Département de Mathématiques et de Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2021

Devoir 1 — 100 points

Distribué le 2021/09/14 — À remettre le 2021/09/26

Question 1 (Dérivées au sens des distributions) :

Soit la fonction $f : \Omega = (0, 2) \to \mathbb{R}$ définie telle que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \forall x \in (0, 1) \\ x - 1, & \forall x \in [1, 2) \end{cases}$$

Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f (au sens des distributions).

Question 2 (Quadrature de Gauss) :

Soit $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ un polynôme arbitraire de degré 3.

a) Trouver les points de Gauss $x_{i,g}$ et les poids $\omega_{i,g}$, $i = 1, 2$, tels que la quadrature de Gauss intègre exactement le polynôme $p(x)$, i.e.

$$\int_{-1}^{+1} p(x)dx = \sum_{i=1}^{2} \omega_{i,g}p(x_{i,g}),$$

indépendamment des valeurs des coefficients a_i, $i = 0, \dots, 3$.

b) Déterminer le nombre de points de Gauss nécessaires pour intégrer exactement un polynôme de degré n.

Question 3 (Espaces de Hilbert) :

On considère la classe de fonctions $f(x) = x^\alpha$ définies sur $\Omega = (0, 1)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Identifier toutes les valeurs de α pour lesquelles $f \in L^2(\Omega)$.
b) Identifier toutes les valeurs de α pour lesquelles $f \in H^1(\Omega)$.
c) Identifier toutes les valeurs de α pour lesquelles $f \in C(\overline{\Omega})$ (espace des fonctions continues sur l'intervalle fermé $\overline{\Omega} = [0, 1]$).
d) Est-ce que toute fonction continue et polynomiale par morceaux sur $[0, 1]$ appartient-elle nécessairement à $H^1(\Omega)$? Est-ce que les fonctions discontinues et polynomiales par morceaux sont-elles dans $H^1(\Omega)$? dans $L^2(\Omega)$? Justifier vos réponses.
e) Est-ce que la trace de la dérivée de la fonction $f(x) = x^{3/4}$ est-elle définie en $x = 0$? Expliquer.

Question 4 (Théorème de Poincaré) :

Le théorème de Poincaré est un résultat très utile de l'analyse fonctionnelle. Une version simplifiée du théorème s'énonce comme suit:

Soient $\Omega = (0, \ell)$ un domaine ouvert de $\mathbb{R}$ et u une fonction arbitraire de $H^1(\Omega)$ telle que la trace de u en 0 s'annule, i.e. $u(0) = 0$. Alors, il existe une constante C_p strictement positive et indépendante de u telle que:

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p \|u'\|_{L^2}.$$

Noter que cette inégalité peut également s'écrire en utilisant la seminorme de H^1 comme

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p |u|_{H^1}.$$

Démontrer le théorème ci-dessus et donner l'expression de C_p en fonction de ℓ.

Pour le démontrer, if faut remarquer que:

$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(\xi) d\xi, \qquad \forall x \in \Omega,$$

utiliser Cauchy-Schwarz sur cette dernière intégrale, trouver une borne supérieure à $|u(x)|$ en fonction de $|u|_{H^1}$ pour tout $x \in \Omega$, et finalement estimer la norme L^2 de u.

Question 5 (Seminorme) :

Soit l'espace de functions $V = \{v \in H^1(\Omega) : \ v(0) = 0\}$ où $\Omega = (0, 1)$. Montrer que la seminorme $|v|_{H^1} = \|v'\|_{L^2}$ définit une norme sur V. Pour cela, il suffit de montrer que $|v|_{H^1}$ et $\|v\|_{H^1}$ sont équivalentes sur V, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes C_l et C_u strictement positives telles que :

$$C_l \|v\|_{H^1} \leq |v|_{H^1} \leq C_u \|v\|_{H^1}, \qquad \forall v \in V.$$

Question 6 (Formulation faible) :

Soit le problème de conditions aux limites suivant :

$$\begin{aligned} -(\sqrt{1+x}u')' + 2u &= x^{-1/4}, &\qquad \forall x \in \Omega = (0,1), \\ u' &= 3, &\qquad \text{à } x = 0, \\ \sqrt{2}u' + 4u &= 5, &\qquad \text{à } x = 1. \end{aligned}$$

Donner une formulation faible associée au problème fort ci-dessus pour laquelle la forme bilinéaire est symétrique.

Question 7 (Fonction analytique) :

Est-ce que la fonction f de $\Omega = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x(1-x)}\right) = e^{-(x-x^2)^{-1}}$$

est une fonction analytique? Expliquer.

SOLUTIONS

<u>Question 1 (20 points) :</u>

Soit $\Omega = (0, 2)$. On cherche f' telle que :

$$\int_0^2 f'\varphi dx = -\int_0^2 f\varphi' dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On a donc :

$$-\int_0^2 f\varphi' dx = -\int_0^1 \big(1-x\big)\varphi' dx - \int_1^2 \big(x-1\big)\varphi' dx.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$-\int_0^1 \big(1-x\big)\varphi' dx = \int_0^1 \big(-1\big)\varphi dx - \big(1-x\big)\varphi(x)\big|_0^{1^-} = \int_0^1 \big(-1\big)\varphi dx + \varphi(0),$$
$$-\int_1^2 \big(x-1\big)\varphi' dx = \int_1^2 \big(+1\big)\varphi dx - \big(x-1\big)\varphi(x)\big|_{1^+}^2 = \int_1^2 \big(+1\big)\varphi dx + \varphi(2).$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2) = 0$, et donc :

$$\int_0^2 f'\varphi dx = \int_0^1 \big(-1\big)\varphi dx + \int_1^2 \big(+1\big)\varphi dx,$$

soit :

$$\int_0^1 \big(f'+1\big)\varphi dx + \int_1^2 \big(f'-1\big)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En utilisant le lemme fondamental du calcul variationnel, la dérivée première de f au sens des distributions est alors donnée par :

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -1, & \forall x \in (0,1) \\ +1, & \forall x \in (1,2) \end{cases}}$$

On procède de la même manière pour la dérivée seconde, c'est-à-dire que l'on cherche f'' telle que :

$$\int_0^2 f''\varphi dx = \int_0^2 (f')'\varphi dx = -\int_0^2 f'\varphi' dx = -\int_0^1 \big(-1\big)\varphi' dx - \int_1^2 \big(+1\big)\varphi' dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En intégrant par parties, on a :

$$-\int_0^2 f'\varphi' dx = \varphi(x)\big|_0^{1^-} - \varphi(x)\big|_{1^+}^2 = \varphi(1^-) + \varphi(1^+) = 2\varphi(1),$$

puisque φ est continue à $x = 1$. Il s'ensuit que :

$$\int_0^2 f''\varphi dx = 2\varphi(1) = \int_0^2 2\delta(x-1)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou

$$\int_0^2 \big(f'' - 2\delta(x-1)\big)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

et le lemme fondamental du calcul variationnel permet de conclure que :

$$\boxed{f''(x) = 2\delta(x-1), \quad \forall x \in \Omega}$$

Question 2 (15 points) :

a) Il suffit de considérer les fonctions $q(x) = 1$, x, x^2, et x^3 et de calculer (x_1, ω_1) et (x_2, ω_2) tels que :

$$\int_{-1}^{+1} q(x)dx = \omega_1 q(x_1) + \omega_2 q(x_2),$$

pour l'ensemble de ces fonctions. On obtient donc le système d'équations nonlinéaires :

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 \\ 0 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \\ \dfrac{2}{3} = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 \\ 0 = \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 \end{cases}$$

La solution de ce système est donnée par :

$$x_2 = -x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \omega_2 = \omega_1 = 1,$$

soit :

$$\boxed{\begin{aligned} (x_1, \omega_1) &= \left(-1/\sqrt{3}, 1\right) \\ (x_2, \omega_2) &= \left(+1/\sqrt{3}, 1\right) \end{aligned}}$$

b) L'exercice ci-dessus nous apprend que k points de Gauss permettent d'intégrer exactement des polynômes de degré $n = 2k - 1$. Pour intégrer exactement un polynôme de degré n, le nombre minimal de points de Gauss k à utiliser vaut :

$$\boxed{k = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{n+2}{2}, & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}}$$

Question 3 (20 points) :

Soit $f(x) = x^\alpha$ sur $\Omega = (0, 1)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Il suffit de calculer la norme L2 de f et d'observer que celle-ci prendre une valeur finie pour $\alpha > -1/2$. Donc $f \in L^2(\Omega)$ pour $\alpha > -1/2$.
b) De même, $f \in H^1(\Omega)$ pour $\alpha > 1/2$ et $\alpha = 0$.
c) $f \in C(\overline{\Omega})$ pour $\alpha \geq 0$.
d) Soit $f(x)$ une fonction continue et polynomiale par morceaux sur $\Omega = [0, 1]$. D'après b), une fonction polynomiale sur un sous-intervalle K de Ω appartient à $H^1(K)$. La continuité de $f(x)$ sur Ω assure que $f \in H^1(\Omega)$ globalement.
Soit $f(x)$ une fonction discontinue et polynomiale par morceaux sur $\Omega = [0, 1]$. La fonction $f(x)$ ne peut être dans $H^1(\Omega)$ car discontinue. D'après a), on sait que toute fonction polynomiale sur un sous-intervalle K de Ω est dans $L^2(K)$. Le fait que $f(x)$ soit discontinue à l'interface des sous-intervalles ne l'empêche pas d'être dans $L^2(\Omega)$ globalement.

e) La dérivée de la fonction $f(x) = x^{3/4}$ est donnée par $f'(x) = 3/4x^{-1/4}$. Puisque $\alpha = -1/4$ se trouve entre $-1/2$ et 0, on en conclut que f' appartient à $L^2(\Omega)$ mais pas à $C(\overline{\Omega})$. On ne peut donc définir la trace de f' à $x = 0$. Noter cependant qu'elle est définie à $x = 1$.

QUESTION 4 (15 POINTS) :

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u(0) = 0$. On a alors par Cauchy-Schwarz :

$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(\xi)d\xi \leq \sqrt{\int_0^x d\xi}\sqrt{\int_0^x (u'(\xi))^2 d\xi} \leq \sqrt{x}|u|_{H^1}, \qquad \forall x \in (0, \ell).$$

Il s'ensuit que :

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^\ell u^2 dx \leq |u|_{H^1}^2 \int_0^\ell x dx = \frac{\ell^2}{2}|u|_{H^1}^2.$$

On a donc :

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p |u|_{H^1}, \qquad \text{avec } C_p = \frac{\ell}{\sqrt{2}}.$$

On observe que la constante C_p ne dépend que de la taille ℓ du domaine.

On conclut du théorème de Poincaré que la norme L^2 d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u(0) = 0$ est contrôlée par la norme L^2 de sa dérivée.

QUESTION 5 (10 POINTS) :

Soit $v \in V$, alors d'après le théorème de Poincaré, il existe une constante $C_p > 0$ telle que :

$$\|v\|_{L^2} \leq C_p |v|_{H^1}.$$

On a alors, par définition de la norme H^1 :

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + |v|_{H^1}^2 \leq C_p^2 |v|_{H^1}^2 + |v|_{H^1}^2 = (1 + C_p^2)|v|_{H^1}^2,$$

soit :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + C_p^2}}\|v\|_{H^1} \leq |v|_{H^1},$$

ce qui montre la première inégalité avec $C_l = 1/\sqrt{1 + C_p^2}$.

La deuxième inégalité est triviale puisque pour tout $v \in H^1(\Omega) \supset V$, on a :

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + |v|_{H^1}^2 \geq |v|_{H^1}^2,$$

soit

$$|v|_{H^1} \leq \|v\|_{H^1}.$$

On a donc montré la deuxième inégalité en prenant $C_u = 1$.

Soit $u \in V$. Si $|u|_{H^1} = 0$, en en déduit en utilisant la première inégalité que $\|u\|_{H^1} = 0$. De la définition d'une norme, on en conclut que nécessairement $u = 0$ et donc que la seminorme H^1 est en fait une norme sur V.

Question 6 (15 points) :

On multiplie l'équation différentielle par une fonction v suffisamment lisse et on intègre sur le domaine Ω :

$$\int_0^1 -(\sqrt{1+x}u')'v + 2uv\,dx = \int_0^1 x^{-1/4}v\,dx.$$

Après intégration par parties du premier terme, on a :

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}u'v' + 2uv\,dx - \sqrt{2}u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 x^{-1/4}v\,dx.$$

On applique alors les conditions aux limites, $u'(0) = 3$ et $\sqrt{2}u'(1) = -4u(1) + 5$ pour obtenir :

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}u'v' + 2uv\,dx + 4u(1)v(1) = \int_0^1 x^{-1/4}v\,dx - 3v(0) + 5v(1).$$

On remarque que les intégrales et les valeurs de u et v sont toutes bien définies en prenant u et v dans $H^1(\Omega)$. On introduit la forme bilinéaire $B(\cdot,\cdot)$ et forme linéaire $F(\cdot)$ telles que :

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_0^1 \sqrt{1+x}u'v' + 2uv\,dx + 4u(1)v(1), \\ F(v) &= \int_0^1 x^{-1/4}v\,dx - 3v(0) + 5v(1). \end{aligned}$$

On constate que la forme bilinéaire est symétrique comme demandée, c'est-à-dire que $B(u,v) = B(v,u)$, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$, et donc, la formulation faible du problème est donnée par :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que :} \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)}$$

De plus, on remarque que $x^{-1/4} \in L^2(\Omega)$ d'après la question 3a mais que $x^{-1/4} \notin H^1(\Omega)$ d'après la question 3b. On en déduit que $u \in H^2(\Omega)$ mais $u \notin H^3(\Omega)$.

Question 7 (5 points) :

La dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{1-2x}{x^2(1-x)^2}\exp\left(-\frac{1}{x(1-x)}\right).$$

On observe que le terme exponentiel tend vers zéro lorsque x s'approche de 0 ou de 1. Même si le terme en facteur devant l'exponentielle va à l'infini lorsque x tend vers 0 et 1, il le fait moins vite que le terme exponentiel vers zéro. On en déduit que la dérivée de f s'annule en $x = 0$ et $x = 1$. On peut suivre le même raisonnement pour toutes les dérivées d'ordre supérieur. Par consquent,

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(1) = 0, \qquad \forall n = 1, 2, \ldots$$

La fonction f ne peut donc être une fonction analytique, c'est-à-dire

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0.$$