MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques

Polytechnique Montréal
Automne 2021

Sommaire du cours #4

- Définition d'un élément fini en 1D
- Exemples d'éléments finis en 1D
- Construction des fonctions de base globales
- Matrices de connectivité
- Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur chargement.
- Application des conditions de Dirichlet.

Définition d'un élément fini

Définition: Un élément fini est un triplet $\{K, P, \Sigma\}$ tel que :

1/ K est un intervalle (en 1D) fermé non vide de $\mathbb{R}$.
Par exemple, $\widehat{K} = [-1, +1]$, $K_e = [x_{i-1}, x_i]$, etc.

2/ P est une espace vectoriel de fonctions polynomiales $p: \; K \to \mathbb{R}$ de dimension finie n. Par exemple, $P = \mathbb{P}_1(K)$, $n = \dim \mathbb{P}_1(K) = 2$.

3/ Σ est un ensemble de n formes linéaires (appelées degrés de liberté) $\sigma_i : P \to \mathbb{R}$ telles que $p \to (\sigma_1(p), \sigma_2(p), \dots, \sigma_n(p))$ soit bijective.

Définition: Les fonctions de forme, $\theta_j : P \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ sont les fonctions de base de P associées à Σ, i.e.

$$\boxed{\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n}$$

$$\boxed{\forall p \in P, \quad p(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(p)\theta_i(x)}$$

Exemple : Élément fini linéaire de Lagrange

1/ $K = [-1, +1]$

2/ $P = \mathbb{P}_1(K)$, $n = \dim \mathbb{P}_1(K) = 2$

3/ Soient $\xi_1 = -1$ et $\xi_2 = +1$ les noeuds. Les degrés de liberté sont donnés par $\sigma_i(p) = p(\xi_i)$, $i = 1, 2$.

On cherche les fonctions de forme $\theta_j \in P$ telles que :

$$\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

Soit $\theta_j(\xi) = a_j + b_j\xi$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sigma_1(\theta_1) &= \theta_1(-1) = a_1 - b_1 = 1 \\ \sigma_2(\theta_1) &= \theta_1(+1) = a_1 + b_1 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(\theta_2) &= \theta_2(-1) = a_2 - b_2 = 0 \\ \sigma_2(\theta_2) &= \theta_2(+1) = a_2 + b_2 = 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple : Élément fini linéaire de Lagrange

On combine les deux systèmes :

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On résout :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \theta_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$$
$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1/2 \\ +1/2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \theta_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

Les fonctions θ_i sont les polynômes de Lagrange de degré 1.

De plus :

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \sigma_1(p)\theta_1(\xi) + \sigma_2(p)\theta_2(\xi) \\ &= p(-1)\theta_1(\xi) + p(+1)\theta_2(\xi) \\ &= C_1\theta_1(\xi) + C_2\theta_2(\xi), \quad \forall p \in \mathbb{P}_1(K) \end{aligned}$$

Exemple : Élément fini quadratique de Lagrange

1/ $K = [-1, +1]$

2/ $P = \mathbb{P}_2(K)$, $n = \dim \mathbb{P}_2(K) = 3$

3/ Soient $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = +1$, et $\xi_3 = 0$, les noeuds. Les degrés de liberté sont donnés par $\sigma_i(p) = p(\xi_i)$, $i = 1, 2, 3$.

On cherche les fonctions de forme $\theta_j \in P$ telles que :

$$\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Soit $\theta_j(\xi) = a_j + b_j\xi + c_j\xi^2$. On a donc :

$$\sigma_i(\theta_j) = \theta_j(\xi_i) = a_j + b_j\xi_i + c_j\xi_i^2 = \delta_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple : Élément fini quadratique de Lagrange

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

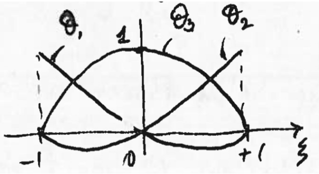
Remarque : Le choix des degrés de liberté doit donner une matrice inversible. Ici, c'est le cas à condition que les noeuds soient distincts les uns des autres. La solution du système donne les polynômes de Lagrange :

$$\boxed{\theta_i(\xi) = \prod_{j=1, j\neq i}^{3} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}}$$

$$\theta_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \times \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$\theta_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \times \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

$$\theta_3(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \times \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} = 1 - \xi^2$$



Exemple : Élément fini quadratique hiérarchique

1/ $K = [-1, +1]$

2/ $P = \mathbb{P}_2(K)$, $n = \dim \mathbb{P}_2(K) = 3$

3/ Soient les noeuds $\xi_1 = -1$ et $\xi_2 = +1$. Les degrés de liberté sont donnés par

$$\begin{aligned} \sigma_1(p) &= p(\xi_1) \\ \sigma_2(p) &= p(\xi_2) \\ \sigma_3(p) &= -\frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} p''(\xi)d\xi \qquad \left(\text{ou } \sigma_3(p) = -\frac{1}{2}p''(0)\right) \end{aligned}$$

Soit $\theta_j(\xi) = a_j + b_j\xi + c_j\xi^2$, on a :

$$\sigma_i(\theta_j) = a_j\sigma_i(1) + b_j\sigma_i(\xi) + c_j\sigma_i(\xi^2) = \delta_{ij}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_1(\theta_j) &= a_j - b_j + c_j \\ \sigma_2(\theta_j) &= a_j + b_j + c_j \\ \sigma_3(\theta_j) &= \qquad\quad - c_j \end{aligned}$$

Exemple : Élément fini quadratique hiérarchique

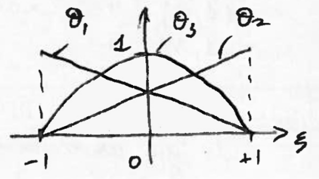
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est non nul et celle-ci est donc inversible :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

soient les fonctions de forme :

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \\ \theta_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} \\ \theta_3(\xi) &= 1-\xi^2 \end{aligned}}$$



Construction des fonctions de base globales

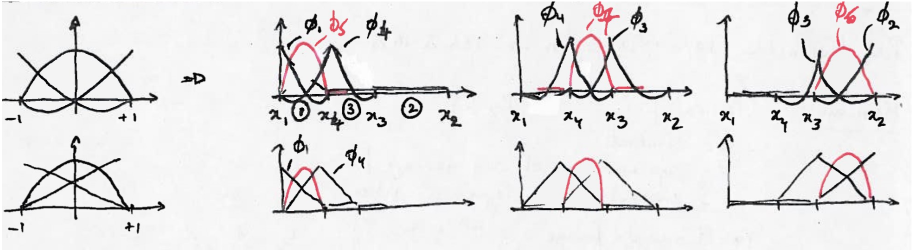
Le choix d'un élément fini de référence permet de construire les fonctions ϕ_j de base globale.

L'élément fini définit les degrés de liberté et donc les fonctions de formes sur chaque élément.

Il faut :

- respecter les contraintes de continuité sur les fonctions de base.
- s'assurer que les fonctions de base qui sont non nulles sur un élément donné du maillage correspondent une à une à toutes les fonctions de forme sur l'élément fini de référence.
- construire les fonctions de base de manière à limiter leur support sur le plus petit nombre d'éléments possible (de sorte à avoir une matrice creuse).

Construction des fonctions de base globales



Remarque : Les degrés de liberté associés aux fonctions de base globale correspondent aux degrés de liberté définis sur l'élément fini de référence.

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(u_h)\phi_j(x)$$

c'est-à-dire, les degrés de liberté globaux σ_j sont déterminés à partir des degrés de liberté locaux.

Matrices de connectivité

Les matrices de connectivité permettent de relier la numérotation locale (sur l'élément de référence) à la numérotation globale des points du maillage et des fonctions de base.

Un maillage est défini par :

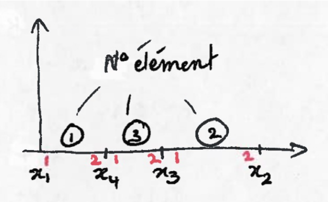
- Le nombre de points : $N_v = 4$
- Le nombre d'éléments : $N_e = 3$
- Les coordonnées des points :

$$\text{xcoord}(ni) = x_{ni}, \quad ni = 1, \ldots, N_v.$$

- La matrice de connectivité :

$$\boxed{\text{connect}(e, i) = ni}$$

- + info sur les frontières ...



$$\text{connect}(1,1) = 1$$
$$\text{connect}(1,2) = 4$$

$$\text{connect}(2,1) = 3$$
$$\text{connect}(2,2) = 2$$

$$\text{connect}(3,1) = 4$$
$$\text{connect}(3,2) = 3$$

Matrices de connectivité

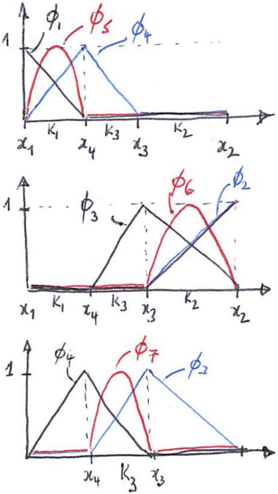
Connect-ddl(e, i) donne pour chaque K_e et chaque fonction de forme θ_i le numéro global de la fonction de base (ou ddl).

Dans le cas d'éléments finis quadratiques :

$$\text{connect-ddl}(1,1) = \text{connect}(1,1) = 1$$
$$\text{connect-ddl}(1,2) = \text{connect}(1,2) = 4$$
$$\text{connect-ddl}(1,3) = 5$$

$$\text{connect-ddl}(2,1) = \text{connect}(2,1) = 3$$
$$\text{connect-ddl}(2,2) = \text{connect}(2,2) = 2$$
$$\text{connect-ddl}(2,3) = 6$$

$$\text{connect-ddl}(3,1) = \text{connect}(3,1) = 4$$
$$\text{connect-ddl}(3,2) = \text{connect}(3,2) = 3$$
$$\text{connect-ddl}(3,3) = 7$$



Remarque : le nombre de ddl peut varier d'un élément à l'autre selon le type d'élément fini utilisé pour chaque K_e $\Rightarrow$ nddl(e) = # ddl sur K_e.

Assemblage

Problème abstrait :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in V \text{ telle que : } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

Par Galerkine :

$$\boxed{\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q.} \quad B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N}$$

où

$$V^h = \left\{ v \in C(\Omega);\ v\big|_{K_e} \in \mathbb{P}_k(K_e),\ e = 1, \dots, N_e \right\}$$

Soit $u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j \in V^h$. Trouver u_j, $j = 1, \dots, N$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{N} \underbrace{B(\phi_j, \phi_i)}_{K_{ij}} \underbrace{u_j}_{U_j} = \underbrace{F(\phi_i)}_{F_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{KU = F}$$

Exemple

Problème fort :

$$\boxed{\begin{aligned} -au'' &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u &= u_0, \quad \text{à } x = 0 \\ au' &= g, \quad \text{à } x = 1 \end{aligned}}$$

Formulation faible :

$$B(u,v) = \int_0^1 au'v'\,dx$$

$$F(v) = \int_0^1 fv\,dx + gv(1)$$

$$U = \{u \in H^1(\Omega) : \ u(0) = u_0\}$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \ v(0) = 0\}$$

Matrice de connectivité

Connect-ddl(e, i) = numéro global de ϕ.

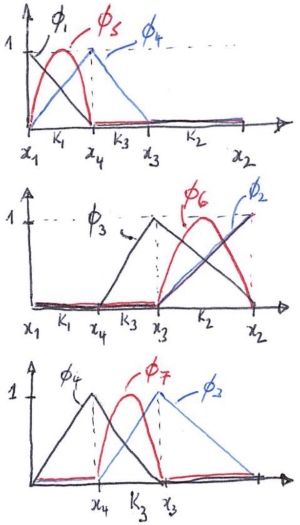
Dans le cas d'éléments finis quadratiques :

$$\text{connect-ddl}(1,1) = \text{connect}(1,1) = 1$$
$$\text{connect-ddl}(1,2) = \text{connect}(1,2) = 4$$
$$\text{connect-ddl}(1,3) = 5$$

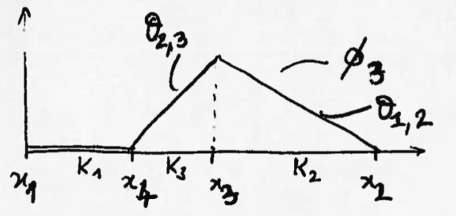
$$\text{connect-ddl}(2,1) = \text{connect}(2,1) = 3$$
$$\text{connect-ddl}(2,2) = \text{connect}(2,2) = 2$$
$$\text{connect-ddl}(2,3) = 6$$

$$\text{connect-ddl}(3,1) = \text{connect}(3,1) = 4$$
$$\text{connect-ddl}(3,2) = \text{connect}(3,2) = 3$$
$$\text{connect-ddl}(3,3) = 7$$

$$\boxed{\text{connect-ddl}(e,i) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}}$$



Calcul du vecteur F



$$\phi_3(x) = \begin{cases} \theta_{2,3}(x), & x \in K_3 \\ \theta_{1,2}(x), & x \in K_2 \end{cases}$$

$$x = T_e(\xi)$$

$$dx = T_e' d\xi = \frac{h_e}{2} d\xi$$

$$\begin{aligned} F(\phi_3) &= \int_0^1 f(x)\,\phi_3(x)\,dx + g\,\overbrace{\phi_3(1)}^{=0} \\ &= \int_{K_2} f(x)\,\theta_{1,2}(x)\,dx + \int_{K_3} f(x)\,\theta_{2,3}(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{+1} f(T_2(\xi))\,\hat{\theta}_1(\xi)\,\frac{h_2}{2} d\xi + \int_{-1}^{+1} f(T_3(\xi))\,\hat{\theta}_2(\xi)\,\frac{h_3}{2} d\xi \\ &\approx \sum_{k=1}^{n_g} \omega_k\, f(T_2(\xi_k))\,\hat{\theta}_1(\xi_k)\,\frac{h_2}{2} + \sum_{k=1}^{n_g} \omega_k\, f(T_3(\xi_k))\,\hat{\theta}_2(\xi_k)\,\frac{h_3}{2} \end{aligned}$$

Assemblage élément par élément

Vecteurs élémentaires :

$$K_1 : \quad \bar{F}_1 = \begin{bmatrix} \int_{K_1} f\theta_{1,1} dx \\ \int_{K_1} f\theta_{2,1} dx \\ \int_{K_1} f\theta_{3,1} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1,1} \\ \bar{F}_{1,2} \\ \bar{F}_{1,3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

$$K_2 : \quad \bar{F}_2 = \begin{bmatrix} \int_{K_2} f\theta_{1,2} dx \\ \int_{K_2} f\theta_{2,2} dx + g \\ \int_{K_2} f\theta_{3,2} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{2,1} \\ \bar{F}_{2,2} \\ \bar{F}_{2,3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

$$K_3 : \quad \bar{F}_3 = \begin{bmatrix} \int_{K_3} f\theta_{1,3} dx \\ \int_{K_3} f\theta_{2,3} dx \\ \int_{K_3} f\theta_{3,3} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{3,1} \\ \bar{F}_{3,2} \\ \bar{F}_{3,3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_4 \\ F_3 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

Vecteur global F (dim $F = 7$) :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1,1} \\ \bar{F}_{2,2} \\ \bar{F}_{2,1} + \bar{F}_{3,2} \\ \bar{F}_{1,2} + \bar{F}_{3,1} \\ \bar{F}_{1,3} \\ \bar{F}_{2,3} \\ \bar{F}_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$\text{connect-ddl}(e, i) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice K

Matrices élémentaires (3×3) :

$$\bar{B}_e = \left[\int_{K_e} a(x) \theta'_{\underbrace{j,e}_{nj}} \theta'_{\underbrace{i,e}_{ni}} dx \right]_{i,j=1,\dots,3}$$

connect-ddl(e, i) = ni
connect-ddl(e, j) = nj

Remarque :
3 matrices 3×3 = 27 entrées

Matrice de rigidité globale (7×7) :

$$K = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ni \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & nj & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \end{array}$$

Remarque :
1 matrice 7×7 = 49 entrées
Donc au moins
$49 - 27 = 22$ entrées nulles

Calcul de la matrice K

On note que :

$$\theta'_{i,e} = \frac{d\theta_{i,e}}{dx} = \frac{d\hat{\theta}_i}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_e}\frac{d\hat{\theta}_i}{d\xi} = \frac{2}{h}\hat{\theta}'_i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{ij} = \int_{K_e} a(x)\, \theta'_{j,e}\, \theta'_{i,e}\, dx &= \int_{\widehat{K}} a(T_e(\xi)) \left[\frac{2}{h_e}\hat{\theta}'_j\right]\left[\frac{2}{h_e}\hat{\theta}'_i\right]\frac{h_e}{2} d\xi \\
&= \int_{-1}^{+1} a(T_e(\xi))\, \hat{\theta}'_j(\xi)\, \hat{\theta}'_i(\xi)\, \frac{2}{h_e} d\xi \\
&\approx \sum_{k=1}^{n_g} \omega_k\, a(T_e(\xi_k))\, \hat{\theta}'_j(\xi_k)\, \hat{\theta}'_i(\xi_k)\, \frac{2}{h_e}
\end{aligned}$$

Rappel (avec $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ = fonctions de forme linéaire):

$$\boxed{x = T_e(\xi) = x_{1,e}\hat{\theta}_1(\xi) + x_{2,e}\hat{\theta}_2(\xi) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{h_e}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_e}}$$

Application des conditions de Dirichlet

Condition de Dirichlet : $u(0) = u_0$

$$\boxed{u_0 = u_h(0) = \sum_{j=1}^{7} u_j \phi_j(0) = u_1 \phi_1(0) = u_1}$$

On remplace 1ère ligne (correspondant ici à ϕ_1) par l'équation $u_1 = u_0$:

$$KU = F \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

Si $B(u, v)$ est symétrique, alors K est symétrique.
Mais nouvelle matrice ci-dessus n'est plus symétrique.

Application des conditions de Dirichlet

On introduit W et $\overline{U}$ tels que :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = W + \overline{U} \qquad (\text{avec } w_1 = 0)$$

Et donc :

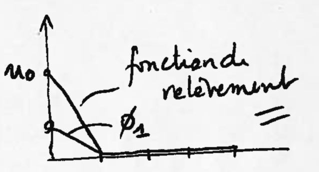
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

Application des conditions de Dirichlet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Find $w \in V$

$$\boxed{B(w, v) = F(v) - B(\bar{u}, v), \quad \forall v \in V}$$



Résumé du cours

- Un élément fini en 1D est un triplet $\{K, P, \Sigma\}$, où K est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, P est un espace vectoriel de fonctions définies sur K, et Σ est un ensemble de degrés de liberté.
- Les degrés de liberté sont des formes linéaires définies sur un espace vectoriel P.
- Les fonctions de base globale ϕ_j se construisent à partir d'éléments finis définis sur une élément de référence.
- Les matrices de connectivité permettent de relier la numérotation locale (sur l'élément de référence) à la numérotation globale sur le maillage.
- Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur chargement à partir des matrices et vecteurs élémentaires et la matrice de connectivité.
- Intégration sur l'élément de référence.
- Approximation des intégrales par la quadrature de Gauss.
- Application des conditions de Dirichlet par post-traitement.