Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I

TD n°3

**Nathanaël Perrin**

Pour le vendredi 24 septembre

### Exercices portant sur les séries entières et les séries de Taylor

1. Déterminer le rayon et l'intervale de convergence pour les séries suivantes :

$$1. \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2. \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n}(2x-1)^n$$

$$3. \ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

2. (a) On sait que la série suivante, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-1)^n$, converge pour $x=-3$ et diverge pour $x=7$. Que sait-on de la convergence des séries suivantes :

$$1. \ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

$$2. \ \sum_{n=0}^{+\infty}(-8)^n c_n$$

$$3. \ \sum_{n=0}^{+\infty}(5)^n c_n$$

   (b) De plus, si la série diverge pour $x=5$, donner le rayon et l'intervalle de convergence de cette série.

3. On suppose que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 2 et que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$ a un rayon de convergence de 3. Quel est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(c_n+d_n)x^n$ ?

4. Soit la fonction suivante : $f(x)=1+2x+x^2+2x^3+x^4+2x^5+x^6+2x^7+...$ (telle que $c_{2n}=1$ et $c_{2n+1}=2$). Donner une représentation en série entière de $f(x)$ et donner son rayon de convergence.

5. Soit $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$.
   (a) Donner la série de Taylor de $f(x)$ autour d'un point $a$ quelconque.
   (b) Déterminer le rayon de convergence de la série trouvée en (a), avec $a$ toujours quelconque.
   (c) Pour calculer $\ln(3)$, donner le plus grand intervalle à l'intérieur duquel $a$ doit se trouver pour calculer $\ln(3)$.

6. $f(x) = \ln(x+1)$.
   (a) Montrer que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, $\forall n \geq 1$
   (b) Donner le polynôme de Taylor de degré 2 de $f$, noté $P_2(x)$, qui approxime $\ln(1+x)$ autour de $a = 0$.
   (c) Donner une borne supérieure $M_n$ sur $|f^{(n+1)}(x)|$ qui soit valable $\forall x \in [0,1]$.
   (d) Donner une borne supérieure pour $|E_n(x)|$ qui soit valable $\forall x \in [0,1]$.
   (e) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(x) = f(x)$
   (f) Quel est le degré de $P_n(x)$ qui assure que $|E_n(x)| < 10^{-2}$ ?

7. Évaluer $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ avec une erreur strictement inférieure à $\frac{1}{2}$.

8. Soit $f$ une fonction telle que : $f(2) = 1$, $f'(2) = 2$, $f''(2) = 3$, $f'''(2) = 4$ et qui de plus vérifie :
   - $-3 < f(x) < 34$
   - $0 < f'(x) < 12$
   - $-8 < f''(x) < 9$
   - $-6 < f'''(x) < 5$

   $\forall x \in [0,4]$.

   (a) Donner le polynôme $T_2(x)$, de degré 2, de $f$ en $a$.
   (b) Utiliser le polynôme $t_2(x)$ pour approximer $f(1)$ puis déterminer une borne sur l'erreur d'approximation.
   (c) Déterminer une borne sur l'erreur d'approximation de $f(x)$ par $T_2(x)$ valide $\forall x \in [0,4]$.

9. Le développement de MacLaurin d'une fonction $f(x)$ est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \times \frac{2x^{2n+1}}{n4^n}$$

   Quelle est la valeur de $f^{(5)}(0)$ ?