# MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

**Serge Prudhomme**

Professeur
Département de mathématiques

Polytechnique Montréal
Automne 2021

# Sommaire du cours #2

- Exemple de formulation faible d'un problème aux conditions aux limites
- Éléments d'analyse fonctionnelle:
  - Intégration
  - Dérivée au sens des distributions
  - Espaces de Hilbert
- Cas général d'une équation différentielle d'ordre 2
- Fonction de relèvement
- Formulation variationnelle

# Formulation faible

Problème fort :

$$\boxed{\begin{aligned} -T\,u'' &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0,\ell) \\ u &= 0, \quad \text{à } x = 0 \\ u' &= 0, \quad \text{à } x = \ell \end{aligned}}$$

Procédure pour obtenir la forme faible d'un problème :

1. Multiplier l'équation par une fonction arbitraire dans $C^\infty(\Omega)$ (function test) :

$$-Tu''v = fv$$

2. Intégrer sur le domaine $\Omega = (0,\ell)$ :

$$\int_0^\ell -Tu''vdx = \int_0^\ell fvdx$$

# Formulation faible

3. Intégrer par partie ($-u''v = u'v' - (u'v)'$) :

$$\int_0^\ell Tu'v'dx - \int_0^\ell T(u'v)'dx = \int_0^\ell fvdx$$

4. Intégrer la deuxième intégrale (en 2D/3D, on utilise le théorème de la divergence):

$$\int_0^\ell Tu'v'dx - Tu'(\ell)v(\ell) + Tu'(0)v(0) = \int_0^\ell fvdx$$

5. Appliquer les conditions aux limites :

CL de Neumann: $u'(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad Tu'(\ell)v(\ell) = 0$

CL de Dirichlet: On choisit $v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Tu'(0)v(0) = 0$

$$\int_0^\ell Tu'v'dx = \int_0^\ell fvdx, \quad \forall v \in C^\infty(\Omega),\ v(0) = 0$$

# Formulation faible

6. Identification de l'espace $U$ des fonctions admissibles $u$ et de l'espace $V$ des fonctions test $v$ :
   On définit $U$ et $V$ de sorte que les intégrales soient bien définies, i.e.

$$\left| \int_0^\ell Tu'v'dx \right| < \infty, \quad \left| \int_0^\ell fvdx \right| < \infty$$

   et que les fonctions $u$ and $v$ satisfassent $u(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

7. Formulation faible du problème : Soient $T$ et $f$ donnés,

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ telle que } \quad \int_0^\ell Tu'v'dx = \int_0^\ell fvdx, \quad \forall v \in V}$$

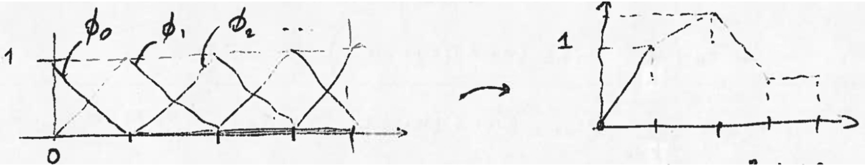
   ou, en introduisant la forme bilinéaire $B(u, v) = \int_0^\ell Tu'v'dx$ et la forme linéaire $F(v) = \int_0^\ell fvdx$,

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ telle que } \quad B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

# Formulation faible

La formulation faible d'un problème fort n'est pas unique :

- Le choix de la formulation dépend surtout du choix des fonctions de base que l'on souhaite considérer pour discrétiser le problème.




- Par exemple, dans le cas de la méthode de Galerkine discontinue, la formulation faible sera différente pour tenir compte de la discontinuité des fonctions à l'interface des éléments.

Le choix de $U$ et $V$ est fait de sorte que le problème soit bien posé (existence et unicité des solutions).

# Intégration

Soit une fonction $u$ définie sur l'interval $\Omega = [0, 1]$.

L'intégrale de $u$ est écrite symboliquement :

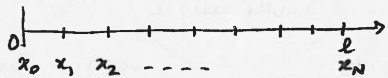
$$\boxed{I = \int_0^1 u \, dx}$$

Si la fonction $u$ est positive pour tout $x \in \Omega$, l'intégrale correspond à l'aire de la région $S$ :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq u(x)\}$$

# Intégration de Riemann

Soit une partition de $\Omega = [0, 1]$ donnée par les points $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, avec $x_0 = 0$ et $x_n = 1$, et soit $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.




$(\ell = 1$ ici$)$

L'intégrale de Riemann de $u$ est définie par :

$$I_R = \lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{i=1}^{n} u(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right]$$

Si la limite existe, on dit que la fonction $u$ est intégrable au sens de Riemann ou, simplement, Riemann-intégrable.

# Intégration de Riemann

Exemple:
La fonction de Dirichlet est une fonction discontinue définie sur $\Omega = [0, 1]$ telle que :

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in \mathbb{Q} \cap \Omega \\ 0, & \forall x \in \mathbb{R} \cap \Omega \end{cases}$$

Soit la partition donnée par les points $x_i = i/n$, $i = 1, \ldots, n$.
Si on choisit $t_i = x_i$, alors $t_i \in \mathbb{Q} \cap \Omega$, et $u(t_i) = 1$, $\forall i$.
On en conclut que la somme $\sum u(x_i)(x_i - x_{i-1})$ est identiquement égale à 1 pout toute valeur de $n$, de sorte que la limite lorsque $n$ tend vers l'infinité est 1.

Par contre, si on choisit $t_i \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, on a $u(t_i) = 0$, et donc $I_R = 0$ (ce qui est la bonne valeur) $\Rightarrow$ ambiguité.

De plus, l'intégration de Riemann ne s'applique pas à des domaines de taille infinie ou à des fonctions non bornées.

# Intégration de Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue étend la notion d'intégrales à une classe plus large de fonctions. Elle étend aussi le type de domaines sur lesquels les fonctions sont définies.

La théorie de l'intégration de Lebesgue repose sur les notions de la théorie des mesures (ensembles mesurables, fonctions mesurables, etc.).

Remarque :
On note que les intégrales de la fonction de Dirichlet $u$ et de la fonction $\bar{u}(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$, sont toutes deux égales à zéro, bien que $u$ et $\bar{u}$ soient différentes sur un ensemble dénombrable de points. En fait, cet ensemble est de mesure zéro. On dit alors que les fonctions $u$ et $\bar{u}$ sont égales presque partout (p.p.) sur $\Omega$.

# Intégration de Lebesgue

Lemme fondamental du calcul variationnel :
Soit $u$ une fonction continue par morceaux définie sur un domaine ouvert $\Omega$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions infiniment différentiables (lisses) sur $\Omega$ et qui s'annulent, comme toutes ses dérivées, sur la frontière de $\Omega$. Si on a :

$$\boxed{\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$$

alors on peut conclure que

$$u(x) = 0, \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

Remarque : Par simplicité, bien que l'on doit comprendre que c'est vrai presque partout (excepté sur un ensemble de points de mesure zéro), on écrira :

$$\boxed{u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega}$$

# Quadratures

On appelle quadratures les méthodes discrètes d'intégration.

- Méthodes du trapèze, de Simpson, etc.
- Degré de précision.
- Ordre de la méthode d'intégration.
- En EF, on utilise en général la quadrature de Gauss :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_{i,g} f(x_{i,g}),$$

où $x_{i,g}$ sont les points de Gauss et $\omega_{i,g}$ sont les poids de Gauss.

# Dérivées au sens des distributions

Soit $u \in C^1(\Omega)$. La dérivée de $u$ au sens classique est définie par :

$$u'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}$$

Peut-on parler de la dérivée d'une fonction continue par morceaux ou de la dérivée d'une fonction discontinue?

Les distributions (ou fonctions généralisées) sont des "objets" mathématiques qui permettent de généraliser la notion classique des fonctions.

Les distributions permettent d'étendre la notion de différentiation aux fonctions pour lesquelles la dérivée au sens classique n'existe pas.

On note cependant que cette dernière, si elle existe, coincide avec la dérivée au sens des distributions.

Exemple : La "fonction" de Dirac.

# Dérivées au sens des distributions

**Définition :**
Soit $u$ une distribution définie sur $\Omega$. La dérivée de $u$ au sens des distributions, dénotée par $u'$, satisfait :

$$\boxed{\int_\Omega u'\varphi dx = -\int_\Omega u\varphi' dx, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$$

**Exemple :**
Soit $u$ la fonction (châpeau) définie par :

$$u(x) = \begin{cases} x, & \forall x \in [0,1) \\ 2-x, & \forall x \in [1,2] \end{cases}$$

Calculer la dérivée première de $u$.

# Dérivées au sens des distributions

On a, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, où $\Omega = [0, 2]$ :

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega u\varphi' dx &= -\int_0^1 x\varphi' dx - \int_1^2 (2-x)\varphi' dx \\
&= \int_0^1 \varphi dx - \Big[x\varphi(x)\Big]_0^1 + \int_1^2 (-\varphi) dx - \Big[(2-x)\varphi(x)\Big|_1^2
\end{aligned}
$$

Puisque $\varphi$ ($u$ aussi ici) s'annule à $x = 0$ et à $x = 2$ :

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega u\varphi' dx &= \int_0^1 \varphi dx - \varphi(1^-) + \int_1^2 (-\varphi) dx + \varphi(1^+) \\
&= \int_0^1 \varphi dx + \int_1^2 (-\varphi) dx + \Big[\varphi(1^+) - \varphi(1^-)\Big]
\end{aligned}
$$

# Dérivées au sens des distributions

Comme $\varphi$ est continue à $x = 1$, $\varphi(1^+) - \varphi(1^-) = 0$, et donc

$$\boxed{-\int_\Omega u\varphi' dx = \int_0^1 \varphi dx + \int_1^2 (-\varphi) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$$

Comme on veut :

$$\int_\Omega u'\varphi dx = \int_0^1 u'\varphi dx + \int_1^2 u'\varphi dx = -\int_\Omega u\varphi' dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

on obtient :

$$\int_0^1 \left[u' - 1\right]\varphi dx + \int_1^2 \left[u' + 1\right]\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{u'(x) = \begin{cases} +1, & \forall x \in [0,1) \\ -1, & \forall x \in [1,2] \end{cases}}$$

# Espaces vectoriels

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble $V$ tel que:

$$\forall u, v \in V, \quad u + v \in V$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall v \in V, \quad \alpha u \in V$$

On veut travailler sur un espace vectoriel car on considèrera des solutions de la forme:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i(x)$$

Soit $V$ un espace vectoriel. Si $\phi_i \in V$ et $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, N$, alors $u_h \in V$.

La fonction $u_h$ est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi$.

# Espaces normés

Soit un espace vecteur $V$ sur $\mathbb{R}$, une norme sur $V$ est une fonction scalaire $\|\cdot\| : V \to [0, \infty[$ qui satisfait les propriétés suivantes :

Pout tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $u, v \in V$,

1) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire).
2) $\|av\| = |a|\|v\|$.
3) Si $\|v\| = 0$ alors $v = 0$ (le vecteur nul).

Une seminorme sur $V$ est une fonction $p : V \to [0, \infty[$ qui satisfait seulement les propriétés 1 and 2.

Les normes permettent de fournir une mesure des éléments dans une espace vectoriel. Elles seront en particulier utiles pour mesurer les erreurs dans les approximations EF $u_h$, i.e.

$$\boxed{e = u - u_h}$$

# Espaces de Hilbert (1862-1943)

Les espaces de Hilbert généralisent la notion d'espaces euclidiens. Ils étendent les méthodes de l'algèbre et du calcul vectoriels en 2D et 3D aux espaces de dimension infinie (e.g. **espaces de functions**).

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel possédant une structure induite par un produit scalaire qui permet de mesurer les angles entre vecteurs ainsi que leur taille. De plus, un espace de Hilbert est **complet** (toute suite de Cauchy converge dans l'espace).

Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (plan) :
Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$. Le produit scalaire de $x$ et $y$ est défini par $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$ et satisfait les propriétés suivantes:

1) symétrique: $x \cdot y = y \cdot x$.
2) linéaire par rapports aux arguments: $(ax + by) \cdot z = a\, x \cdot z + b\, y \cdot z$.
3) défini positif: $x \cdot x \geq 0$, $\forall x$, et $x \cdot x = 0$ ssi $x = 0$.

Le produit scalaire induit une norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$

# Espaces de Hilbert

Définition (espace $L^2$) :
Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'espace des fonctions réelles qui sont de carré intégrable au sens de Lebesgue est noté $L^2(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\boxed{(u, v)_{L^2} = \int_\Omega uvdx}$$

La norme induite est alors donnée par :

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{(u, u)_{L^2}} = \sqrt{\int_\Omega u^2 dx}$$

Une fonction $u$ définie sur un domaine ouvert $\Omega$ appartient à $L^2(\Omega)$ si :

$$\boxed{\|u\|_{L^2} < \infty}$$

# Espaces de Hilbert

Définition (espace $H^1$) : Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $u$ une fonction réelle.

$$\boxed{H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ u' \in L^2(\Omega) \right\}}$$

Produit scalaire :

$$\boxed{(u, v)_{H^1} = \int_\Omega uv + u'v'\,dx}$$

Norme :

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{(u,u)_{H^1}} = \sqrt{\int_\Omega u^2 + u'^2\,dx} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2}$$

Seminorme :

$$|u|_{H^1} = \sqrt{\int_\Omega u'^2\,dx} = \|u'\|_{L^2}$$

Si $u =$ constante, $\|u'\|_{L^2} = 0$, mais $u \neq 0$.

# Espaces de Hilbert

Définition (espace $H^2$) : Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $u$ une fonction réelle.

$$\boxed{H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ u' \in L^2(\Omega),\ u'' \in L^2(\Omega) \right\}}$$

Produit scalaire :

$$\boxed{(u, v)_{H^2} = \int_\Omega uv + u'v' + u''v''dx}$$

Norme :

$$\|u\|_{H^2} = \sqrt{(u, u)_{H^2}} = \sqrt{\int_\Omega u^2 + u'^2 + u''^2 dx} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2}$$

Seminorme :

$$|u|_{H^2} = \sqrt{\int_\Omega u''^2 dx} = \|u''\|_{L^2}$$

Si $u =$ linéaire, $\|u''\|_{L^2} = 0$, mais $u \neq 0$.

# Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient deux vecteurs $x$ and $y$ de $\mathbb{R}^n$. On a :

$$|x \cdot y| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

et puisque pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ :

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \leq +1,$$

La quantité $x \cdot y / \|x\| \|y\|$ induit un angle entre les deux vecteurs $x$ et $y$.
Pour les espaces $L^2(\Omega)$ et $H^k(\Omega)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient :

$$\left|(u, v)_{L^2}\right| = \left| \int_\Omega uvdx \right| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$\left|(u, v)_{H^1}\right| = \left| \int_\Omega uv + u'v'dx \right| \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$$\left|(u, v)_{H^2}\right| = \left| \int_\Omega uv + u'v' + u''v''dx \right| \leq \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2}$$

# Trace d'une fonction

Soit une fonction $u$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$.
Que peut-on dire de la fonction sur la frontière de $\Omega$?

Soit $u(x) = x^{-1/4}$ sur $\Omega = (0, 1)$. On peut montrer que $u \in L^2(\Omega)$. On voit que $u(1) = 1$ mais que $u(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0$. Une fonction $u \in L^2(\Omega)$ ne peut a priori être étendue sur la frontière de $\Omega$.

Si $u \in H^1(\Omega)$, on peut montrer que $u \in C(\overline{\Omega})$ (résultat en 1D). Dans ce cas, on peut prolonger $u$ sur la frontière.
L'opérateur de trace $\gamma$ est alors défini comme l'opérateur qui associe à $u$ la limite de $u$ sur la frontière :

$$\gamma u(0) = \lim_{x \to 0} u(x)$$
$$\gamma u(1) = \lim_{x \to 1} u(x)$$

En général, on omet l'opérateur de trace et plutôt que d'écrire $\gamma u(0)$, on écrit simplement $u(0)$.

# Inégalité de Poincaré

Le théorème de Poincaré est un résultat très utile de l'analyse fonctionnelle. Une version simplifiée du théorème s'énonce comme suit:

Soient $\Omega = (0, \ell)$ un domaine ouvert de $\mathbb{R}$ et $u$ une fonction arbitraire de $H^1(\Omega)$ telle que la trace de $u$ à $x = 0$ s'annule, i.e. $u(0) = 0$.
Alors, il existe une constante $C_p$, strictement positive et indépendante de $u$, telle que :

$$\boxed{\|u\|_{L^2} \leq C_p \|u'\|_{L^2}}$$

L'inégalité s'écrit aussi en utilisant la seminorme de $H^1$ :

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p |u|_{H^1}.$$

Point de départ de la démonstration :

$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \Omega$$

# Choix des espaces $U$ et $V$

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ telle que } \quad \int_0^\ell Tu'v'dx = \int_0^\ell fvdx, \quad \forall v \in V}$$

Quels sont les espaces pour lesquels les intégrales sont bien définies?

$$\left| \int_0^\ell Tu'v'dx \right| = T \left| \int_0^\ell u'v'dx \right| \leq T\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq T\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Avec $f = \rho g =$ constante $> 0$,

$$\left| \int_0^\ell fvdx \right| = f \left| \int_0^\ell vdx = f \right| \int_0^\ell 1vdx \Big| \leq f\|1\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq f\sqrt{\ell}\|v\|_{H^1}$$

Si $u$ et $v$ dans $H^1(\Omega)$, les traces de $u$ et $v$ sont aussi bien définies, et donc:

$$\begin{array}{l} U = \{u \in H^1(\Omega) : \; u(0) = 0\} \\ V = \{v \in H^1(\Omega) : \; v(0) = 0\} \end{array} \quad \Rightarrow \quad U = V \text{ ici}$$

# EDO linéaire d'ordre 2

Problème fort :

$$\boxed{\begin{aligned} -(au')' + bu' + cu = f, &\quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u = u_0, &\quad \text{à } x = 0 \quad \text{(Condition de Dirichlet)} \\ au' + \lambda u = g, &\quad \text{à } x = 1 \quad \text{(Condition de Robin)} \end{aligned}}$$

- $a = a(x) > 0$, $b = b(x)$, $c = c(x) \geq 0$ sont des fonctions CPM sur $\overline{\Omega}$.
- $f = f(x)$ est la fonction de chargement.
- $u_0$, $\lambda$, et $g \in \mathbb{R}$.

Remarques :

- Comme $a$, $b$, $c$ sont CPM, il existe $a_{\max}$, $b_{\max}$, et $c_{\max} \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\max |a(x)| \leq a_{\max}, \quad \max |b(x)| \leq b_{\max}, \quad \max |c(x)| \leq c_{\max}$$

- If $\lambda = 0$, la CL de Robin devient une condition de Neumann.

# Formulation faible

- Multiplier l'EDO par $v$ arbitraire et intégrer l'EDO sur $\Omega = (0, 1)$ :

$$\int_0^1 -(au')'v + bu'v + cuv\,dx = \int_0^1 fv\,dx$$

- Intégrer par parties :

$$\int_0^1 au'v' + bu'v + cuv\,dx - au'v|_0^1 = \int_0^1 fv\,dx$$

- Appliquer les conditions aux limites :

$$-au'v|_0^1 = -a(1)u'(1)v(1) + a(0)u'(0)v(0)$$

$\Rightarrow$ CL de Robin à $x = 1$: $-a(1)u'(1) = \lambda u(1) - g$

$\Rightarrow$ CL de Dirichlet à $x = 0$: On choisit $v(0) = 0$

# Formulation faible

- On a donc :

$$\int_0^1 au'v' + bu'v + cuv\,dx + \lambda u(1)v(1) = \int_0^1 fv\,dx + gv(1), \quad \forall v/v(0) = 0$$

- Choix des espaces :

$$\left|\int_0^1 au'v'\,dx\right| \leq a_{\max}\left|\int_0^1 u'v'\,dx\right| \leq a_{\max}\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq a_{\max}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

$$\left|\int_0^1 fv\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$$

On peut donc prendre $f \in L^2(\Omega)$.
Si on choisit $u$ et $v$ dans $H^1(\Omega)$, alors $u(0)$ et $u(1)$ sont bien définies.

$$U = \{u \in H^1(\Omega) : \ u(0) = u_0\}$$
$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \ v(0) = 0\}$$

# Formulation faible

- La formulation faible du problème s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in U \text{ telle que :}\\[4pt] \displaystyle\int_0^1 au'v' + bu'v + cuv\,dx + \lambda u(1)v(1) = \int_0^1 fv\,dx + gv(1), \quad \forall v \in V\end{array}}$$

- On peut introduire la forme bilinéaire $B(\cdot,\cdot)$ et forme linéaire $F(v)$ telles que :

$$B(u,v) = \int_0^1 au'v' + bu'v + cuv\,dx + \lambda u(1)v(1)$$

$$F(v) = \int_0^1 fv\,dx + gv(1)$$

et donc, la formulation faible sous forme abstraite s'écrit :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ t.q. : } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

# Fonction de relèvement

L'espace $U$ n'est pas un espace vectoriel !
En effet, si $u_1$ et $u_2 \in U$, $u_1(0) + u_2(0) = u_0 + u_0 = 2u_0$, donc $u_1 + u_2 \notin U$.

On introduit alors une fonction $\bar{u} \in U$, dite de relèvement, de sorte que :

$$u - \bar{u} \in V, \quad \forall u \in U.$$

Soit $w = u - \bar{u}$, i.e. $u = w + \bar{u}$. On remplace dans la formulation faible :

$$\begin{aligned} B(u, v) = B(w + \bar{u}, v) = B(w, v) + B(\bar{u}, v) = F(v) \\ \Rightarrow B(w, v) = F(v) - B(\bar{u}, v) \equiv L(v) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Trouver } w \in V \text{ t.q. : } \quad B(w, v) = L(v), \quad \forall v \in V}$$

La fonction de relèvement n'est pas unique :

$$\bar{u}(x) = u_0, \quad \bar{u}(x) = u_0(1 - x), \quad \text{etc.}$$

Note: si $\bar{u}(x) = u_0$, $L(v) = \int_0^1 fvdx + gv(1) - \int_0^1 cu_0 vdx - \lambda u_0(1)v(1)$

# Formulation Variationnelle

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ t.q. : } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

Si $B(\cdot,\cdot)$ est :

- symétrique : $B(u,v) = B(v,u), \forall u, v \in U$,
- définie positive : $B(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H^1}, \forall u \in U$, avec $\alpha > 0$,

on peut reformuler le problème comme le problème de minimisation :

$$\boxed{u = \underset{v \in U}{\operatorname{argmin}} \, J(v)} \qquad \text{où } J(v) = \frac{1}{2} B(v,v) - F(v)$$

Les deux problèmes sont équivalents. Le problème de minimisation signifie que l'on cherche $u \in U$ telle que :

$$J(u) \leq J(v), \qquad \forall v \in U$$

On peut écrire $v = u + \delta v$, où $\delta v \in V$ est une variation : $J(u) \leq J(u + \delta v)$.

# Formulation Variationnelle

Pour trouver le minimum, on veut que la dérivée de $J$ en $u$ s'annule pour toute variation $\delta v$.

$$\boxed{\text{Dérivée de Gâteaux :} \qquad J'_u(\delta v) = \lim_{\theta \to 0} \frac{J(u+\theta\delta v) - J(u)}{\theta}}$$

$$\begin{aligned}
&J(u+\theta\delta v) \\
&\quad = \frac{1}{2}B(u+\theta\delta v, u+\theta\delta v) - F(u+\theta\delta v) \\
&\quad = \frac{1}{2}B(u,u) - F(u) + \frac{\theta}{2}[B(u,\delta v) + B(\delta v, u)] - \theta F(\delta v) + \frac{\theta^2}{2}B(\delta v, \delta v) \\
&\quad = J(u) + \theta[B(u,\delta v) - F(\delta v)] + \frac{\theta^2}{2}B(\delta v, \delta v)
\end{aligned}$$

soit :

$$\frac{J(u+\theta\delta v) - J(u)}{\theta} = B(u,\delta v) - F(\delta v) + \frac{\theta}{2}B(\delta v, \delta v)$$

# Formulation Variationnelle

En prenant la limite, on obtient :

$$J'_u(\delta v) = \lim_{\theta \to 0} \frac{J(u + \theta \delta v) - J(u)}{\theta} = B(u, \delta v) - F(\delta v)$$

Puisque $u \in U$ doit satisfaire :

$$J'_u(\delta v) = 0, \quad \forall \delta v \in V \quad \Rightarrow \quad B(u, \delta v) - F(\delta v) = 0, \quad \forall \delta v \in V$$

On retrouve donc la formulation faible :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ t.q. : } \quad B(u, \delta v) = F(\delta v), \quad \forall \delta v \in V}$$

avec :

$$U = \{u \in H^1(\Omega) : \; u(0) = u_0\}$$
$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \; v(0) = 0\}$$

# Résumé du cours

- L'analyse fonctionnelle permet d'établir un cadre théorique rigoureux pour l'analyse de la formulation faible d'un problème. On verra d'ailleurs comment montrer que le problème faible admet une solution unique (existence et unicité $\Rightarrow$ problème bien posé)
- L'ensemble $U = \{u \in H^1(\Omega) : \; u(0) = u_0\}$ n'est pas un espace vectoriel si $u_0 \neq 0$. On utilise une fonction de relèvement pour se ramener à un espace vectoriel.
- On peut formuler un problème sous forme variationnelle si e.g. $B(\cdot, \cdot)$ est symétrique et définie positive. Dans ce cas, les deux problèmes sont équivalents.
- Les conditions de Neumann (ou de Robin) sont aussi appelées des conditions naturelles car elles apparaissent naturellement dans l'équation de la formulation faible. Par contre, les conditions de Dirichlet sont des conditions essentielles car il est essentiel de les spécifier dans l'espace des solutions $U$.