n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3,2317
10	5,0210
50	12,7524
100	18,5896
500	43,2834
1000	61,8010
5000	139,9681

Le tableau des valeurs de s_n suggère que les sommes partielles ne tendent pas vers un nombre fini (elles tendent vers $+\infty$) et donc que la série donnée diverge. Pour confirmer ceci, on considère à nouveau la figure 2 qui présente la courbe $y = 1/\sqrt{x}$, mais cette fois-ci on utilise des rectangles dont les sommets sont au-dessus de la courbe.

La base de chaque rectangle est un intervalle de longueur 1. La hauteur est égale à la valeur de la fonction $y = 1/\sqrt{x}$ à l'extrémité gauche de l'intervalle. Par conséquent, la somme des aires de tous les rectangles est

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

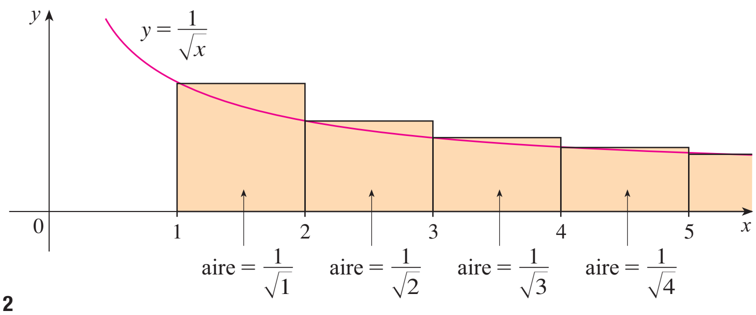

FIGURE 2

Cette aire totale est supérieure à l'aire sous la courbe $y = 1/\sqrt{x}$ pour $x \geq 1$, qui est donnée par l'intégrale $\int_1^{\infty} (1/\sqrt{x})\,dx$. Cette intégrale impropre diverge à l'infini, autrement dit l'aire sous la courbe est infinie. Par conséquent, la somme de la série doit être infinie, c'est-à-dire que la série diverge.

Le même genre de raisonnement géométrique utilisé pour ces deux séries permet de prouver le test suivant.

TEST DE L'INTÉGRALE

Supposons que f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$ et telle que $a_n = f(n)$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente si et seulement si l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ est convergente. Autrement dit,

i) si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ;

ii) si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

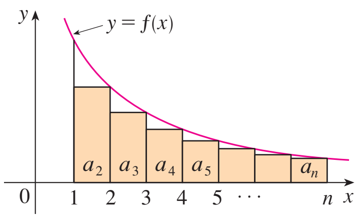

FIGURE 3

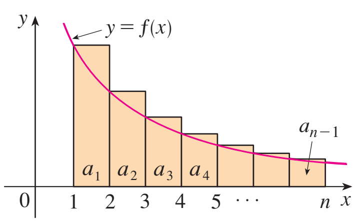

FIGURE 4

DÉMONSTRATION

L'idée fondamentale pour la démonstration du test de l'intégrale est contenue dans les figures 1 et 2 pour les séries $\sum 1/n^2$ et $\sum 1/\sqrt{n}$. Pour une série générale $\sum a_n$, on considère les figures 3 et 4. L'aire du premier rectangle coloré de la figure 3 est la valeur de f à l'extrémité droite de $[1, 2]$, soit $f(2) = a_2$. Par conséquent, en comparant les aires des rectangles colorés avec l'aire sous $y = f(x)$ de 1 à n, on voit que

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx. \qquad \boxed{1}$$

(Cette inégalité découle du fait que f est décroissante.) De même, la figure 4 montre que

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}. \qquad \boxed{2}$$