DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS

La méthode de Thomas pour la factorisation des matrices tridiagonales:

- Décomposition LU:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

  En calculant le produit LU et en identifiant les coefficients du résultat avec ceux de la matrice A, on obtient les expressions suivantes pour les coefficients des matrices L et U:

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1} \quad i = 2, 3, ..., n.$$

- La résolution du système linéaire $A\vec{x} = \vec{d}$ revient à résoudre deux systèmes bidiagonaux, $L\vec{y} = \vec{d}$ et $U\vec{x} = \vec{y}$, pour lesquels on a les formules suivantes:

$$L\vec{y} = \vec{d} \Rightarrow y_1 = d_1, \quad y_i = d_i - \beta_i y_{i-1} \quad i = 2, 3, \cdots, n$$

$$U\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\alpha_n} \quad x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, n-2, \cdots, 1.$$