

MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques

Polytechnique Montréal
Automne 2021

Sommaire du cours #5

- Exemple de problème fort en 2D/3D.
- Formulation faible du problème.
- Méthode de Galerkin.
- Espaces éléments finis (cas des éléments simplexes linéaires de Lagrange).
- Assemblage.
- Transformation T_e de l'élément de référence vers les éléments du maillage.
- Calcul des intégrales.
- Quelques éléments finis en 2D :
 - Éléments finis simplexes de Lagrange (P1,P2).
 - Élément fini de Crouzeix-Raviart.
 - Éléments finis tensoriels/quadrangulaires de Lagrange (Q1,Q2).
 - Éléments finis tensoriels/quadrangulaires hiérarchiques.

Opérateur Nabla (∇) et Δ

Définition de l'opérateur ∇ :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$$

Soit u une fonction scalaire :

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \\ \partial_z u \end{bmatrix} = \text{grad } u$$

Soit ϕ une fonction vectorielle ($\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$) :

$$\nabla \cdot \phi = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \partial_x \phi_1 + \partial_y \phi_2 + \partial_z \phi_3 = \text{div } \phi$$

Définition du Laplacien Δ :

$$\nabla \cdot \nabla u = \text{div} (\text{grad } u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

Problème fort en 2D/3D

Problème fort :

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega = \overline{\Gamma_d} \cup \overline{\Gamma_n}$.

On cherche $u = u(x) \in C^2(\Omega)$ telle que :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k \nabla u) + \alpha \cdot \nabla u + cu &= f, & \forall x \in \Omega \\ u &= u_d, & \forall x \in \Gamma_D \\ n \cdot (k \nabla u) + \beta u &= g, & \forall x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

$k = k(x)$: fonction tensorielle d'ordre 2 (matrice)

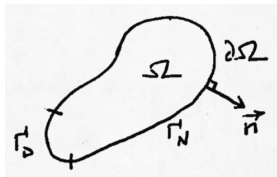
$\alpha = \alpha(x)$: fonction vectorielle définie sur Ω

$c = c(x)$, $f = f(x)$: fonctions scalaires sur Ω

$u_d = u_d(x)$: fonction scalaire définie sur Γ_d

$\beta = \beta(x)$, $g = g(x)$: fonctions scalaires sur Γ_n

$n = n(x)$: vecteur normal à $\partial\Omega$



Problème fort en 2D/3D

Terme "diffusif" in 2D ($\nabla \cdot (k \nabla u)$) :

$$k \nabla u = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} u_x + k_{12} u_y \\ k_{21} u_x + k_{22} u_y \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot (k \nabla u) = (k_{11} u_x + k_{12} u_y)_x + (k_{21} u_x + k_{22} u_y)_y$$

Cas isotrope ($k_{11} = k_{22} = k = k(x, y)$ et $k_{12} = k_{21} = 0$) :

$$k \nabla u = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k u_x \\ k u_y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot (k \nabla u) = (k u_x)_x + (k u_y)_y$$

Note : Si $k = \text{constante}$, $\nabla \cdot (k \nabla u) = k \nabla \cdot \nabla u = k \Delta u$.

Terme convectif in 2D ($\alpha \cdot \nabla u$) :

$$\alpha \cdot \nabla u = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y$$

Formulation faible

Trouver $u \in U$ telle que : $B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$

- 1) On multiplie l'équation par une fonction v arbitraire suffisamment lisse et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} -[\nabla \cdot (k\nabla u)]v + [\alpha \cdot \nabla u]v + cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx$$

- 2) On fait une "intégration par partie" du premier terme dans l'intégrale. Soit ϕ une fonction vectorielle et v une fonction scalaire :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi v) &= (\nabla \cdot \phi)v + \phi \cdot \nabla v \\ \Rightarrow -(\nabla \cdot \phi)v &= -\nabla \cdot (\phi v) + \phi \cdot \nabla v \end{aligned}$$

En prenant $\phi = k\nabla u$,

$$-[\nabla \cdot (k\nabla u)]v = k\nabla u \cdot \nabla v - \nabla \cdot [(k\nabla u)v]$$

Formulation faible

Et donc :

$$\int_{\Omega} -[\nabla \cdot (k\nabla u)] v \, dx = \int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot [(k\nabla u)v] \, dx$$

3) On utilise le théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [(k\nabla u)v] \, dx = \int_{\partial\Omega} n \cdot [(k\nabla u)v] \, ds$$

Et on obtient :

$$\int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v + [\alpha \cdot \nabla u] v + cuv \, dx - \int_{\partial\Omega} n \cdot [(k\nabla u)v] \, ds = \int_{\Omega} fv \, dx$$

Formulation faible

4) On applique les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} n \cdot (k\nabla u)v \, ds &= \underbrace{\int_{\Gamma_D} n \cdot (k\nabla u)v \, ds}_{\text{On choisit } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D} + \underbrace{\int_{\Gamma_N} n \cdot (k\nabla u)v \, ds}_{\text{On applique condition de Robin}} \\
 &= \int_{\Gamma_N} (-\beta u + g)v \, ds \\
 &= - \int_{\Gamma_N} \beta uv \, ds + \int_{\Gamma_N} gv \, ds
 \end{aligned}$$

On a alors, pour v telle que $v(x) = 0, \forall x \in \Gamma_D$:

$$\boxed{
 \underbrace{\int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v + [\alpha \cdot \nabla u]v + cuv \, dx + \int_{\Gamma_N} \beta uv \, ds}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} fv \, dx + \int_{\Gamma_N} gv \, ds}_{F(v)}
 }$$

Formulation faible

5) Choix des espaces de fonctions U et V :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d \right\} \\ &= \left\{ u \in L^2(\Omega); \nabla u \in [L^2(\Omega)]^d \right\} \end{aligned}$$

puisque

$$\nabla u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{e}_i \quad \left[\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_2 = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}, \quad \text{en } 2D \right]$$

Produit scalaire et norme dans $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} uv + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{(u, u)_{H^1}} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 + |\nabla u|^2 \, dx}$$

Formulation faible

On peut définir les espaces :

$$U = \{u \in H^1(\Omega); u = u_D, \forall x \in \Gamma_D\}$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0, \forall x \in \Gamma_D\}$$

Trouver $u \in U$ telle que : $B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$

6) Fonction de relèvement :

On choisit $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ telle que $\bar{u} = u_D, \forall x \in \Gamma_D$.

Donc $w = u - \bar{u} \in H^1(\Omega)$ et $w = 0$ sur Γ_D , soit $w \in V$.

On remplace u par $w + \bar{u}$ dans la formulation faible:

Trouver $w \in V$ telle que : $B(w, v) = L(v), \quad \forall v \in V$

avec $L(v) = F(v) - B(\bar{u}, v)$.

Méthode de Galerkin

On suppose que $u_D = 0$:

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que : } B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

On construit un espace vectoriel V^h de dimension finie, $\dim V^h = N$, tel que $V^h = \text{vect}\{\phi_j\}$. Si pour tout $j = 1, \dots, N$, $\phi_j \in H^1(\Omega)$ et $\phi_j(x) = 0, \forall x \in \Gamma_D$, alors $V^h \subset V$. Par Galerkin, le problème devient :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q. } & B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V^h \\ \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q. } & B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Avec $u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$, on veut :

$$\text{Trouver } u_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N, \text{ t.q. } \sum_{j=1}^N \underbrace{B(\phi_j, \phi_i)}_{K_{ij}} \underbrace{u_j}_{U_j} = \underbrace{F(\phi_i)}_{F_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$KU = F$$

Maillage

$$\Omega_h = \cup K_e \neq \bar{\Omega}$$

N_v = nombre de points

N_e = nombre d'éléments

$xcoord(ni, d)$, $ni = 1, \dots, N_v$

$type(e)$

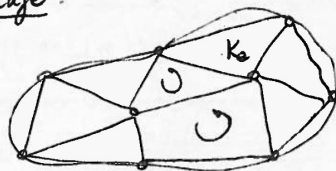
$connect(e, i)$, $e = 1, \dots, N_e$

$$h_K = diam(K) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

$$h = \max_K h_K$$

+ conditions aux limites

Maillage :



Les points d'un élément K_e sont numérotés par convention dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Élément simplexe linéaire de Lagrange (\widehat{K} , \widehat{P} , $\widehat{\Sigma}$)

- Simplexe :**

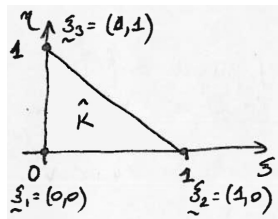
Plus simple objet convexe en dimension d défini par $d + 1$ points.

En 2D: $d = 2$, donc 3 points, un simplexe est un **triangle**.

En 3D: $d = 3$, donc 4 points, un simplexe est un **tétraèdre**.

Élément \widehat{K} de référence en 2D :

$$\widehat{K} = \{ \xi = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; \xi \geq 0, \eta \geq 0, \xi + \eta \leq 1 \}$$



- Linéaire :** degré des polynômes = 1

$$\widehat{P} = \mathbb{P}_1(\widehat{K}) = \{ p(\xi) = a + b\xi + c\eta; \forall a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim \widehat{P} = 3$$

Élément simplexe linéaire de Lagrange (\widehat{K} , \widehat{P} , $\widehat{\Sigma}$)

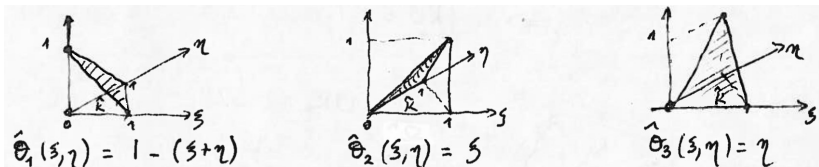
- Lagrange** : fait référence au choix des degrés de liberté.

$$\widehat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}, \quad \text{t.q. pour } p \in \widehat{P}, \quad \hat{\sigma}_i(p) = p(\xi_i), \quad i = 1, 2, 3$$

Les points ξ_i , $i = 1, 2, 3$, sont appelés les noeuds.

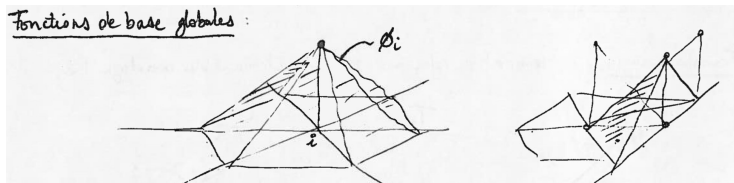
Les **fonctions de forme** sont les fonctions $\hat{\theta}_j(\xi) = a_j + b_j\xi + c_j\eta$ t.q. :

$$\hat{\sigma}_i(\hat{\theta}_j) = \delta_{ij}$$



$$\forall p \in \widehat{P} = \mathbb{P}_1(\widehat{K}), \quad p(\xi) = \sum_{j=1}^3 \hat{\sigma}_j(p) \hat{\theta}_j(\xi)$$

Fonctions de base globales



Soient \mathbf{x}_i les points du maillage, les fonctions de base globale satisfont la relation :

$$\phi_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij}$$

Cela signifie que $\sigma_i(\phi_j) = \phi_j(\mathbf{x}_i)$, soit $\sigma_i(u_h) = u_h(\mathbf{x}_i) = u_i$. On a donc :

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \sigma_j(u_h) \phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(\mathbf{x})$$

Assemblage des matrices et vecteurs

Équation simplifiée :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ t.q. } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx + \int_{\Gamma_N} gv \, ds, \quad \forall v \in V$$

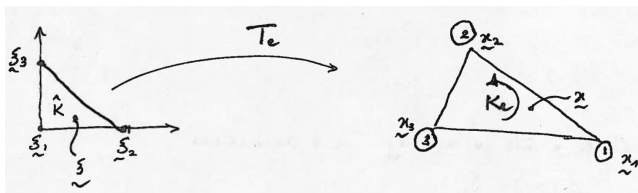
où $V = \{v \in H^1(\Omega); v(x) = 0, \forall x \in \Gamma_D\}$.

Construction élément par élément :

$$\left. \begin{aligned} B_{kl}^e &= \int_{K_e} \nabla \theta_l \cdot \nabla \theta_k + c\theta_l \theta_k \, dx \\ F_k^e &= \int_{K_e} f\theta_k \, dx + \int_{\partial K_e \cap \Gamma_N} g\theta_k \, ds \end{aligned} \right\} \quad k, l = 1, 2, 3$$

On note :

$$\nabla \theta_l \cdot \nabla \theta_k = \frac{\partial \theta_l}{\partial x} \frac{\partial \theta_k}{\partial x} + \frac{\partial \theta_l}{\partial y} \frac{\partial \theta_k}{\partial y}$$

Transformation T_e 

$$\mathbf{x} = T_e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \hat{\theta}_i(\boldsymbol{\xi})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} (1 - \xi - \eta) + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \eta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{bmatrix} \eta$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

Transformation T_e

Matrice Jacobienne de T_e :

$$J = \frac{\partial T_e}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

Jacobien de T_e :

$$|J| = \det J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \geq 0$$

Le Jacobien de T_e mesure le ratio d'un volume dans l'espace (x, y) et du volume correspondant par T_e dans l'espace (ξ, η) .

On a donc :

$$dx dy = |J| d\xi d\eta$$

ou simplement :

$$dx = |J| d\xi$$

Dérivées

$$\hat{\theta}_k(\boldsymbol{\xi}) = \theta_k(T_e(\boldsymbol{\xi}))$$

Dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} &= \frac{\partial \theta_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} &= \frac{\partial \theta_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_k}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_k}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_k}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial y} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Matrice de passage

La matrice de passage permet d'obtenir les dérivées des fonctions de forme définies sur un élément physique à partir des dérivées des fonctions de forme définies sur l'élément de référence :

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = (\mathbf{J}^{-1})^T = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

On a :

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(+ \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial y} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(- \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$$

Calcul des intégrales

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_{K_e} \nabla \theta_l \cdot \nabla \theta_k + c(\mathbf{x}) \theta_l(\mathbf{x}) \theta_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\hat{K}} \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \left(+ \frac{\partial \hat{\theta}_l}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{\theta}_l}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right) \left(+ \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right) |\mathbf{J}| \, d\xi \\
 &+ \int_{\hat{K}} \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \left(- \frac{\partial \hat{\theta}_l}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\theta}_l}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) \left(- \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) |\mathbf{J}| \, d\xi \\
 &+ \int_{\hat{K}} c(T_e(\boldsymbol{\xi})) \hat{\theta}_l(\boldsymbol{\xi}) \hat{\theta}_k(\boldsymbol{\xi}) |\mathbf{J}| \, d\xi \\
 \\
 & \bullet \int_{K_e} f(\mathbf{x}) \theta_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} f(T_e(\boldsymbol{\xi})) \hat{\theta}_k(\boldsymbol{\xi}) |\mathbf{J}| \, d\xi
 \end{aligned}$$

Remarques :

- L'intégration sur \hat{K} se fait par des quadratures de Gauss.
- Les intégrandes de certaines intégrales sont en $1/|\mathbf{J}| \Rightarrow$ Il faut $|\mathbf{J}| \neq 0$.

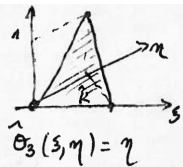
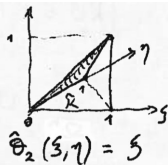
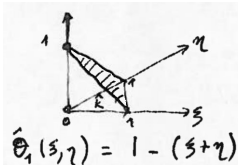
Élément simplexe linéaire de Lagrange (\hat{K} , \hat{P} , $\hat{\Sigma}$)

Remarque : Les éléments finis simplexes linéaires sont souvent appelés les éléments P1.

- \hat{K} = Simplexe (**triangle**) = $\{\xi = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; \xi \geq 0, \eta \geq 0, \xi + \eta \leq 1\}$
- $\hat{P} = \mathbb{P}_1(\hat{K}) = \{p(\xi) = a + b\xi + c\eta; \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\dim \hat{P} = 3$.
- $\hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}$, t.q. pour $p \in \hat{P}$, $\hat{\sigma}_i(p) = p(\xi_i)$, $i = 1, 2, 3$

Les **fonctions de forme** sont les fonctions $\hat{\theta}_j(\xi) = a_j + b_j\xi + c_j\eta$ t.q. :

$$\hat{\sigma}_i(\hat{\theta}_j) = \delta_{ij}$$



Élément simplexe quadratique de Lagrange (\widehat{K} , \widehat{P} , $\widehat{\Sigma}$)

Cas où :

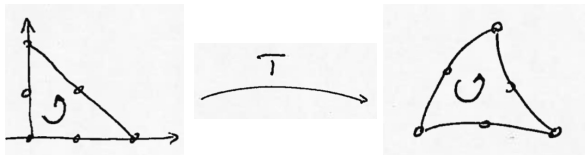
$$\widehat{P} = \mathbb{P}_2(\widehat{K}) = \{p(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta; \forall a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 6\}$$

On parle ici d'éléments finis P2.

Puisque $\dim \mathbb{P}_2(\widehat{K}) = 6$, on doit définir 6 degrés de liberté.

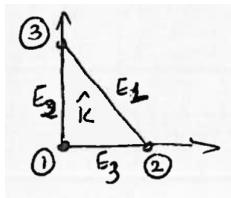
Éléments isoparamétriques :

Même vecteur space P pour la représentation de la transformation T_e et celle de la fonction u_h sur chaque élément.



Élément de Crouzeix-Raviart en 2D

- \hat{K} = simplexe.
- $\hat{P} = \mathbb{P}_1(\hat{K})$.
- Degrés de liberté :



Soit $p \in \mathbb{P}_1(\hat{K})$

$$\hat{\sigma}_i(p) = \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} p ds = \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} a + b\xi + c\eta ds$$

pour $i = 1, 2, 3$.

1er degré de liberté : Paramétrisation du segment E_1

$$(\xi, \eta) = (1 - t, t), \forall t \in [0, 1] \Rightarrow ds = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} dt = \sqrt{2} dt$$

$$\hat{\sigma}_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (a + b(1 - t) + ct) \sqrt{2} dt = at - \frac{b}{2}(1 - t)^2 + \frac{c}{2}t \Big|_0^1$$

Élément de Crouzeix-Raviart en 2D

1er degré de liberté :

$$\hat{\sigma}_1(\mathbf{p}) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$$

2nd degré de liberté :

$$\hat{\sigma}_2(\mathbf{p}) = \int_0^1 (a + c\eta) d\eta = a + \frac{c}{2}$$

3e degré de liberté :

$$\hat{\sigma}_3(\mathbf{p}) = \int_0^1 (a + b\xi) d\xi = a + \frac{b}{2}$$

Élément de Crouzeix-Raviart en 2D

On cherche les trois fonctions de forme $\hat{\theta}_j(\xi, \eta)$ telles que $\hat{\sigma}_i(\hat{\theta}_j) = \delta_{ij}$.

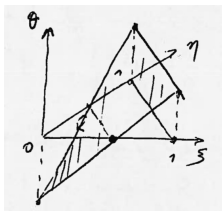
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution du système ci-dessus donne :

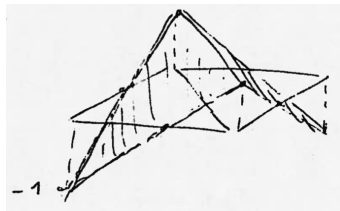
$$\hat{\theta}_1(\xi, \eta) = 1 - 2(\xi + \eta)$$

$$\hat{\theta}_2(\xi, \eta) = 1 - 2\xi$$

$$\hat{\theta}_3(\xi, \eta) = 1 - 2\eta$$



Fonction de forme $\hat{\theta}_1$



Fonction de base globale

Éléments finis tensoriels

- Élément \hat{K} de référence en 2D :

$$\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

- Espace vectoriel \hat{P} :

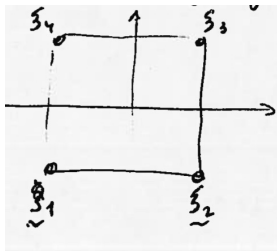
$$\hat{P} = \mathbb{Q}_k(\hat{K})$$

$$\mathbb{Q}_1(\hat{K}) = \{(a + b\xi) \times (c + d\eta); \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim \mathbb{Q}_1(\hat{K}) = 4$$

- Degrés de liberté :

$$\sigma_i(p) = p(\xi_i)$$



Éléments finis tensoriels

Fonctions de forme :

$$\hat{\theta}_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$$

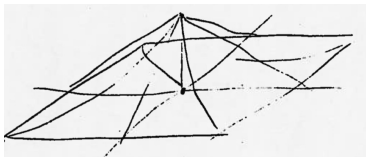
$$\hat{\theta}_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4$$

$$\hat{\theta}_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4$$

$$\hat{\theta}_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4$$

Les fonctions de forme peuvent être obtenues à partir des fonctions de formes 1D définies sur l'intervalle $[-1, 1]$, e.g. $(1 - \xi)/2$ et $(1 + \xi)/2$ d'une part, et $(1 - \eta)/2$ et $(1 + \eta)/2$ d'autre part.

Fonctions de base globales :



Éléments finis tensoriels

Éléments hiérarchiques :

En 1D, on avait :

$$\hat{\theta}_1(\xi) = (1 - \xi)/2$$

$$\hat{\theta}_2(\xi) = (1 + \xi)/2$$

$$\hat{\theta}_1(\xi) = (1 - \xi^2)$$

Par extension, on a en 2D :

$$\hat{\theta}_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \quad \hat{\theta}_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2$$

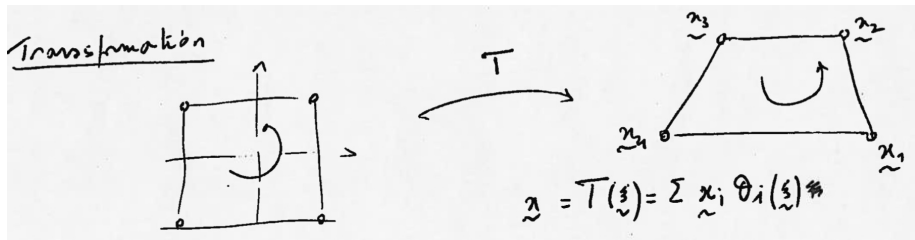
$$\hat{\theta}_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \quad \hat{\theta}_6 = (1 + \xi)(1 - \eta^2)/2$$

$$\hat{\theta}_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \quad \hat{\theta}_7 = (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2$$

$$\hat{\theta}_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \quad \hat{\theta}_8 = (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2$$

$$\hat{\theta}_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

Transformation pour Quads



Remarque :

Les éléments doivent être convexes. Autrement, il existe des points dans l'élément pour lesquels le Jacobien de la transformation T_e s'annule.

Résumé du cours

- La méthode des éléments finis en 2D/3D suit la même approche qu'en 1D mais les calculs sont bien sûr plus complexes.
- On veut éviter d'avoir des éléments triangulaires aplatis pour que $|J|$ ne tende vers zéro.
- Large variété d'éléments finis (K, P, Σ) en 2D, davantage en 3D!
Voir e.g. la table périodique des éléments finis.