-J(u)\big]=\int_0^1 2u'v'+4uv-5x^{3/4}v\,dx+6u(0)v(0)-v(0)$$

En prenant $J'(u)(v)=0$, $\forall v\in V$, on obtient le problème faible :

$$\text{Trouver } u\in U \text{ telle que :}\quad \int_0^1 2u'v'+4uv\,dx+6u(0)v(0)=\int_0^1 5x^{3/4}v\,dx+v(0),\quad \forall v\in V.$$

Comme la fonction $x^{3/4}\in H^1(0,1)$, on en déduit que la solution u du problème ci-dessus est dans $H^3(0,1)$, et donc dans $C^2([0,1])$, et on peut intégrer par partie :

$$\int_0^1[-2u''+4u-5x^{3/4}]v\,dx+[-2u'(0)+6u(0)-1]v(0)=0,$$

pour obtenir le problème fort : Trouver $u\in C^2(\overline{\Omega})$ telle que

$$\begin{aligned}
-2u''+4u&=5x^{3/4},\quad \forall x\in(0,1),\\
u(1)&=2,\\
-2u'(0)+6u(0)&=1.
\end{aligned}$$

Question 4 (20 points) :

En faisant une double intégration par partie pour le terme en u, afin d'obtenir une forme bilinéaire symétrique, et en appliquant les conditions aux limites, on obtient :

Trouver $u \in U$ telle que : $\displaystyle\int_0^1 EIu''v''dx = \int_0^1 qv\,dx + \int_0^1 \frac{EI}{\kappa AG} q'v'\,dx + \left[g - \frac{EI}{\kappa AG}\right] v(0), \quad \forall v \in V,$

où l'espace des fonctions admissibles et l'espace des fonctions test sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
U &= \{u \in H^2(\Omega) : \; u(1) = \bar{u}, \; u'(0) = 0\}, \\
V &= \{v \in H^2(\Omega) : \; v(1) = 0, \; v'(0) = 0\}.
\end{aligned}
$$

Les conditions $u(1) = \bar{u}$ et $u'(0) = 0$ sont dites essentielles tandis que les conditions $u''(1) = 0$ et $(EIu'')'(0) = g$ sont dites naturelles.

Question 5 (25 points) :

a) Soit $\hat{\theta}_j(\xi) = a_j + b_j\xi + c_j\xi^2 + d_j\xi^3$, $j = 1, \ldots, 4$. La dérivée première de $\hat{\theta}_j$ est donnée par:

$$\hat{\theta}_j'(\xi) = b_j + 2c_j\xi + 3d_j\xi^2$$

Les coefficients des fonctions de forme satisfont le système d'équations suivant:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

La solution de ce système est donnée par:

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_1(\xi) &= \frac{1}{4}\big(2 - 3\xi + \xi^3\big) = \frac{1}{4}\big(1-\xi\big)^2\big(2+\xi\big) \\
\hat{\theta}_2(\xi) &= \frac{1}{4}\big(2 + 3\xi - \xi^3\big) = \frac{1}{4}\big(1+\xi\big)^2\big(2-\xi\big) \\
\hat{\theta}_3(\xi) &= \frac{1}{4}\big(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\big) = \frac{1}{4}\big(1-\xi\big)^2\big(1+\xi\big) \\
\hat{\theta}_4(\xi) &= \frac{1}{4}\big(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\big) = -\frac{1}{4}\big(1+\xi\big)^2\big(1-\xi\big)
\end{aligned}
$$

On peut observer que $\hat{\theta}_2(-\xi) = \hat{\theta}_1(\xi)$ et $\hat{\theta}_4(-\xi) = -\hat{\theta}_3(\xi)$.

b) Soient $\theta_i^1(x)$ et $\theta_i^2(x)$, $i = 1, \ldots, 4$, les fonctions de forme sur les éléments K_1 et K_2, respectivement. Les fonctions de base globales ϕ_j, $j = 1, \ldots, 6$, sont données par:

$$
\phi_1 = \begin{cases} \theta_1^1, & x \in K_1 \\ 0, & x \in K_2 \end{cases} \qquad
\phi_2 = \begin{cases} \theta_2^1, & x \in K_1 \\ \theta_1^2, & x \in K_2 \end{cases} \qquad
\phi_3 = \begin{cases} 0, & x \in K_1 \\ \theta_2^2, & x \in K_2 \end{cases}
$$

$$
\phi_4 = \begin{cases} \theta_3^1, & x \in K_1 \\ 0, & x \in K_2 \end{cases} \qquad
\phi_5 = \begin{cases} \theta_4^1, & x \in K_1 \\ \theta_3^2, & x \in K_2 \end{cases} \qquad
\phi_6 = \begin{cases} 0, & x \in K_1 \\ \theta_4^2, & x \in K_2 \end{cases}
$$

Remarquer que les fonctions de forme $\theta_i^1(x)$ et $\theta_i^2(x)$, $i = 3, 4$, ont besoin d'être normalisées (par le Jacobien) afin d'assurer la continuité de la dérivée au point $x = 2$ (en particulier pour ϕ_5).