Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

# MTH1115/D : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
# EXAMEN FINAL

29 avril 2022

**Directives** : *Vous avez deux heures et trente minutes pour compléter cet examen. Les calculatrices sont interdites.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

$(\frac{1,5}{20})$ (a) On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - u(x,y) = 0. \tag{1}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver les équations différentielles ordinaires satisfaites par les fonctions $F(x)$et $G(y)$ pour que

$$u(x,y) = F(x)G(y),$$

soit une solution de l'équation aux dérivées partielles (1).

$(\frac{2,5}{20})$ (b) Soit

$$g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{pour} \quad 0 < x < 1, \\ -2+x & \text{pour} \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$$

On désigne par $S_F(x)$ la série de Fourier correspondant au prolongement impair, périodique de période 4 de la fonction $g(x)$. **Sans calculer** les coefficients de $S_F(x)$, donner les valeurs de $S_F(-2)$ et $S_F(127)$. **Justifier vos réponses.**

2. On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1; \\ t-1, & t \ge 1. \end{cases}$$

$(\frac{2}{20})$ (a) Calculer, de deux façons différentes, la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

$(\frac{3,5}{20})$ (b) Trouver, à l'aide des transformées de Laplace, la solution au problème de valeurs initiales

$$y'(t) + y(t) = f(t) - 3\delta(t-2), \quad y(0) = 2$$

et en déduire la valeur de $y(1)$.

3. Soit l'équation différentielle

$$y'' + y' - xy = 0. \tag{2}$$

On cherche des solutions de l'équation différentielle (2) sous la forme de la série autour de $x_0 = 0$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes.

($\frac{2}{20}$) (a) Trouver la relation de récurrence qui relie les coefficients $a_n$ pour $n = 0, 1, 2, \cdots$
**Note : On ne demande pas de trouver une formule explicite pour $a_n$ en fonction de $a_0$ et $a_1$.**

($\frac{1,5}{20}$) (b) Trouver les 2 premiers termes non nuls de chacune des deux solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

4. On considère le problème de diffusion de la chaleur dans une tige métallique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < 30 \quad \text{et} \quad t \geq 0; \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(30,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0; \\ \\ v(x,0) = 25(u_5(x) - u_{10}(x)) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 30, \end{cases} \tag{3}$$

où $u_a(x) = u(x-a)$ est la fonction unité échelon (ou la fonction de Heaviside) au point $a$.

($\frac{1,5}{20}$) (a) On pose

$$v(x,t) = F(x)G(t).$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait au problème de fonctions propres

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ F'(0) = 0 \quad \text{et} \quad F'(30) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

et la fonction $G(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$G'(t) - \lambda G(t) = 0,$$

où $\lambda$ est une constante réelle de séparation.

($\frac{2,5}{20}$) (b) Résoudre le problème de fonctions et de valeurs propres (4).
**On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.**

($\frac{3}{20}$) (c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et (b), trouver la solution du problème (3).

*Les professeurs du cours MTH1115(D)*