Table des matières

I Diapositives du cours **5**

1 Algèbre et fonctions **6**

1.1 Ensembles de nombres . . . 7
1.2 Puissances et exposants . . . 10
1.3 Racines et radicaux . . . 12
1.4 Identités remarquables . . . 15
1.5 Multiplication et division algébrique . . . 19
1.5.1 Multiplication de polynômes . . . 19
1.5.2 Division de polynômes . . . 21
1.6 Factorisation des polynômes . . . 23
1.6.1 Techniques de base . . . 23
1.6.2 Factorisation des polynômes de degré 2 . . . 23
1.6.3 Factorisation des polynômes de degré > 2 . . . 25
1.7 Fractions algébriques . . . 26
1.7.1 Simplification . . . 26
1.7.2 Multiplication et division . . . 26
1.7.3 Addition et soustraction . . . 27
1.7.4 Fractions complexes . . . 27
1.8 Résolution d'équations algébriques . . . 28
1.8.1 Rappels . . . 28
1.8.2 Équations quadratiques . . . 28
1.8.3 Équations contenant des radicaux . . . 29
1.8.4 Équations contenant des valeurs absolues . . . 30
1.8.5 Équations fractionnaires . . . 31
1.9 Fonctions . . . 32
1.10 Fonction exponentielle . . . 37
1.10.1 Définition . . . 37
1.10.2 Propriétés . . . 38
1.10.3 Graphe . . . 39
1.11 Fonction logarithmique . . . 40
1.11.1 Définition . . . 40
1.11.2 Propriétés . . . 41
1.11.3 Graphe . . . 42
1.12 Équations exponentielles et logarithmiques . . . 43

2 Trigonométrie **44**
2.1 Trigonométrie . . . 45
2.1.1 Radians et degrés . . . 45
2.1.2 Fonctions trigonométriques . . . 46
2.1.3 Cercle trigonométrique . . . 47
2.1.4 Propriétés des fonctions trigonométriques . . . 49
2.1.5 Angles remarquables . . . 51
2.2 Identités trigonométriques . . . 52
2.3 Graphe des fonctions trigonométriques . . . 54
2.4 Équations trigonométriques . . . 61

3 Dérivées **62**
3.1 Dérivées . . . 63
3.1.1 Limites . . . 63
3.1.2 Continuité . . . 64
3.1.3 Dérivée . . . 65
3.2 Dérivation implicite . . . 68
3.3 Dérivation logarithmique . . . 70
3.4 Applications de la dérivée . . . 71
3.4.1 Tangente au graphe d'une fonction . . . 71
3.4.2 Graphe d'une fonction . . . 71
3.4.3 Optimisation . . . 72

4 Intégrales **74**
4.1 Intégrale indéfinie . . . 75
4.1.1 Intégration par changement de variable . . . 78
4.1.2 Intégration par parties . . . 79
4.2 Intégrale définie . . . 80
4.3 Autres techniques d'intégration . . . 83
4.3.1 Intégration par décomposition en fractions partielles . . . 83
4.3.2 Intégation par substitution trigonométrique . . . 84

5 Vecteurs, matrices et systèmes linéaires **85**
5.1 Vecteurs géométriques . . . 86
5.1.1 Opérations entre les vecteurs . . . 88
5.1.2 Base canonique . . . 90
5.1.3 Produit scalaire . . . 94
5.2 Matrices . . . 95
5.2.1 Opérations sur les matrices . . . 96
5.2.2 Matrice inverse . . . 100
5.2.3 Déterminants . . . 101
5.2.4 Produit vectoriel . . . 105
5.3 Systèmes d'équations linéaires . . . 107
5.3.1 Exemple . . . 107
5.3.2 Systèmes linéaires . . . 108

5.4 Résolution de systèmes linéaires . . . 109
5.4.1 Méthode de la matrice inverse . . . 109
5.4.2 Méthode de Gauss . . . 110
5.4.3 Calcul de l'inverse . . . 113
5.5 Droites et plans dans l'espace . . . 114
5.5.1 Droites . . . 114
5.5.2 Plans . . . 115

II Exercices 116

Exercices série 1 . . . 117
Ensembles de nombres . . . 117
Puissances et exposants . . . 117
Radicaux . . . 118
Exercices série 2 . . . 121
Multiplication et division algébrique . . . 121
Factorisation . . . 123
Exercices série 3 . . . 125
Équations quadratiques . . . 125
Équations se ramenant à un équation quadratique . . . 125
Équations comportant des radicaux . . . 125
Équations comportant des valeurs absolues . . . 125
Équations fractionnaires . . . 126
Problèmes supplémentaires . . . 126
Exercices série 4 . . . 127
Fonctions . . . 127
Fonctions exponentielles et logarithmiques . . . 128
Exercices série 5 . . . 129
Équations exponentielles et logarithmiques . . . 129
Trigonométrie . . . 130
Exercices série 6 . . . 132
Identités trigonométriques . . . 132
Graphe des fonctions trigonométriques . . . 132
Exercices série 7 . . . 134
Équations trigonométriques . . . 134
Dérivées . . . 134
Exercices série 8 . . . 136
Dérivation implicite . . . 136
Dérivation logarithmique . . . 136
Applications de la dérivée . . . 136
Exercices série 9 . . . 137
Changement de variable et intégration par parties . . . 137
Intégrale définie . . . 138
Exercices série 10 . . . 139
Substitution trigonométrique et décomposition en fractions partielles . . . 139
Exercices supplémentaires . . . 139

Exercices série 11 140
Vecteurs géométriques 140
Produit scalaire 141
Exercices série 12 142
Opérations sur les matrices 142
Matrice inverse 142
Déterminant et produit vectoriel 143
Exercices série 13 144
Systèmes linéaires 144
Droites et plans 146

III Réponses aux exercices 147

Réponses série 1 148
Réponses série 2 150
Réponses série 3 153
Réponses série 4 154
Réponses série 5 155
Réponses série 6 156
Réponses série 7 157
Réponses série 8 158
Réponses série 9 160
Réponses série 10 161
Réponses série 11 162
Réponses série 12 163

Première partie

Diapositives du cours

Chapitre 1

Algèbre et fonctions

Ce chapitre porte sur les manipulations algébriques de base, les fonctions exponentielles et logarithmiques et la résolution d'équations.

1.1 Ensembles de nombres

Définition. On définit les ensembles de nombres suivants :

- Entiers naturels ("nombres à compter") :

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$

On dénote $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

- Entiers relatifs :

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

- Nombres rationnels ("fractions") :

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbf{Z} \right\}.$$

- Nombres réels $\mathbf{R}$.

L'ensemble $\mathbf{R}$ contient tous les nombres rationnels, plus les nombres *irrationnels*, dont l'expansion décimale est infinie et non périodique.

- Nombres complexes :

$$\mathbf{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbf{R}\}$$

où $i = \sqrt{-1}$.

La relation entre ces ensembles est la suivante :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Propriétés

- Pour $\mathbf{R}$ (et ses sous-ensembles $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$) on a :
  - commutativité de l'addition et de la multiplication
  - associativité de l'addition et de la multiplication
  - distributivité de la multiplication sur l'addition.

  Ces propriétés sont encore valides dans $\mathbf{C}$ lorsque l'addition et la multiplication de nombres complexes est définie de façon appropriée (voir mth1101).

- Tous ces ensembles sont infinis, c'est-à-dire qu'ils contiennent un nombre infini d'éléments.

- $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ sont *dénombrables*, c'est-à-dire qu'on peut mettre en correspondance leurs éléments avec ceux de $\mathbf{N}$ (on peut les énumérer systématiquement).

- $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ ne sont pas dénombrables. Il y a "beaucoup plus" de nombres réels que de nombres rationnels.

- Les ensembles $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ sont *discrets*, c'est-à-dire constitués de points *isolés*. Ceci signfie qu'entre deux entiers successifs, il n'existe aucun autre entier.

- Les ensembles $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ ne sont pas discrets car aucun de leurs points n'est isolé. Entre deux réels (rationnels), il existe toujours un autre réel (rationnel).

Intervalles de nombres réels

- Intervalle fermé : $[a, b]$ dénote l'ensemble des nombres réels compris entre a et b, incluant les deux extrémités.

- Intervalles semi-ouverts :
  - $]a, b]$ dénote l'ensemble des nombres réels à la fois strictement supérieurs à a et inférieurs à b.
  - $[a, b[$ dénote l'ensemble des nombres réels à la fois supérieurs à a et strictement inférieurs à b.

- Intervalle ouvert : $]a, b[$ dénote l'ensemble des nombres réels compris strictement entre a et b, excluant les deux extrémités.

- Intervalles semi-infinis :
  - $]-\infty, b]$ dénote l'ensemble des nombres réels inférieurs à b.
  - $[a, \infty[$ dénote l'ensemble des nombres réels supérieurs à a.

- Intervalle infini : $]-\infty, \infty[$ dénote l'ensemble de tous les nombres réels.

Remarques:

1. Si un intervalle de nombres réels contient au moins un entier, il existe nécessairement un plus petit et un plus grand entier dans cet intervalle.
2. Dans un intervalle ouvert de nombre réels, il n'existe *pas* de plus petit ou plus grand rationnel ou réel.

1.2 Puissances et exposants

Définition. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On définit a^n comme étant le produit de a avec lui-même n fois :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

Théorème 1.2.1. Propriétés des exposants.
Soit a, b deux réels non nuls et $m, n \in \mathbf{N}^*$.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Généralisation à $n \in \mathbf{Z}$

- Si $n = 0$ alors on définit $a^0 = 1$.
- Pour $-n < 0$ on définit $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Généralisation aux exposants rationnels

Définition. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On dit que b est une *racine* n^e de a si $b^n = a$.
On dénote ceci par : $b = \sqrt[n]{a}$.

- Si $n \in \mathbf{N}^*$ alors $\dfrac{1}{n} \in \mathbf{Q}$ et on définit

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

- Plus généralement, si $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ on définit

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Propriétés

Les propriétés 1 à 5 des exposants sont encore valides pour des exposants rationnels.

1.3 Racines et radicaux

Examinons plus en détails le calcul avec les radicaux (exposants rationnels).

Définition. L'expression $\sqrt[n]{a}$ est appelée radical ou *racine*.
· n est *l'ordre* du radical.
· a est le *radicand*.

- Si n est pair et

  $a > 0$ alors il y a deux racines n^e de a, dénotées $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$.

  $a = 0$ alors il y a une seule racine n^e de a, qui est égale à 0.

  $a < 0$ alors il n'y a pas de racine réelle de a.

- Si n est impair alors il y a une seule racine n^e réelle de a.

Remarques:

1. Lorsque $n = 2$, $\sqrt[2]{a}$ est appelé *racine carrée* de a et dénotée simplement $\sqrt{a}$.
2. Lorsque $n = 3$, $\sqrt[3]{a}$ est appelée *racine cubique* de a.
3. Si n est pair alors $\sqrt[n]{a}$ dénote la racine *positive* et $-\sqrt[n]{a}$ la racine négative.

   Ainsi, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Théorème 1.3.1. Les propriétés des radicaux découlent de la définition $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ et des propriétés des exposants.

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (si $b \neq 0$).

Opérations sur les radicaux

- Multiplication et division de radicaux.
  1. Radicaux de même ordre :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

  2. Radicaux d'ordres différents : on doit d'abord les transformer en radicaux du même ordre.
- Addition et soustraction de radicaux.

  On peut additionner et soustraire des radicaux ayant le *même ordre* et le *même radicand* seulement.

Simplifications

- Extraction de racine n^e : le radicand ne doit pas contenir de facteur de la forme x^n, où n est l'ordre du radical.

- On met les exposants sous la forme la plus simple possible.

- Rationalisation : habituellement on évite d'écrire une expression comportant un radical au dénominateur.

Pour transformer un dénominateur contenant des radicaux, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par le *conjugé* du dénominateur.

Définition. Le conjugé de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

On a :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.$$

- Élimination de radicaux d'ordre n dans une équation : on peut procéder comme suit :
  1. on isole d'abord un radical puis on élève à la puissance n les deux membres de l'équation obtenue ;
  2. si l'équation contient encore des radicaux, on répète l'opération précédente.

1.4 Identités remarquables

- Forme $(X+a)(X+b)$.

$$(X+a)(X+b) = X^2 + (a+b)X + ab.$$

Cas particuliers :

$$(X+a)^2 = X^2 + 2aX + a^2$$

$$(X-a)^2 = X^2 - 2aX + a^2.$$

- Forme $(X+Y+Z)^2$.

$$(X+Y+Z)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ.$$

- Différence de carrés.

$$X^2 - Y^2 = (X+Y)(X-Y).$$

- Somme et différence de cubes.

$$\begin{aligned} X^3 + Y^3 &= (X+Y)(X^2 - XY + Y^2) \\ X^3 - Y^3 &= (X-Y)(X^2 + XY + Y^2). \end{aligned}$$

• Somme et différence de puissances n^e.
Si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$X^n - Y^n =$$

$$(X-Y)(X^{n-1} + X^{n-2}Y + X^{n-3}Y^2 + \cdots + XY^{n-2} + Y^{n-1}).$$

Si $n \in \mathbf{N}$ et n est impair alors

$$X^n + Y^n =$$

$$(X+Y)(X^{n-1} - X^{n-2}Y + X^{n-3}Y^2 - \cdots - XY^{n-2} + Y^{n-1}).$$

Notons que dans cette dernière formule, le signe des termes du deuxième facteur alternent.

- Formule du binôme.

Définition. Si $n \in \mathbf{N}^*$ alors

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Par convention, $0! = 1$.

Définition. Si $k, n \in \mathbf{N}$, on définit

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On dénote aussi cette quantité par $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Théorème 1.4.1. Si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$(X+Y)^n =$$

$$C_0^n X^n + C_1^n X^{n-1}Y + C_2^n X^{n-2}Y^2 + \cdots + C_{n-1}^n XY^{n-1} + C_n^n Y^n.$$

Remarque: Les coefficients du binôme se calculent efficacement à l'aide du *triangle de Pascal* :

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Chaque nombre est la somme des deux nombres immédiatement au-dessus de lui dans le triangle.

Les coefficients du binôme pour un n donné sont les éléments de la ligne correspondante du triangle.

1.5 Multiplication et division algébrique

Définition.

- Un *monôme* est une expression algébrique constituée d'un produit de constantes et de variables affectées d'un exposant entier et positif.
- Un *polynôme* est une somme de monômes.
  Cas particuliers :
  – un *binôme* est une somme de deux monômes.
  – un *trinôme* est une somme de trois monômes.

1.5.1 Multiplication de polynômes

Multiplication monôme $\times$ monôme.
Pour multiplier un monôme par un monôme

1. on multiplie ensemble les coefficients constants des deux monômes ;
2. on multiplie ensemble les variables correspondantes en utilisant les lois des exposants ;
3. le résultat de la multiplication est le produit des termes obtenus en 1 et 2.

Multiplication monôme $\times$ polynôme.
Pour multiplier un monôme par un polynôme

1. on multiplie chaque terme du polynôme par le monôme en utilisant la procédure précédente ;
2. le résultat de la multiplication est le polynôme obtenu en faisant la somme de tous les termes obtenus en 1.

Multiplication polynôme $\times$ polynôme.
Pour multiplier un polynôme par un polynôme

1. on multiplie successivement le premier polynôme par chaque terme du deuxième en utilisant la procédure précédente ;
2. s'il y a lieu, on regroupe les termes semblables dans la somme de tous les termes obtenus en 1 ;
3. le résultat est la somme 2 ainsi simplifiée.

1.5.2 Division de polynômes

Rappels :
· Dans la division $A \div B$, A est appelé *dividende* et B est appelé *diviseur*.
· Le résultat de la division est appelé *quotient*.

Division monôme ÷ monôme.
Pour diviser un monôme par un monôme

1. on divise ensemble les coefficients constants des deux monômes ;
2. on divise ensemble les variables correspondantes en utilisant les lois des exposants ;
3. le résultat de la division est le produit des termes obtenus en 1 et 2.

Remarque: Pour que le résultat de la division soit encore un monôme, il faut que l'exposant de chaque variable du dividende soit supérieur ou égal à celui de la variable correspondante dans le diviseur.

Division polynôme ÷ monôme.
Pour diviser un polynôme par un monôme

1. on divise successivement chaque terme du polynôme par le monôme en utilisant la procédure précédente ;
2. le résultat de la division est le polynôme obtenu en faisant la somme de tous les termes obtenus en 1.

Division polynôme $\div$ polynôme.
Pour diviser un polynôme par un polynôme

1. on ordonne d'abord le dividende et le diviseur par rapport à la même variable, en ordre décroissant des exposants ;
2. on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur pour obtenir le premier terme du quotient ;
3. on multiplie chaque terme du diviseur par ce premier terme du quotient et on soustrait le résultat du dividende pour obtenir un nouveau dividende ;
4. on répète ensuite les étapes 1, 2, 3 jusqu'à ce que dans le nouveau dividende le degré de la variable choisie en 1 soit strictement inférieur à son degré dans le diviseur ;
5. le résultat de la division est la somme de tous les quotients obtenus à l'étape 2), et le reste s'il y a lieu.

1.6 Factorisation des polynômes

Définition. Le *degré* d'un polynôme est la plus grande valeur des sommes obtenues en additionnant les exposants de chaque monôme constituant le polynôme.

1.6.1 Techniques de base

1. Mettre en évidence un facteur commun.
2. Regrouper les termes semblables.

1.6.2 Factorisation des polynômes de degré 2

Polynôme à une seule variable

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Définition. Une *racine* de P est un nombre réel r tel que $P(r) = 0$.

Théorème 1.6.1. Les racines de P sont

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Définition. La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée *discriminant* de P.

Trois cas sont possibles :

1. Si $b^2 - 4ac > 0$ alors P possède deux racines distinctes données par le théorème 1.6.1. Dans ce cas :
$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$
2. Si $b^2 - 4ac = 0$ alors P possède une seule racine de multiplicité 2 (racine double). Dans ce cas $r_1 = r_2$ et :
$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)^2.$$
3. Si $b^2 - 4ac < 0$ alors P ne possède pas de racine réelle (car $\sqrt{b^2 - 4ac} \notin \mathbf{R}$).

   Dans ce cas le polynôme P est *irréductible*, c'est-à-dire qu'il ne peut être exprimé comme le produit de deux polynômes de degré 1.

Polynôme à plusieurs variables

On peut (dans certains cas) utiliser les identités remarquables

1. $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$.
2. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

1.6.3 Factorisation des polynômes de degré > 2

On peut utiliser :

1. Identités remarquables :
   1. $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$
   2. $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$
   3. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
   4. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.
   5. ... et les autres identités pour $n \geq 3$.

2. Méthode du début du carré (voir exemples du cours).

3. Méthode de la racine évidente pour un polynôme d'une seule variable.

Théorème 1.6.2. Soit $P(x)$ un polynôme de degré n. Si r est une racine de P alors
$$P(x) = (x - r)Q(x)$$
où Q est un polynôme de degré $n - 1$.

Ce théorème montre que si l'on connaît une racine de P alors le problème se réduit à la factorisation d'un polynôme Q de degré strictement inférieur.

1.7 Fractions algébriques

Définition. On appelle *fraction algébrique* une expression de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes.

1.7.1 Simplification

Pour simplifier une fraction algébrique on

1. factorise le numérateur et le dénominateur ;
2. on simplifie les facteurs communs.

1.7.2 Multiplication et division

- Multiplication :
$$\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \times P_2}{Q_1 \times Q_2}.$$
Il est préférable, pour éviter les calculs inutiles, de simplifier les deux fractions avant de faire la multiplication.
- Division :
$$\frac{P_1}{Q_1} \div \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{Q_2}{P_2}.$$

1.7.3 Addition et soustraction

Pour additionner ou soustraire deux fractions algébriques, on doit d'abord les mettre sur le même dénominateur.

Il est préférable, pour éviter les calculs inutiles, de trouver le plus petit dénominateur commun aux deux fractions. Pour ce faire, il faut d'abord factoriser chacun des dénominateurs.

Le plus petit dénominateur commun est alors le produit des facteurs trouvés, chacun affecté de l'exposant le plus élevé présent dans les factorisations.

1.7.4 Fractions complexes

Définition. Une *fraction complexe* est une fraction dont le numérateur et/ou le dénominateur contiennent des fractions.

Pour simplifier une fraction complexe :

1. on exprime le numérateur et le dénominateur comme une seule fraction ;
2. on divise ensuite ces deux fractions en utilisant la procédure de division de fractions algébriques.

1.8 Résolution d'équations algébriques

1.8.1 Rappels

Soit A, B et C des expressions algébriques. Alors

1. $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
2. $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$.
3. $A = B \Leftrightarrow AC = BC$ (avec $C \neq 0$).
4. $x^2 = A \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{A}$ (avec $A \geq 0$).

1.8.2 Équations quadratiques

Solution

La forme générale d'une équation quadratique à une variable est

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Les solutions à cette équation sont

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Remarque: On peut souvent éviter des calculs en faisant une ou plusieurs mise en évidence au lieu d'utiliser la formule générale, tel que vu dans les exemples en classe.

Équations se ramenant à une équation quadratique
L'équation doit être de la forme

$$ax^{2\alpha} + bx^{\alpha} + c = 0$$

où $\alpha \in \mathbf{Q}$.
Dans ce cas, on pose $X = x^{\alpha}$ et l'équation devient

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

qui est quadratique en X.

1.8.3 Équations contenant des radicaux

Si l'équation contient **un seul radical d'ordre** n :
(1) On isole le radical.
(2) On élève à la n les deux membres de l'équation ainsi obtenue.
(3) On résoud l'équation obtenue en (2).

Si l'équation contient **plusieurs radicaux** :
(1) On isole l'un des radicaux et on procède comme dans (1) et (2) du cas précédent pour éliminer ce radical.
(2) Dans l'équation obtenue en (1), on répète l'étape précédente pour éliminer un autre radical.
(3) On continue ainsi jusqu'à ce que tous les radicaux soient éliminés.

Remarque: : Il faut *toujours* vérifier les solutions obtenues car les manipulations algébriques peuvent introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation originale.

1.8.4 Équations contenant des valeurs absolues

Définition. Soit A une quantité algébrique. Alors

$$|\,A\,| = \begin{cases} +A & \text{si } A \geq 0 \\ -A & \text{si } A < 0. \end{cases}$$

Pour résoudre une équation contenant une valeur absolue :

(1) Pour $A \geq 0$, on remplace $|\,A\,|$ par $+A$ et on résoud l'équation ainsi obtenue.

(2) Pour $A < 0$, on remplace $|\,A\,|$ par $-A$ et on résoud l'équation ainsi obtenue.

(3) On vérifie que les solutions trouvées sont valides.

Remarque: Si l'équation contient plus qu'une valeur absolue, il faut examiner tous les cas possibles.

Par exemple, pour deux valeurs absolues $|\,A\,|$ et $|\,B\,|$, il faut résoudre l'équation pour les quatre cas : $A \geq 0$ et $B \geq 0$, $A < 0$ et $B \geq 0$, $A \geq 0$ et $B < 0$, $A < 0$ et $B < 0$.

1.8.5 Équations fractionnaires

Rappel : Une expression de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes, est appelée *fraction algébrique*.

Définition. Une équation contenant des fractions algébriques est appelée *équation fractionnaire*.

Définition. Le *domaine de définition* d'une équation fractionnaire est l'ensemble des valeurs des variables pour lesquelles tous les dénominateurs dans l'équation sont non nuls.

Pour résoudre une équation fractionnaire :

(1) On exprime toutes les fractions algébriques sur un dénominateur commun (le PPCM des dénominateurs est préférable).

(2) On regroupe les termes semblables au numérateur, pour obtenir une seule fraction algébrique.

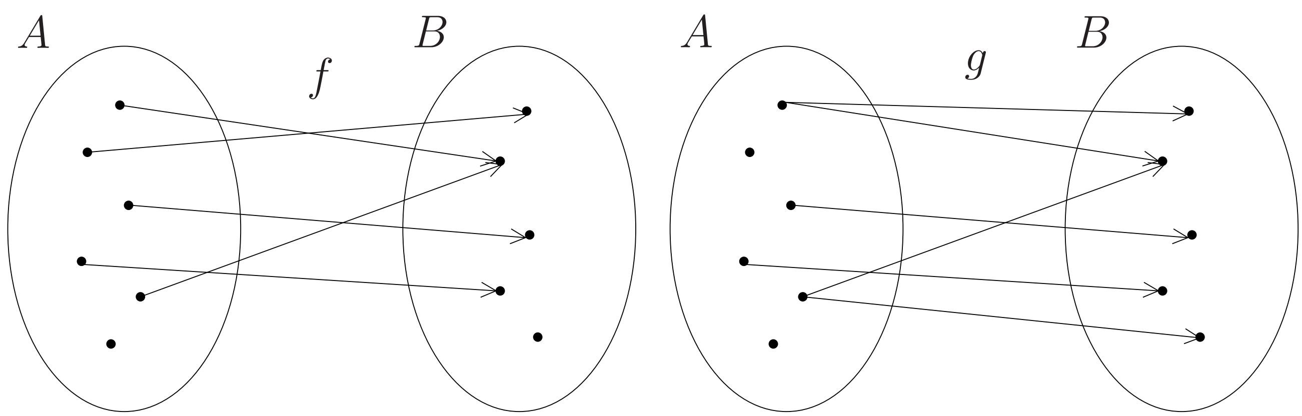
(3) On résoud l'équation polynominale obtenue en égalant à 0 le numérateur de la fraction trouvée en (2).

(4) On ne retient que les solutions trouvées en (3) qui sont dans le domaine de définition de l'équation originale.

1.9 Fonctions

Définition. Une *fonction* d'un ensemble A vers un ensemble B est une règle qui associe à un élément de A un unique élément de B.

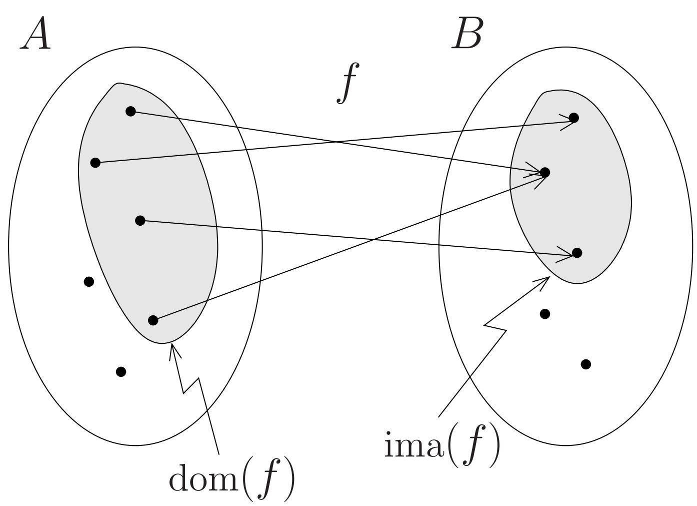
On dénote une fonction par $f : A \to B$ et par $f(x)$ l'élément de B associé à l'élément x de A.



f est une fonction. g n'est *pas* une fonction.

Définition. Soit f une fonction de A vers B.

- Le *domaine* de f, dénoté $\text{dom}(f)$, est l'ensemble des éléments x de A pour lesquels $f(x)$ est défini.
- *L'image* de f, dénoté $\text{ima}(f)$, est l'ensemble des éléments $y \in B$ tels que $y = f(x)$.

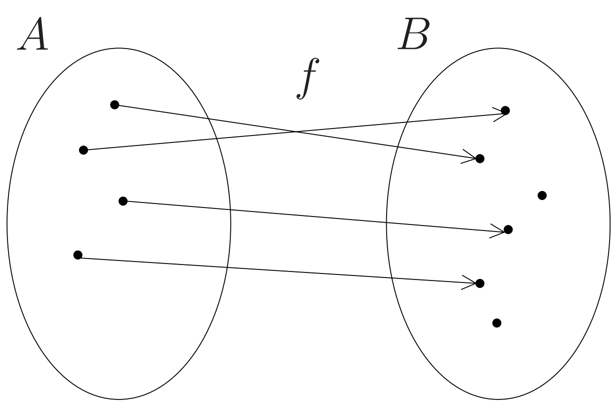


Définition. Soit $f : A \to B$ une fonction. Si $y = f(x)$ alors

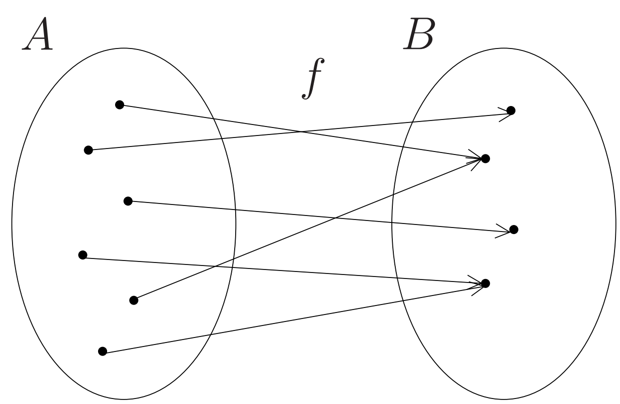
- y est appelé *image* de x par f.
- x est appelé *préimage* de y.

Définition. Soit $f : A \to B$ une fonction. Alors

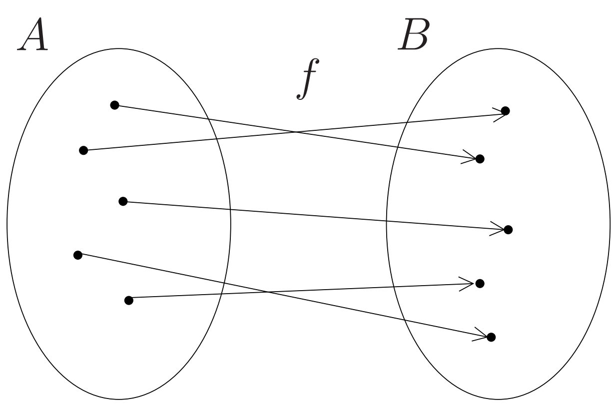
- f est *injective* si chaque $y \in B$ possède **au plus une** préimage.
- f est *surjective* si chaque $y \in B$ possède **au moins une** préimage.
- f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.



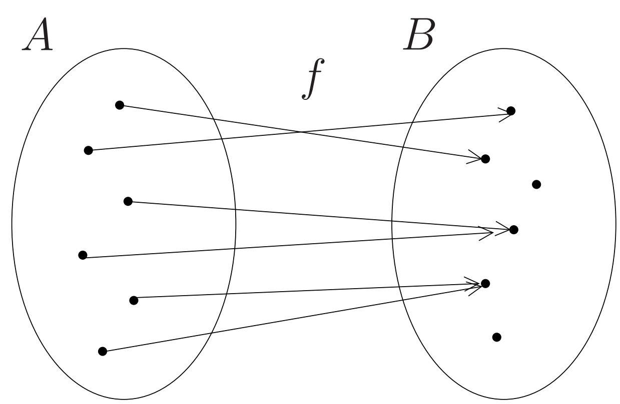
f est injective mais pas surjective.



f est surjective mais pas injective.



f est bijective.



f n'est ni injective ni surjective.

Définition. Soit $f : A \to B$ une fonction injective. Alors *l'inverse* de f, dénoté f^{-1}, est la fonction de B vers A définie par

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y).$$

Une fonction f et son inverse f^{-1} sont liées par les relations :

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}(x)\right) &= x \\ f^{-1}\left(f(x)\right) &= x. \end{aligned}$$

Définition. Le *graphe* d'une fonction $f : A \to B$ est l'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$ avec $x \in \mathrm{dom}(f)$. On représente le graphe d'une fonction d'une seule variable comme une courbe dans le plan.

Remarques:

1. Le graphe d'une fonction intersecte toute droite verticale dans le plan en (au plus) un seul point.
2. Le graphe d'une fonction injective intersecte toute droite horizontale dans le plan en (au plus) un seul point.
3. Le graphe de l'inverse f^{-1} est obtenu par une réflexion du graphe de f à travers la droite $y = x$ dans le plan.

Exemple

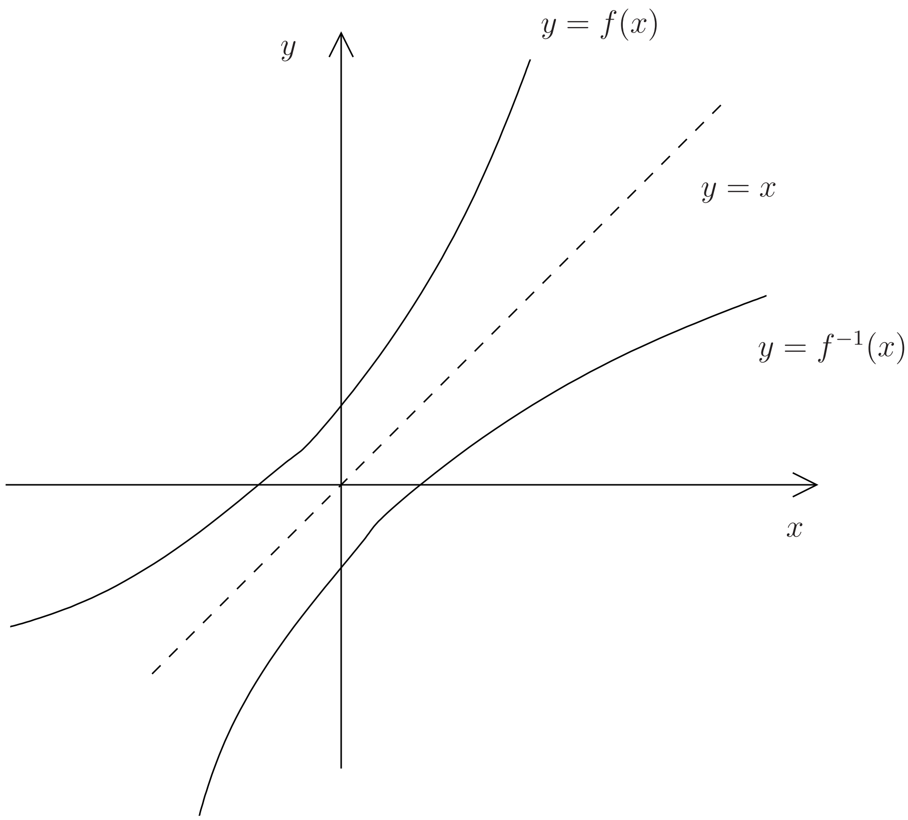


FIGURE 1.1 – Les graphes de f et de son inverse $y = f^{-1}$.

1.10 Fonction exponentielle

1.10.1 Définition

La fonction exponentielle de base b

$$f(x) = b^x$$

généralise les puissances au cas où l'exposant x est un réel quelconque.

Cette fonction peut être définie de différentes façons mais nous ne le ferons pas de façon formelle dans le cours Z050.

Cependant, nous utiliserons la définition suivante :

Définition. Si $b \in \mathbf{R}$, $b > 0$ et x est un réel alors b^x est l'unique nombre réel tel que toutes les lois des exposants sont satisfaites.

La *fonction exponentielle* est définie comme étant la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ qui associe à chaque $x \in \mathbf{R}$ cet unique nombre b^x.

Le nombre réel b est la *base* de l'exponentielle.

Remarque: Il existe une base particulière ("naturelle") qui est très souvent utilisée : $e = 2.718281\ldots$.

Le nombre e peut être défini de différentes façons, que nous ne verrons toutefois pas dans le cours Z050. Notons cependant que ce nombre est irrationnel.

1.10.2 Propriétés

Les propriétés de la fonction exponentielle sont une généralisation des propriétés des exposants.

Théorème 1.10.1. Propriétés de l'exponentielle.
Soit $f(x) = b^x$ avec $b \neq 1$.

1. $f(x)$ est strictement positive pour tout x : $b^x > 0$.
2. f est croissante si $b > 1$ et décroissante si $b < 1$.
3. f est injective : si $b^x = b^y$ alors $x = y$.
4. $f(0) = 1$.
5. Toutes les lois des exposants sont satisfaites
   - $b^{x+y} = b^x b^y$
   - $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$
   - $(b^x)^y = b^{xy}$.
6. $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$ et $\text{ima}(f) = \mathbf{R}_+$.

1.10.3 Graphe

Les graphes de toutes les fonctions exponentielles ont une forme semblable.

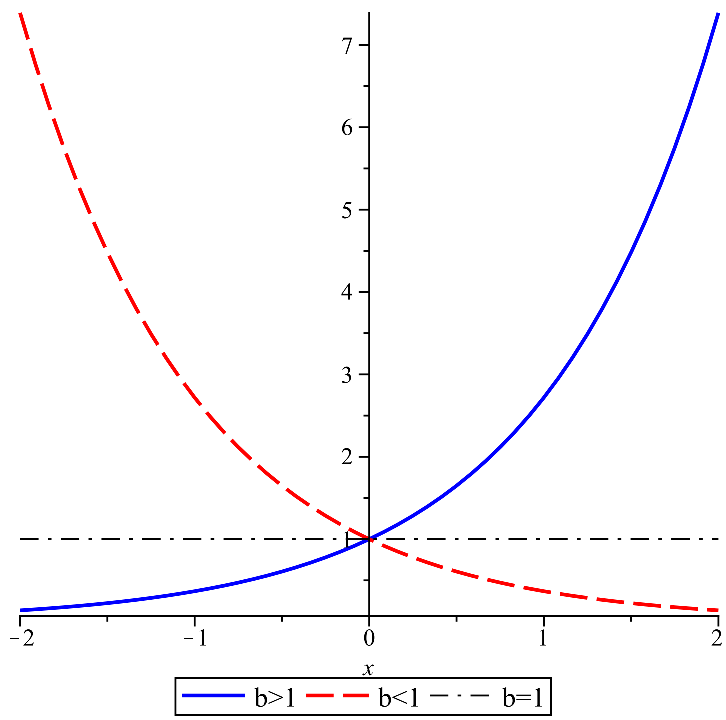


Figure 1.2 – Graphe de $f(x) = b^x$.

1.11 Fonction logarithmique

1.11.1 Définition

Le logarithme est l'inverse de l'exponentielle.

Définition. Soit $b > 0$ un nombre réel différent de 1. Le *logarithme* en base b du nombre réel x est défini par

$$\log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x.$$

Autrement dit, $\log_b(x)$ est l'exposant qu'il faut affecter à b pour obtenir x.

Notation : Il existe deux bases particulières qui sont utilisées très souvent :

- On dénote $\log_{10}(x)$ simplement par $\log(x)$.
- On dénote $\log_e(x)$ par $\ln(x)$.

1.11.2 Propriétés

Soit $f(x) = \log_b(x)$ $(b > 0, b \neq 1)$.

1. $\log_b(1) = 0$.
2. $\log_b(b) = 1$.
3. $\log_b(b^x) = x$.
4. $b^{\log_b(x)} = x$.
5. $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ et $\text{ima}(f) = \mathbf{R}$.
6. f est injective : $\log_b(x) = \log_b(y) \Rightarrow x = y$.
7. Pour tous $x, y > 0$, $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$.
8. Pour tous $x, y > 0$, $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$.
9. Pour tous $\alpha, x \in \mathbf{R}$, $\log_b(x^\alpha) = \alpha \log_b(x)$.

Théorème 1.11.1. Changement de base. On a

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

En particulier

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

1.11.3 Graphe

Les graphes de toutes les fonctions logarithmiques ont une forme semblable.

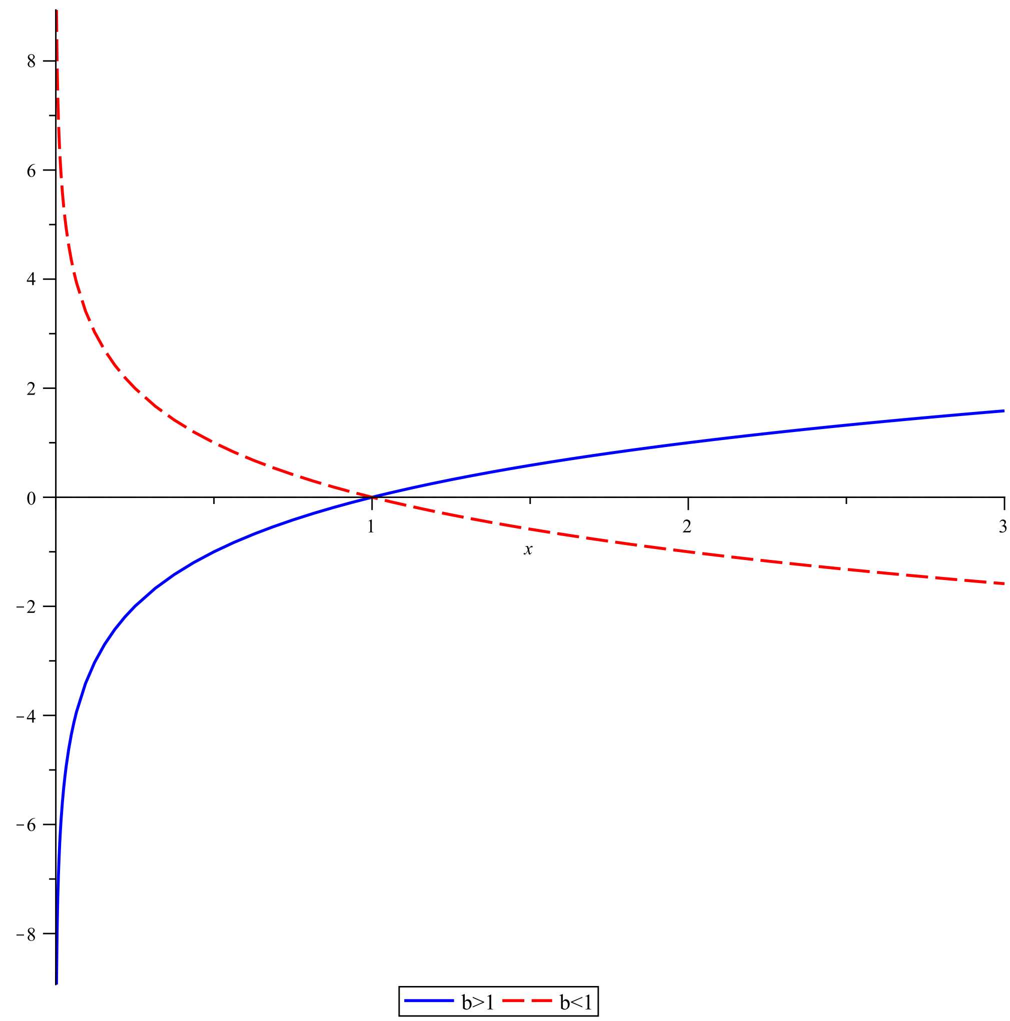


FIGURE 1.3 – Graphe de $f(x) = \log_b(x)$.

1.12 Équations exponentielles et logarithmiques

Équations exponentielles

Pour résoudre une équation contenant des exponentielles

1. on utilise les propriétés de l'exponentielle pour se ramener à une équation de la forme
$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$
2. on prend le logarithme de chaque membre et on utilise les propriétés du logarithme pour obtenir une équation ne contenant plus d'exponentielles ;
3. on résoud, si possible, l'équation trouvée en 1 en isolant la variable x.

Équations logarithmiques

Pour résoudre une équation contenant des logarithmes

1. on utilise les propriétés des logarithmes pour se ramener à une équation de la forme
$$\log_a(f(x)) = \log_a(g(x));$$
2. on prend ensuite l'exponentielle en base a de chaque membre pour obtenir une équation ne contenant plus de logarithmes.
3. on résoud, si possible, l'équation trouvée en 2 en isolant la variable x.

Chapitre 2

Trigonométrie

Ce chapitre porte sur les fonctions et les équations trigonométriques.

2.1 Trigonométrie

2.1.1 Radians et degrés

Définition. Considérons un cercle de rayon r.

- Un *radian* est la mesure d'un angle au centre qui sous-tend un arc de longueur égale à r.

  Si l'angle au centre correspond à tout le cercle alors sa mesure est égale à 2π rad.

- Un *degré* est la mesure d'un angle au centre qui sous-tend un arc de longueur égale à $\dfrac{1}{360^e}$ de la circonférence du cercle.

  Si l'angle au centre correspond à tout le cercle alors sa mesure est égale à $360°$.

Théorème 2.1.1. La relation entre radians et degrés est la suivante :

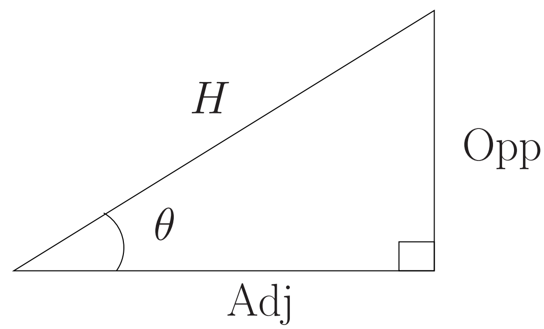
$$1° = \frac{\pi}{180}\text{ rad} \quad \Leftrightarrow \quad 1\text{ rad } = \frac{180°}{\pi}.$$

Définition. On définit aussi les mesures suivantes :

- $1\text{ minute} = \dfrac{1}{60} \times 1°$, noté $1'$;
- $1\text{ seconde} = \dfrac{1}{60} \times 1'$, noté $1''$.

2.1.2 Fonctions trigonométriques

Considérons un triangle rectangle



où H est la mesure de l'hypothénuse, Adj est la mesure du côté adjacent à l'angle θ et Opp est la mesure du côté opposé à l'angle θ.

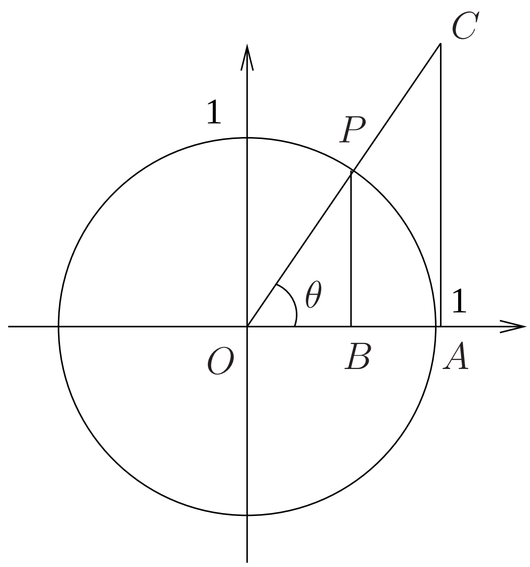
Définition. On définit

1. Le *cosinus* : $\cos(\theta) = \dfrac{\text{Adj}}{\text{H}}$
2. Le *sinus* : $\sin(\theta) = \dfrac{\text{Opp}}{\text{H}}$
3. La *tangente* : $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\text{Opp}}{\text{Adj}}$
4. La *sécante* : $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)} = \dfrac{\text{H}}{\text{Adj}}$
5. La *cosécante* : $\operatorname{cosec}(\theta) = \dfrac{1}{\sin(\theta)} = \dfrac{\text{H}}{\text{Opp}}$
6. La *cotangente* : $\operatorname{cotan}(\theta) = \dfrac{1}{\tan(\theta)} = \dfrac{\text{Adj}}{\text{Opp}}.$

2.1.3 Cercle trigonométrique

Considérons une cercle de rayon 1 centré à l'origine O d'un repère cartésien, appelé *cercle trigonométrique*.

Soit un point $P = (x, y)$ sur le cercle correspondant à un angle au centre $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



- Le segment OP, hypothénuse du triangle OPB a longueur 1 et le segment OB adjacent à l'angle θ dans le ΔOPB a longueur x donc

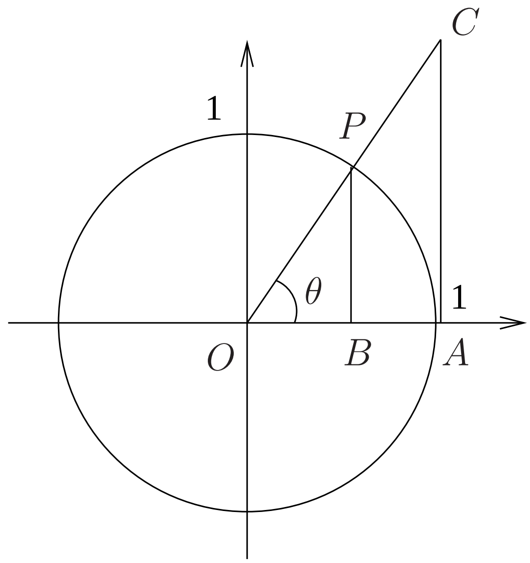
$$\cos(\theta) = \frac{|OB|}{|OP|} = x.$$

  $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point P.

- Le segment PB opposé à θ dans le ΔOPB a longeur y donc

$$\sin(\theta) = \frac{|PB|}{|OP|} = y.$$

  $\sin(\theta)$ est l'ordonnée du point P.



- Soit $A = (1, 0)$ et C l'intersection de la droite OP et de la perpendiculaire à l'axe des x passant par A.

  Puisque ΔOPB et ΔOCA sont semblables, on a

$$\tan(\theta) = \frac{|PB|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|OA|} = |CA|.$$

  En termes des coordonnées de P :

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

2.1.4 Propriétés des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques définies aux sections précédentes associent à un angle $\theta \in \mathbf{R}$ un nombre réel. Ce sont donc des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Théorème 2.1.2. On a :

1. $\operatorname{dom}(\cos) = \mathbf{R}$ et $\operatorname{ima}(\cos) = [-1, 1]$.
2. $\operatorname{dom}(\sin) = \mathbf{R}$ et $\operatorname{ima}(\sin) = [-1, 1]$.
3. $\operatorname{dom}(\tan) = \left\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ et $\operatorname{ima}(\tan) = \mathbf{R}$.

Théorème 2.1.3. Les fonctions sin et cos sont *périodiques* de période 2π (360°), c'est-à-dire que

- $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$ (ou $\cos(\theta^\circ + k \cdot 360^\circ) = \cos(\theta^\circ)$)
- $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$ (ou $\sin(\theta^\circ + k \cdot 360^\circ) = \sin(\theta^\circ)$)

quelque soit $k \in \mathbf{Z}$.

Théorème 2.1.4. La fonction tan est périodique de période π, c'est-à-dire que $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$ (ou $\tan(\theta^\circ + k \cdot 180^\circ) = \tan(\theta^\circ)$) pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Théorème 2.1.5. Signe des fonctions trigonométriques. On a :

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
$]0, \frac{\pi}{2}[$	> 0	> 0	> 0
$]\frac{\pi}{2}, \pi[$	< 0	> 0	< 0
$]\pi, \frac{3\pi}{2}[$	< 0	< 0	> 0
$]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	> 0	< 0	< 0

2.1.5 Angles remarquables

Théorème 2.1.6. Pour les angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ on a :

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	non définie

Remarque: Pour calculer la valeur des fonctions trigonométriques pour des angles remarquables en dehors de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on utilise les identités trigonométriques de la section 2.2 et le tableau ci-dessus.

2.2 Identités trigonométriques

Il existe de nombreuses relations entre les fonctions trigonométriques.

Identités : Pythagore.

1. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2. $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
3. $1 + \mathrm{cotan}^2(x) = \mathrm{cosec}^2(x)$

Identités : paire et impaire.

1. $\sin(-x) = -\sin(x)$
2. $\cos(-x) = \cos(x)$

Identités : périodicité.

1. $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ pour $k \in \mathbf{Z}$
2. $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ pour $k \in \mathbf{Z}$
3. $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$ pour $k \in \mathbf{Z}$

Identités : déphasage.

1. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
2. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
3. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
4. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

Identités : somme et différence d'angles.

1. $\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$
2. $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$

Identités : demi-angle.

1. $\sin^2(A) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2A))$
2. $\cos^2(A) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2A))$

Identités : angle double.

1. $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
2. $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$

Identités : somme à produit.

1. $\sin(A) + \sin(B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
2. $\sin(A) - \sin(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
3. $\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
4. $\cos(A) - \cos(B) = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

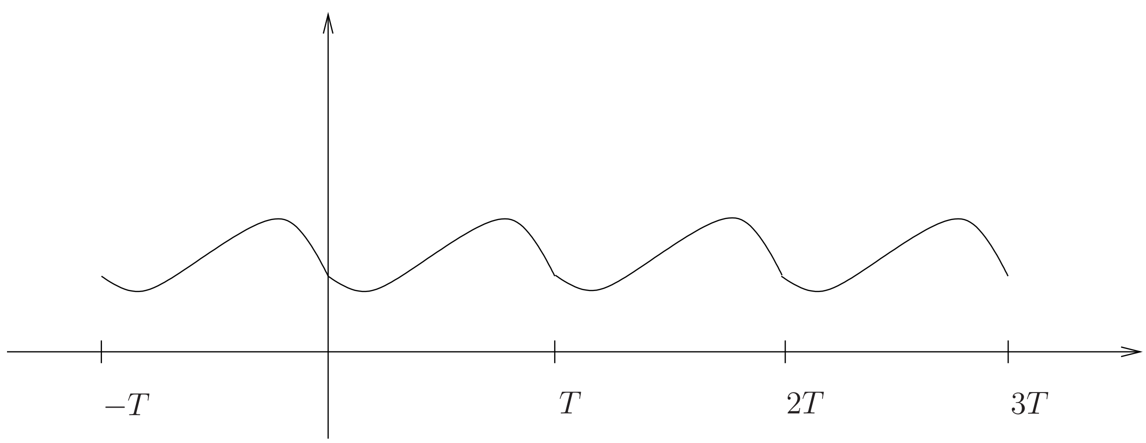
Identités : produit à somme.

1. $\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A - B) - \cos(A + B)\right)$
2. $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A - B) + \cos(A + B)\right)$
3. $\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\sin(A - B) + \sin(A + B)\right)$

2.3 Graphe des fonctions trigonométriques

Définition. Une fonction est dite *périodique* de période T si $f(x+T) = f(x)$ quelque soit x.

Géométriquement, ceci signifie que le graphe de f se répète à intervalles de T :



Définition.

- La *fréquence* d'une fonction de période T est $1/T$.
- Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont *déphasées* de α si $f(x) = g(x+\alpha)$ pour tout x.

Définition. Soit f une fonction et $f_{\text{min}}, f_{\text{max}}$ ses valeurs minimale et maximale respectivement (si elles existent). L'*amplitude* de f est la plus grande valeur de $f(x) - \dfrac{f_{\text{min}} + f_{\text{max}}}{2}$.

Géométriquement, l'amplitude est la plus grande distance entre le graphe de f et la droite passant à mi-chemin des valeurs extrêmes de f.

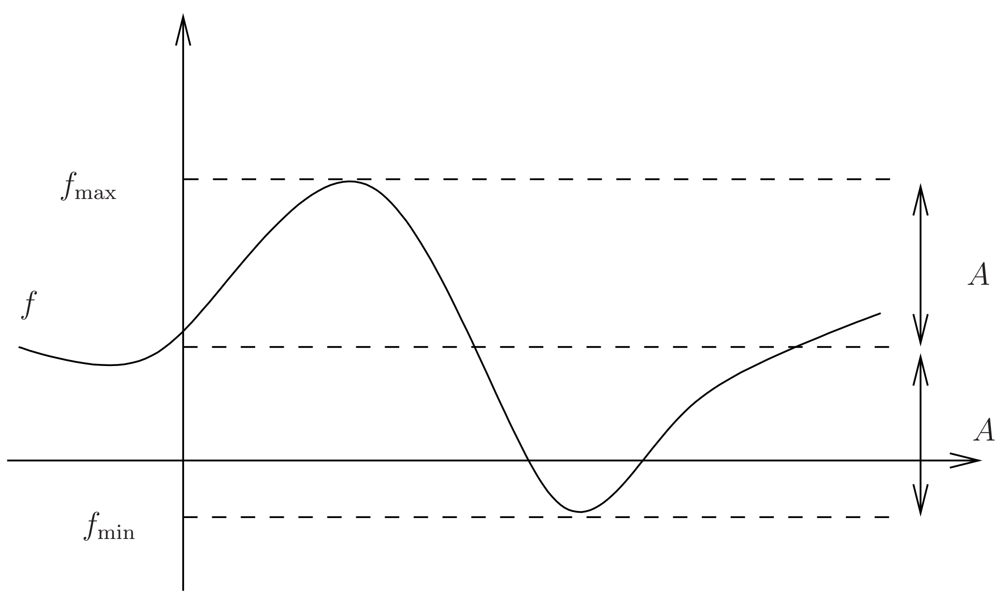
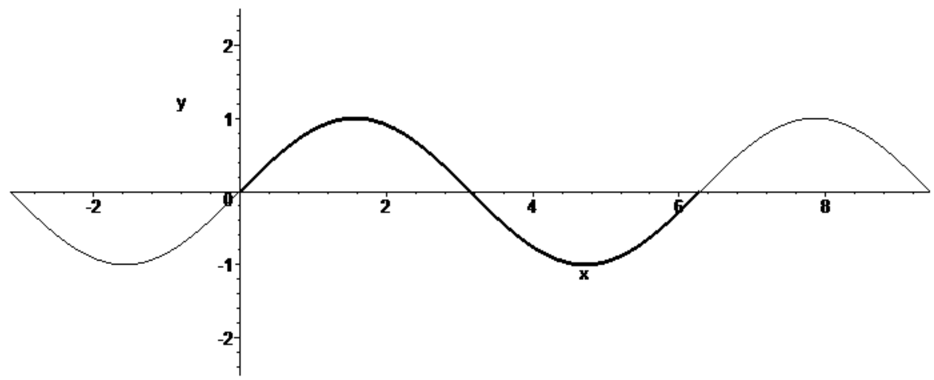
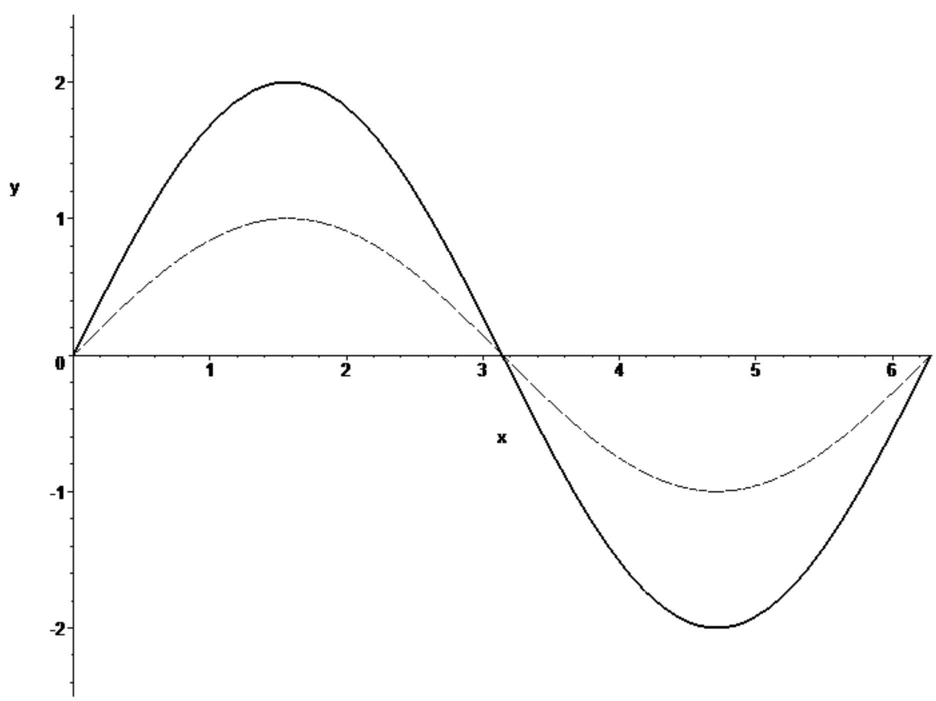


FIGURE 2.1 – L'amplitude de f est A.

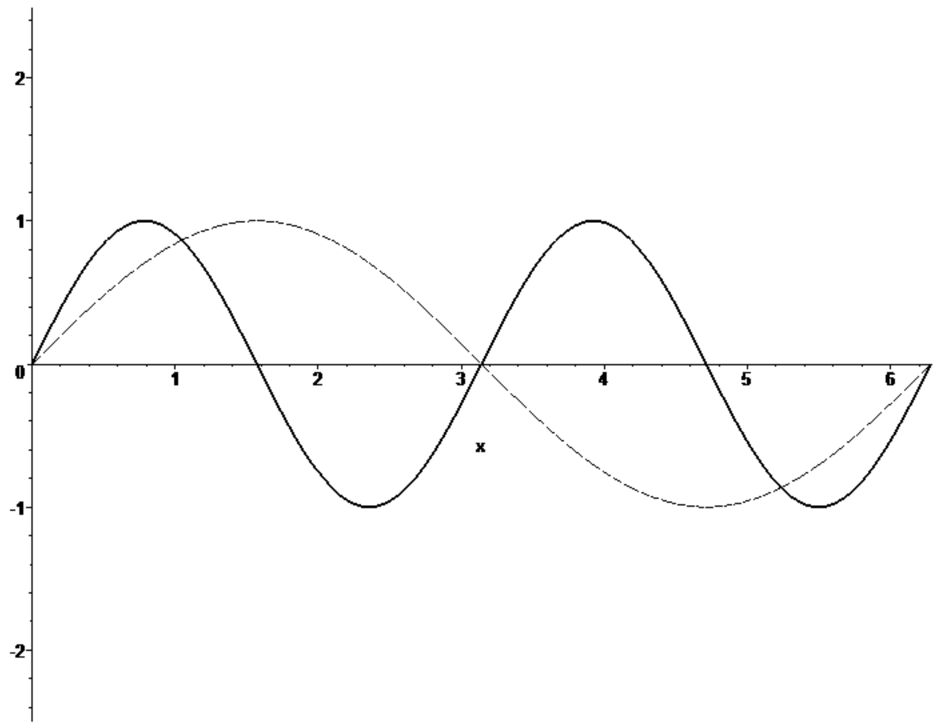
Fonction sinus



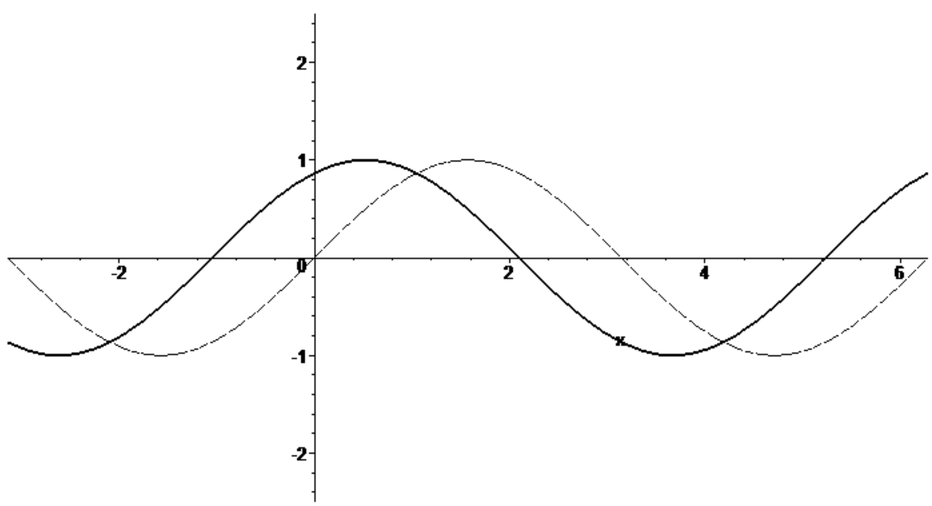
Fonction sinus de base : $f(x) = \sin(x)$.



Exemple de changement d'amplitude : $f(x) = 2\sin(x)$ (en gras).

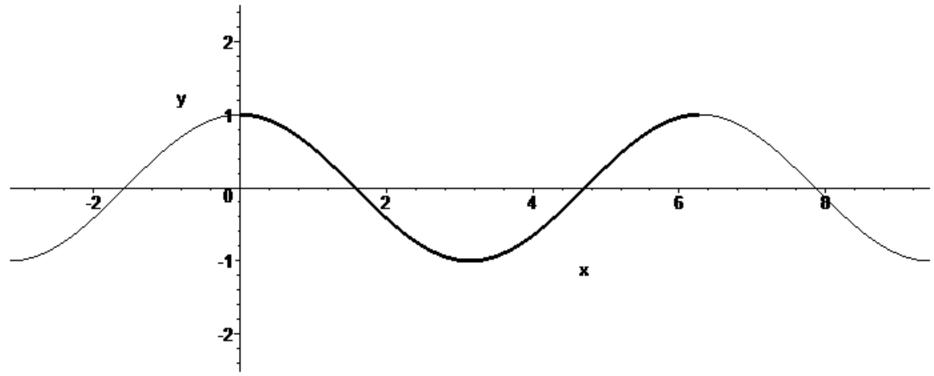


Exemple de changement de fréquence : $f(x) = \sin(2x)$ (en gras).

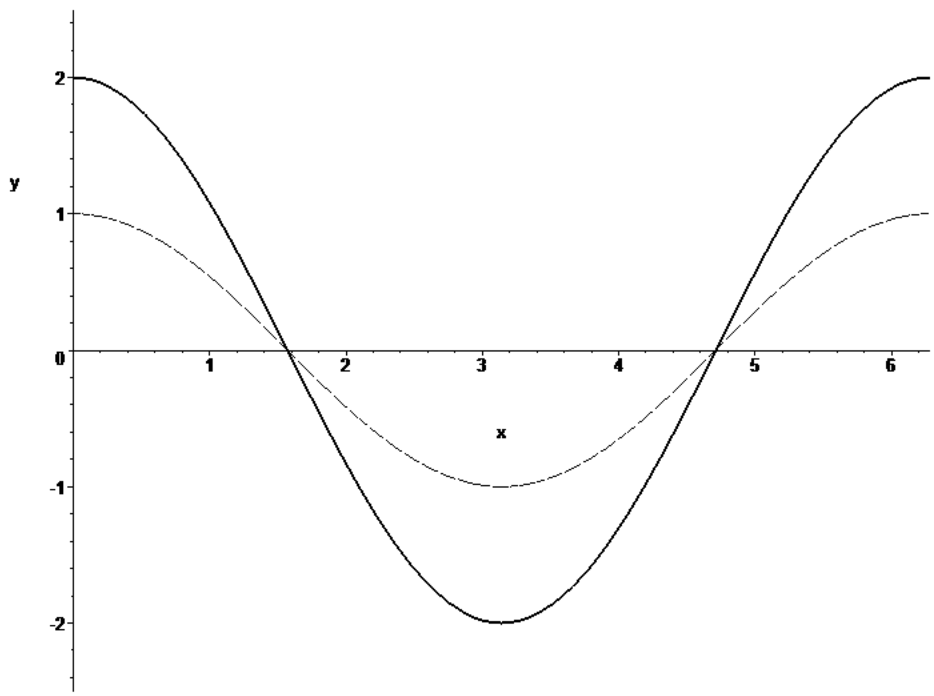


Exemple de déphasage : $f(x) = \sin(x + \pi/3)$ (en gras).

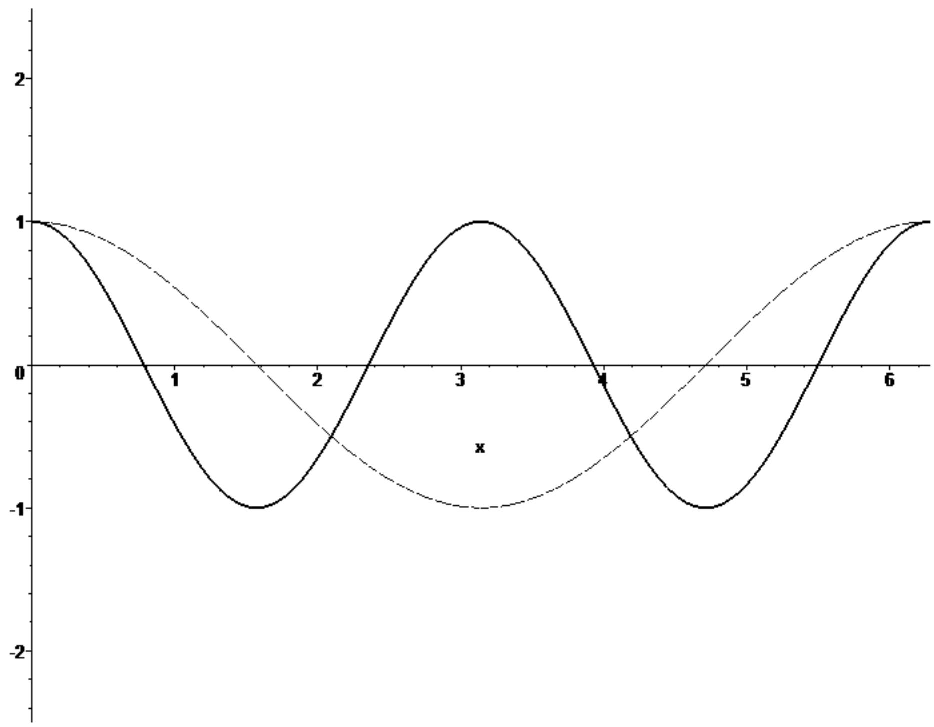
Fonction cosinus



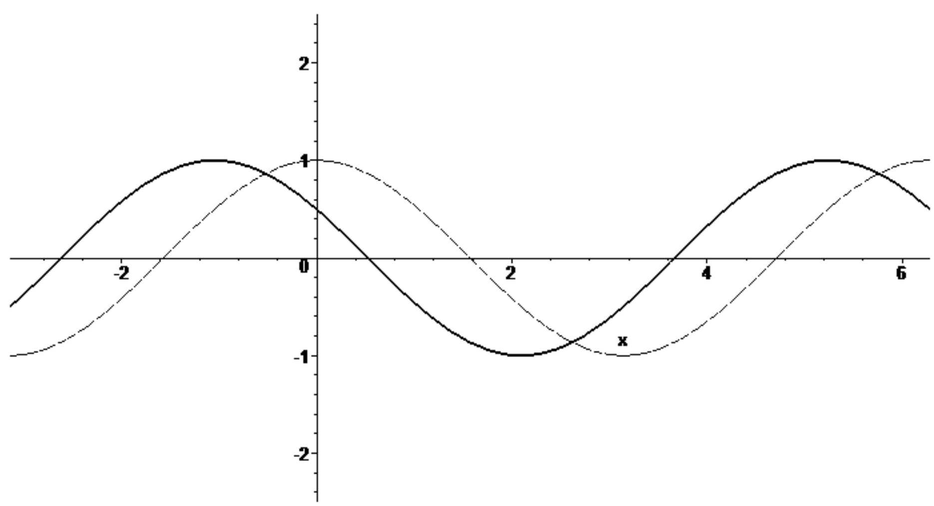
Fonction cosinus de base : $f(x) = \cos(x)$.



Exemple de changement d'amplitude : $f(x) = 2\cos(x)$ (en gras).

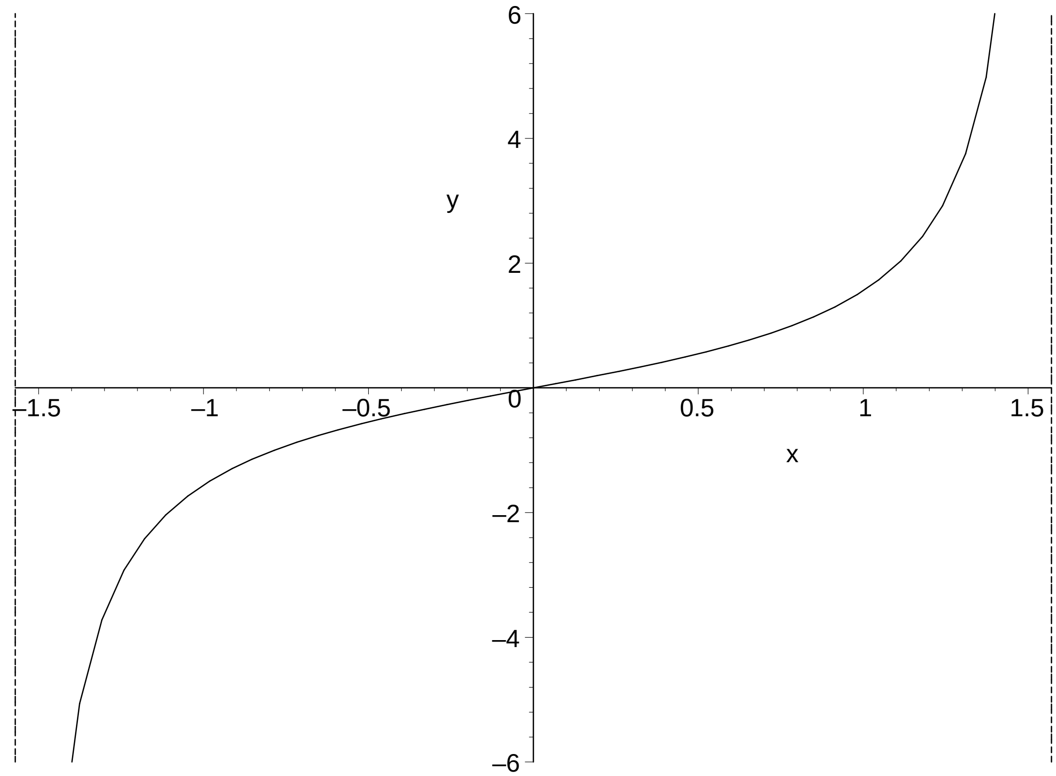


Exemple de changement de fréquence : $f(x) = \cos(2x)$ (en gras).



Exemple de déphasage : $f(x) = \cos(x + \pi/3)$ (en gras).

Fonction tangente



Fonction tangente de base : $f(x) = \tan(x)$.

2.4 Équations trigonométriques

Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = f(\theta)$, où f est une fonction trigonométrique, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 2.4.1.

1. $\sin(x) = \sin(\theta)$ si et seulement si
$$\begin{aligned} & x = \theta + 2k\pi, && k \in \mathbf{Z} \\ \text{ou} \quad & x = \pi - \theta + 2k\pi, && k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

2. $\cos(x) = \cos(\theta)$ si et seulement si
$$\begin{aligned} & x = \theta + 2k\pi, && k \in \mathbf{Z} \\ \text{ou} \quad & x = -\theta + 2k\pi, && k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

3. $\tan(x) = \tan(\theta)$ si et seulement si
$$x = \theta + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Chapitre 3

Dérivées

Ce chapitre porte sur les limites et la dérivée d'une fonction.

3.1 Dérivées

3.1.1 Limites

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que la *limite* de f en $x = a$ est L si $f(x)$ s'approche de L lorsque x s'approche de a.

Ceci est dénoté

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Théorème 3.1.1. (Propriétés des limites).

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = A$ et $\lim_{x \to a} g(x) = B$ alors

  1. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
  2. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = AB$
  3. $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{A}{B}$, si $B \neq 0$.

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = A$ et $\lim_{x \to A} g(x) = B$ alors

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = B.$$

3.1.2 Continuité

Définition. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction et a un point de son domaine. On dit que f est *continue* en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Théorème 3.1.2. Les fonctions suivantes sont continues en tout point de leur domaine.

1. Les polynômes.
2. Les fractions algébriques.
3. Les fonctions exponentielles et logarithmiques.
4. Les fonctions trigonométriques.

Ceci, avec les propriétés des limites, nous permet de calculer efficacement la limite de plusieurs fonctions.

3.1.3 Dérivée

Définition. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction et x un point de son domaine. La *dérivée* de f en x est

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si cette limite existe.

Interprétation de la dérivée.

- Analytiquement, la dérivée $f'(x)$ est le taux de variation instantané de f en x.
- Géométriquement, la dérivée $f'(x)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$.

Notation

La dérivé de $y = f(x)$ se dénote

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad \ldots$$

Calcul de la dérivée

Théorème 3.1.3. (Dérivée des fonctions de base).

1. $\dfrac{d}{dx}c = 0$
2. $\dfrac{d}{dx}x = 1$
3. $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
4. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
5. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a)$
6. $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $\dfrac{d}{dx}\log_a(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$
8. $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
9. $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
10. $\dfrac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$

Théorème 3.1.4. (Formules de dérivation). Soit f et g des fonctions dérivables.

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(cf(x))' = cf'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Théorème 3.1.5. (Règle d'enchaînement). Soit f et g des fonctions dérivables. Alors

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Dérivées d'ordre supérieur

Définition. Soit f une fonction dérivable.

1. La *dérivée seconde* de f, si elle existe, est définie par

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x).$$

2. La dérivée n^e de f, si elle existe, est définie par

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x).$$

Notation

On dénote aussi

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

3.2 Dérivation implicite

Une équation de la forme

$$F(x, y) = G(x, y)$$

définit implicitement y en fonction de x. Ceci signifie que, en principe, on peut isoler y et l'exprimer en fonction de x.

En pratique il est souvent difficile d'isoler y. Cependant, il est quand même possible de calculer $y'(x)$ à l'aide de la procédure de dérivation implicite.

Procédure de dérivation implicite

Soit une équation de la forme

$$F(x, y) = G(x, y)$$

qui définit y en fonction de x. Pour calculer y' :

1. dériver les deux membres de l'équation par rapport à x, en considérant y comme une fonction de x
2. isoler y' dans l'équation trouvée en 1.

Exemple

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

au point $(4/3, 2/3)$.

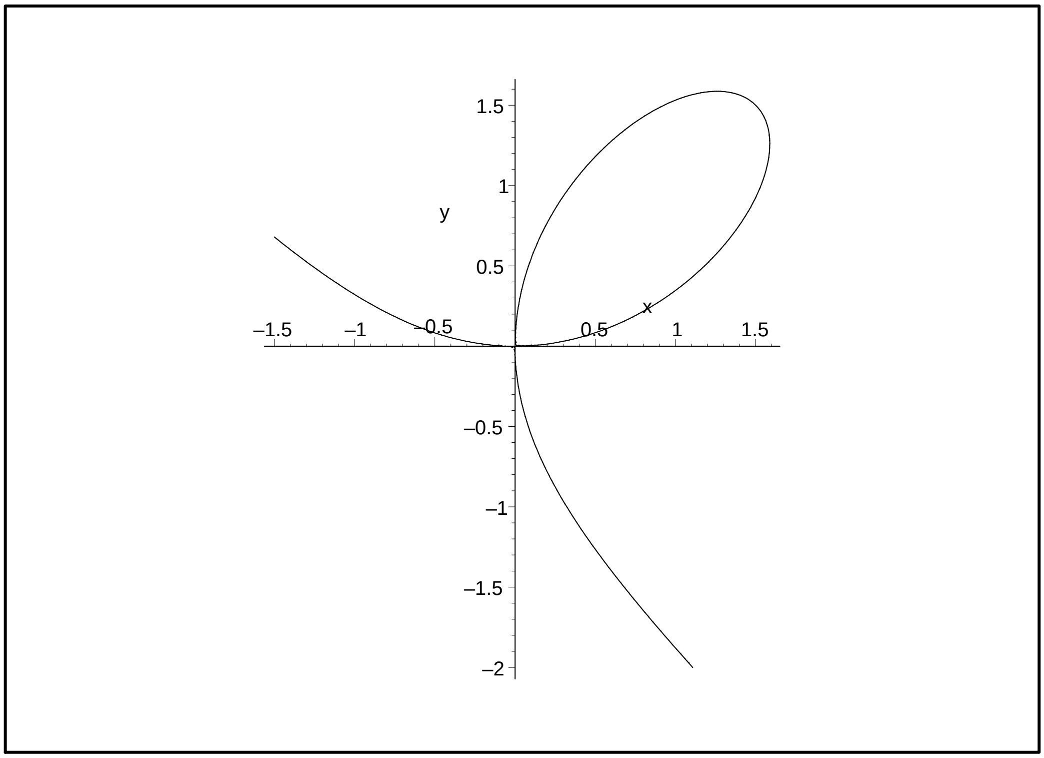


FIGURE 3.1 – Folium de Descartes : $x^3 + y^3 = 3xy$.

3.3 Dérivation logarithmique

Procédure de dérivation logarithmique.

Soit $y = f(x)$ une fonction qu'on ne peut pas dériver avec les formules de dérivation usuelles. Pour calculer y' :

1. prendre le logarithme de chaque terme pour obtenir l'équation

$$\ln(y) = \ln(f(x))$$

2. appliquer les propriétés du logarithme pour obtenir une équation dont chaque membre peut être dérivé à l'aide des formules usuelles
3. calculer la dérivée des deux membres de l'équation trouvée en 2
4. isoler y' dans l'équation trouvée en 3.

Utilités

- Calculer la dérivée d'une fonction de la forme $f(x)^{g(x)}$.
- Simplifier le calcul de la dérivée de fonctions comportant plusieurs produits et quotients.

3.4 Applications de la dérivée

3.4.1 Tangente au graphe d'une fonction

L'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = a$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

3.4.2 Graphe d'une fonction

La dérivée première d'une fonction donne de l'information sur les intervalles de croissance/décroissance de la fonction.

Théorème 3.4.1. Soit f une fonction dérivable.

- Si $f'(x) > 0$ alors f est croissante en x.
- Si $f'(x) < 0$ alors f est décroissante en x.
- Si $f'(x) = 0$ alors f n'est ni croissante, ni décroissante en x.

La dérivée seconde d'une fonction donne de l'information sur la concavité du graphe de la fonction.

Théorème 3.4.2. Soit f une fonction deux fois dérivable.

- Si $f''(x) > 0$ alors le graphe de f est concave vers le haut en x.
- Si $f''(x) < 0$ alors le graphe de f est concave vers le bas en x.

3.4.3 Optimisation

Un problème d'optimisation est un problème où l'on cherche à déterminer le minimum ou le maximum d'une fonction.

Définition. Soit f une fonction. Un point x_0 correspond à

- un *minimum local* de f si $f(x_0)$ est la plus petite valeur prise par f dans un voisinage de x_0.
- un *maximum local* de f si $f(x_0)$ est la plus grande valeur prise par f dans un voisinage de x_0.
- un *minimum global* de f si $f(x_0)$ est la plus petite valeur prise par f sur son domaine.
- un *maximum global* de f si $f(x_0)$ est la plus grande valeur prise par f sur son domaine.

Définition. Soit f une fonction dérivable. Un point tel que $f'(x) = 0$ est appelé *point critique* de f.

Théorème 3.4.3. (Test de la dérivée première). Soit f une fonction dérivable définie sur un intervalle ouvert. Si x est un point où f atteint son minimum ou son maximum alors x est un point critique, c'est-à-dire que $f'(x) = 0$.

Ceci signifie que les candidats pour le minimum et le maximum de f sont ses points critiques.

Théorème 3.4.4. (Test de la dérivée seconde). Soit f une fonction deux fois dérivable et x un point critique de f.

- Si $f''(x) > 0$ alors x est un minimum (local) de f.
- Si $f''(x) < 0$ alors x est un maximum (local) de f.

Remarques:

1. Il est possible qu'une fonction ne possède pas de minimum et/ou de maximum.
2. Il est possible qu'une fonction atteigne son minimum et/ou maximum en plusieurs points.
3. Si f est définie sur un intervalle fermé alors les extrémités de l'intervalle sont aussi des candidats pour le minimum et le maximum.

Chapitre 4

Intégrales

Ce chapitre porte sur les techniques d'intégration et les intégrales définies.

4.1 Intégrale indéfinie

Définition. Une fonction dérivable F est une *primitive* de la fonction f si $F'(x) = f(x)$.

Remarque: Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors $F_1 = F_2 + C$, où C est une constante.

Définition. Soit f une fonction continue. L'*intégrale* indéfinie de f, si elle existe, est l'expression $F(x) + C$ où F est une primitive de f et C est une constante.

On dénote

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

La fonction f est appelée *intégrand*.

Théorème 4.1.1. Propriétés de l'intégrale.

1. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

2. $\displaystyle\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$, où k est une constante.

Formules d'intégration de base

1. $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, si $a \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

5. $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

6. $\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

7. $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$

Formules d'intégration de base (suite)

1. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotan}(x) + C$

2. $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x) + C$

3. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotan}(x)\,dx = -\operatorname{cosec}(x) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin}(x) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan}(x) + C$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{Arcsec}(x) + C$

4.1.1 Intégration par changement de variable

Définition. Soit $y = f(x)$ une fonction dérivable. La *différentielle* de f est l'expression
$$dy = f'(x)\, dx.$$

Théorème 4.1.2. Si G est une primitive de g alors
$$\int g(f(x))f'(x)\, dx = G(f(x)) + C.$$

En pratique, on utilise ce théorème comme suit.

Procédure d'intégration par changement de variable.

1. Identifier $u = f(x)$ dans l'intégrand.
2. Calculer la différentielle $du = f'(x)\, dx$.
3. Exprimer l'intégrale dans la nouvelle variable u.
4. Intégrer par rapport à u.
5. Exprimer le résultat de l'étape précédente en fonction de la variable originale x.

4.1.2 Intégration par parties

Théorème 4.1.3. Soit u et v des fonctions d'une même variable. Alors

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

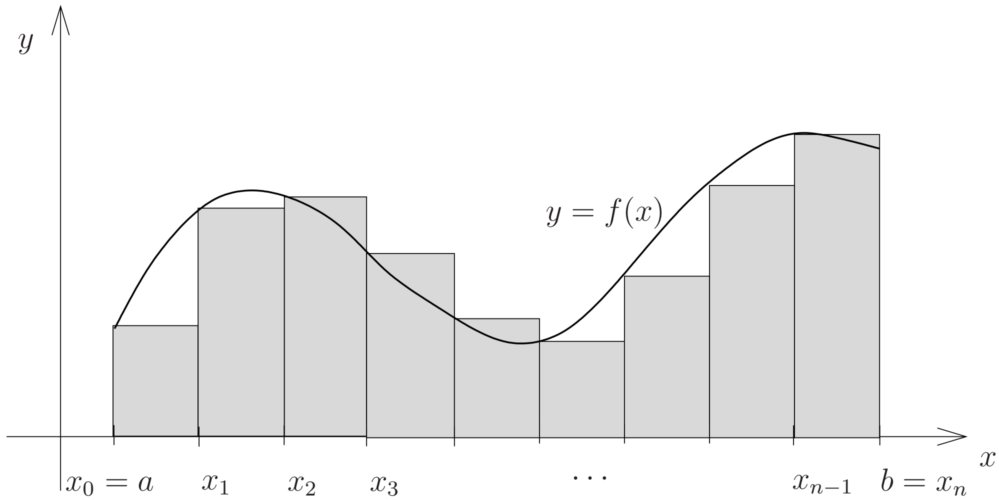
En pratique on utilise ce théorème comme suit.

Procédure d'intégration par parties.

1. Identifier u et dv dans l'intégrand.
2. Calculer du et $v = \int dv$.
3. Calculer le produit uv et intégrer, si possible, $v\,du$.
4. Soustraire les valeurs trouvées à l'étape précédente pour obtenir l'intégrale.

4.2 Intégrale définie

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$.



- Subdivisons $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur égale $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.
- Pour chaque sous-intervalle, soit $f(x_i)$ la valeur de la fonction à l'extrémité gauche.
- Soit
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$
la *somme de Riemann* construite à partir de ces données.
- Soit
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x.$$

Si cette dernière limite existe, on l'appelle l'*intégrale* de f sur $[a, b]$ et on dénote
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x.$$

Interprétation :

- Lorsque $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire sous la courbe $y = f(x)$ au-dessus de $[a, b]$.
- Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ alors l'aire de la région comprise entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ avec $x \in [a, b]$ est égale à

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Théorème 4.2.1. Propriétés de l'intégrale définie.

1. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, où k est une constante.
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
4. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ si $c \in [a, b]$.

Théorème 4.2.2. Théorème fondamental du calcul.
Si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Procédure de calcul d'une intégrale définie.

- Calculer une primitive F de la fonction à intégrer (si possible).
- Évaluer la primitive aux bornes de l'intégrale et calculer $F(b) - F(a)$, qui est la valeur de l'intégrale.

4.3 Autres techniques d'intégration

4.3.1 Intégration par décomposition en fractions partielles

Définition. Une *fonction rationnelle* est un quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes.

Théorème 4.3.1. Soit $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle avec degré$(P) <$ degré(Q).

Alors R se décompose en une somme S de fractions partielles, où

1. pour chaque facteur $(ax+b)^k$ de degré 1 et multiplicité k du dénominateur $Q(x)$, S contient un terme

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}, \quad A_i \in \mathbf{R}.$$

2. pour chaque facteur irréductible $(ax^2+bx+c)^k$ de degré 2 et multiplicité k du dénominateur $Q(x)$, S contient un terme

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k},$$

$A_i, B_i \in \mathbf{R}$.

4.3.2 Intégation par substitution trigonométrique

- Si l'intégrand contient $\sqrt{a^2 - x^2}$ alors poser

$$x = a\sin(\theta), \quad dx = a\cos(\theta)\,d\theta.$$

- Si l'intégrand contient $\sqrt{a^2 + x^2}$ alors poser

$$x = a\tan(\theta), \quad dx = a\sec^2(\theta)\,d\theta.$$

- Si l'intégrand contient $\sqrt{x^2 - a^2}$ alors poser

$$x = a\sec(\theta), \quad dx = a\sec(\theta)\tan(\theta).$$

Chapitre 5

Vecteurs, matrices et systèmes linéaires

Ce chapitre porte sur les vecteurs, les matrice et déterminants, et la résolution de systèmes d'équations linéaires.

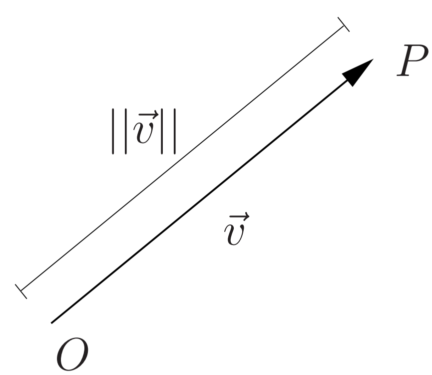
5.1 Vecteurs géométriques

Définition.

- Un *scalaire* est une quantité possédant une grandeur seulement.
- Un *vecteur* est une quantité possédant une grandeur, une direction et un sens.

Représentation

On représente graphiquement un vecteur par une flèche dont l'orientation donne la direction et le sens du vecteur et dont la longueur donne la grandeur, appelée *module* ou *norme*, du vecteur. La norme d'un vecteur $\vec{v}$ est dénotée $||\,\vec{v}\,||$.



Si le vecteur est représenté par une flèche allant d'un point O à un point P alors le point O est appelé l'*origine* du vecteur et le point Q est appelé l'*extrémité* du vecteur.

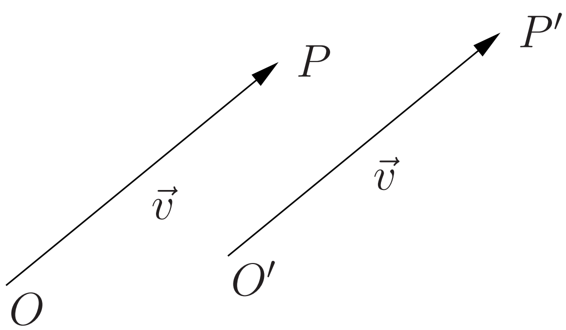
On dénote un vecteur par un symbole $\vec{v}$ ou $\mathbf{v}$. Si on veut donner explicitement l'origine et l'extrémité du vecteur, on écrit $\vec{v} = \vec{OP}$.

Le *vecteur nul*, dénoté $\vec{0}$, est le vecteur ayant son origine et son extrémité confondus. Le vecteur $\vec{0}$ a une norme égale à 0 et possède toutes les directions.

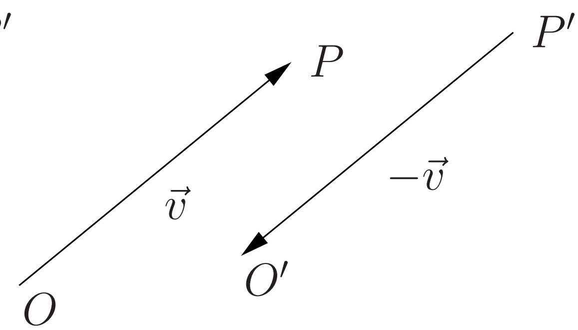
Définition. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont

- *égaux* s'ils ont même norme (grandeur), même direction et même sens.
- *opposés* s'ils ont même norme, même direction mais sens opposé.
- *parallèles* s'ils ont même direction.
- *perpendiculaires* ou *orthogonaux* si les flèches les représentant ont des directions prependiculaires.

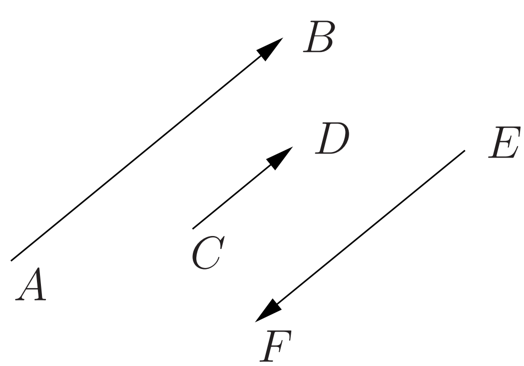
Définition. Un vecteur $\vec{u}$ est *unitaire* si $||\,\vec{u}\,|| = 1$.



$\vec{OP}$ et $\vec{O'P'}$ sont égaux.



$\vec{OP}$ et $\vec{P'O'}$ sont opposés.



$\vec{AB}$, $\vec{CD}$ et $\vec{EF}$ sont parallèles.

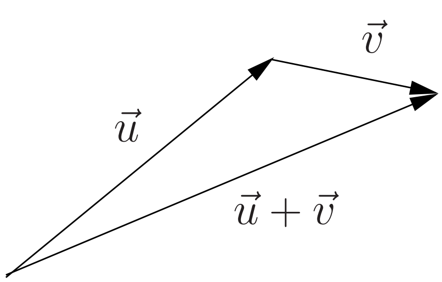
5.1.1 Opérations entre les vecteurs

Définition. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

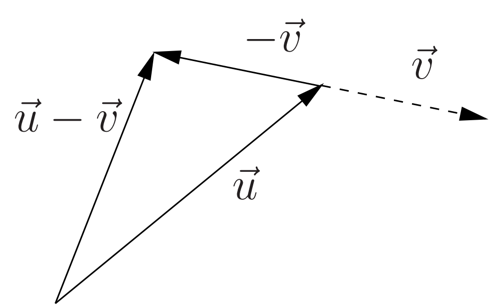
- La *somme* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dénotée $\vec{u}+\vec{v}$, est le vecteur obtenu en plaçant l'origine de $\vec{v}$ à l'extrémité de $\vec{u}$ puis en reliant l'origine de $\vec{u}$ et l'extrémité de $\vec{v}$.
- La *différence* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est est obtenue en faisant la somme de $\vec{u}$ et de l'opposé de $\vec{v}$:

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v}).$$

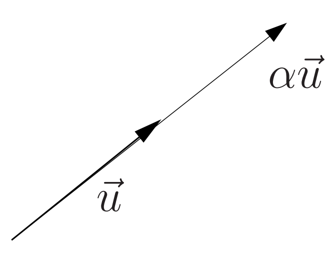
- La *multiplication* de $\vec{u}$ par un scalaire α est le vecteur, noté $\alpha\vec{u}$, ayant la même direction que $\vec{u}$, une norme égale à $\alpha|\vec{u}|$ et
  · le même sens que $\vec{u}$ si $\alpha > 0$
  · le sens opposé à $\vec{u}$ si $\alpha < 0$.



Addition



Soustraction



Multiplication par un scalaire

Propriétés des opérations entre vecteurs

Théorème 5.1.1. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et α, β des scalaires alors

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
4. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
5. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

5.1.2 Base canonique

Définition. Considérons un repère cartésien dans le plan ou l'espace.

- Dans le plan, soit les points $P = (1, 0)$ et $Q = (0, 1)$. On définit les vecteurs
$$\vec{i} = \vec{OP}, \quad \vec{j} = \vec{OQ}.$$
Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires et orthogonaux.
- Dans l'espace, soit les points $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$ et $R = (0, 0, 1)$. On définit les vecteurs
$$\vec{i} = \vec{OP}, \quad \vec{j} = \vec{OQ}, \quad \vec{k} = \vec{OR}.$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

Définition.

1. L'ensemble de vecteurs $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est appelé *base canonique* de $\mathbf{R}^2$ (le plan).

2. L'ensemble de vecteurs $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est appelé *base canonique* de $\mathbf{R}^3$ (l'espace).

Théorème 5.1.2. Représentation des vecteurs dans la base canonique.

1. Tout vecteur $\vec{v}$ dans le plan peut s'écrire comme une somme de multiples des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, c'est-à-dire

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

   avec $a, b \in \mathbf{R}$.

2. Tout vecteur $\vec{v}$ dans l'espace peut s'écrire comme une somme de multiples des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, c'est-à-dire

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

   avec $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Définition.

- Si $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ alors a et b sont les *composantes* de $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.
- Si $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ alors a, b et c sont les *composantes* de $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Définition. Une somme de vecteurs de la forme

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n, \quad a_i \in \mathbf{R}$$

est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Le théorème 5.1.2 affirme donc que tout vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique. Cette représentation est unique.

Théorème 5.1.3.

- Si $A = (x_1, y_1)$ et $B = (x_2, y_2)$ sont deux points du plan alors la représentation de $\vec{AB}$ dans la base canonique est

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

- Si $A = (x_1, y_1, z_1)$ et $B = (x_2, y_2, z_2)$ sont deux points de l'espace alors la représentation de $\vec{AB}$ dans la base canonique est

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Théorème 5.1.4. Version algébrique des opérations entre vecteurs.

- Si $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$, $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ alors
  1. $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j}$
  2. $\alpha\vec{u} = (\alpha a_1)\vec{i} + (\alpha b_1)\vec{j}$
- Si $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$, $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ alors
  1. $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j} + (c_1 + c_2)\vec{k}$
  2. $\alpha\vec{u} = (\alpha a_1)\vec{i} + (\alpha b_1)\vec{j} + (\alpha c_1)\vec{k}$

Théorème 5.1.5. Calcul de la norme.

- Si $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ alors $||\,\vec{v}\,|| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ alors $||\,\vec{v}\,|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

5.1.3 Produit scalaire

Définition. L'*angle* entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le plus petit des deux angles formés par les segments orientés (flèches) définissant les vecteurs.
Dans l'espace, cet angle est formé dans le plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition. Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\,\vec{u}\,||\,||\,\vec{v}\,||\cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Théorème 5.1.6. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Interprétation géométrique
Supposons que $\vec{v}$ soit un vecteur unitaire. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est la longueur de la composante de $\vec{u}$ dans la direction de $\vec{v}$.

Théorème 5.1.7. Calcul du produit scalaire en termes des composantes.

- Si $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ et $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2.$$

- Si $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ et $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

5.2 Matrices

Définition. Une *matrice* est un tableau de nombres arrangés en lignes de même longueur et en colonnes de même longueur.

Si la matrice contient m lignes et n colonnes alors on dit qu'elle est de *taille* ou *dimension* $m \times n$.

Notation

Les nombres dans une matrice sont les *éléments* de la matrice.

L'élément d'une matrice A situé sur la i^e ligne et j^e colonne est dénoté a_{ij}.

Une matrice est habituellement dénotée par une lettre majuscule et décrite explicitement par un tableau entouré de parenthèses.

Par exemple, pour une matrice 3×4 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

On écrit souvent une matrice de façon abrégée

$$A = (a_{ij}).$$

On indique parfois explicitement la taille de la matrice au bas du symbole la représentant : $A_{m \times n}$.

5.2.1 Opérations sur les matrices

Addition

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.
La *somme* $A + B$ est la matrice de taille $m \times n$ dont les éléments sont $a_{ij} + b_{ij}$:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})\,.$$

Soustraction

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.
La *différence* $A - B$ est la matrice de taille $m \times n$ dont les éléments sont $a_{ij} - b_{ij}$:

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})\,.$$

Multiplication par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $m \times n$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.
La matrice A multipliée par le scalaire α est la matrice de taille $m \times n$ dont les éléments sont $\alpha\, a_{ij}$:

$$\alpha A = (\alpha\, a_{ij})\,.$$

Théorème 5.2.1. Propriétés de l'addition et la multiplication par un scalaire.

Soit A, B et C des matrices de même taille et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \alpha A$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Transposée d'une matrice

Définition. Soit A une matrice de taille $m \times n$. La *transposée* de A est la matrice A^t dont les éléments sont $a^t_{ij} = a_{ji}$:

$$A^t = (a_{ji})\,.$$

Autrement dit, A^t est obtenue de A en interchangeant ses lignes et ses colonnes.

Produit

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$. Alors on peut définir le *produit* AB comme suit.

Définition. Cas particulier.

Le produit d'un vecteur ligne $A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ et d'un vecteur colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est le nombre réel

$$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n.$$

Définition. Cas général.

Le produit $A_{m\times n}B_{n\times p}$ est la matrice de taille $m \times p$ obtenue comme suit.

1. Multiplier la 1ère ligne de A par chaque colonne de B en utilisant la définition du produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne.

   Les p scalaires ainsi obtenus forment la 1ère ligne du produit AB.

2. De la même façon, multiplier chacune des lignes suivantes de A par chaque colonne de B.

   Les scalaires obtenus en multipliant la i^e ligne par les colonnes de B forment la i^e ligne du produit AB.

Théorème 5.2.2. Propriétés du produit matriciel.

Soit A, B et C des matrices et $\alpha \in \mathbf{R}$. Lorsque que les produits sont définis :

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Attention : Le produit matriciel n'est pas commutatif.

5.2.2 Matrice inverse

Définition. La *matrice identité* de taille $n \times n$ est la matrice dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres éléments égaux à 0.

La matrice identité $n \times n$ est dénotée I_n ou simplement I.

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. L'*inverse* de A, si elle existe, est la matrice A^{-1} telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Attention : Certaines matrices n'admettent pas d'inverse.

Théorème 5.2.3. Soit A une matrice carrée et I la matrice identité de même taille. Alors

$$AI = IA = A.$$

5.2.3 Déterminants

Le déterminant est un nombre réel associé à une matrice carrée ($n \times n$).

Définition. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

une matrice de taille 2×2. Le déterminant de A est

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Définition. Soit A une matrice. Une *sous-matrice* de A est une matrice obtenue en supprimant des lignes et/ou des colonnes de A.

Définition. Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$ une matrice carrée. Le *mineur* de A associé à l'élément a_{ij} est le déterminant de la sous-matrice A_{ij} obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de A. Ce mineur est dénoté m_{ij}.

On a donc

$$m_{ij} = \det(A_{ij}).$$

Définition. Soit A une matrice de taille $n \times n$. Le *déterminant* de A est le nombre obtenu par l'une des méthodes suivantes.

- Développement selon la i^e ligne.

  $\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}m_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}m_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}m_{in}.$

- Développement selon la j^e colonne.

  $\det(A) = (-1)^{j+1}a_{1j}m_{1j} + (-1)^{j+2}a_{2j}m_{2j} + \cdots + (-1)^{j+n}a_{nj}m_{nj}.$

Remarques:

1. On peut démontrer que la valeur du déterminant est la même quelque soit la ligne ou colonne choisie pour le développement.
2. Les signes des coefficients dans les sommes ci-dessus sont

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

3. Les formules ci-dessus font intervenir les déterminants des sous-matrices A_{ij}, qui se calculent avec la même formule. Le calcul d'un déterminant est donc un processus récursif.

   Les seuls déterminants que l'on peut calculer directement sont les déterminants 2×2.

Notation. On dénote aussi le déterminant $\det(A)$ par $|\,A\,|$.

Soit A une matrice $n \times n$. Dénotons par $\vec{a}_j$ la j^e colonne de A. La matrice A s'écrit alors

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n] .$$

Théorème 5.2.4. Propriétés du déterminant.

1. Si on échange deux colonnes de A alors le déterminant change de signe.

   Par exemple :

   $$\det([\vec{a}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_4]) = -\det([\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4]).$$

2. Si on additionne à une colonne un multiple d'une autre colonne alors le déterminant est inchangé.

   Par exemple :

   $$\det([\vec{a}_1, \vec{a}_2 + \alpha\vec{a}_3, \vec{a}_3, \vec{a}_4]) = \det([\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4]).$$

3. Si A contient une colonne ou une ligne nulle alors $\det(A) = 0$.

4. Si on multiplie une colonne de A par un scalaire α alors le déterminant est multiplié par α.

   Par exemple :

   $$\det([\vec{a}_1, \alpha\, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4]) = \alpha \det([\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4]).$$

5. Si A contient deux colonnes proportionnelles alors $\det(A) = 0$.

   Par exemple :

   $$\det([\vec{a}_1, \alpha\, \vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4]) = 0.$$

Théorème 5.2.5. Propriétés du déterminant (suite).

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ (si $\det(A) \neq 0$).
3. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

5.2.4 Produit vectoriel

Définition. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans l'espace. Le *produit vectoriel* de ces deux vecteurs est le vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$ défini par

$$\vec{u} \times \vec{v} = ||\,\vec{u}\,||\;||\,\vec{v}\,||\,\sin(\theta)\,\vec{n}$$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et dont le sens est donné par la règle de la main droite.

Calcul du produit vectoriel
Si $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ et $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ alors

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Remarque: Le déterminant ci-dessus se calcule symboliquement comme un déterminant ordinaire, tel que vu à la section 5.2.3.

Interprétation géométrique du produit vectoriel. Soit P le parallélogramme déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan engendré par ces deux vecteurs. Alors

$$||\,\vec{u} \times \vec{v}\,|| = \text{Aire}(P).$$

Théorème 5.2.6. Propriétés du produit vectoriel

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3. Si a est une constante alors $(a\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (a\vec{v}) = a(\vec{u} \times \vec{v})$
4. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{0}$

Définition. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs dans l'espace. Alors leur *produit mixte* est le scalaire

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Interprétation géométrique du produit mixte.
Soit P le parallélépipède engendré par $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ alors

$$||\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\,|| = \text{Volume}(P).$$

5.3 Systèmes d'équations linéaires

5.3.1 Exemple

Trois alliages contiennent les proportions suivantes (en %) de plomb, zinc et cuivre :

Alliage	Pb	Zn	Cu
X	50	30	20
Y	40	30	30
Z	30	70	0

Quelle proportion de chaque alliage doit-on combiner pour obtenir un nouvel alliage contenant 44% de plomb, 38% de zinc et 18% de cuivre ?

Solution
Soit x, y, z les proportions des alliages X, Y et Z dans le nouvel alliage. On doit avoir

$$\left\{\begin{array}{lcl} 50x + 40y + 30z & = & 44 \\ 30x + 30y + 70z & = & 38 \\ 20x + 30y & = & 18 \end{array}\right.$$

On cherche une solution (x, y, z) satisfaisant ces trois équations linéaires.

5.3.2 Systèmes linéaires

Définition. Un *système linéaire* de m équations à n variables est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Un système d'équations linéaires peut être écrit sous forme matricielle :

$$AX = B$$

où

$A = (a_{ij})$ est la *matrice des coefficients*,

$X = (x_j)$ est le vecteur colonne des variables,

$B = (b_j)$ est un vecteur colonne de constantes.

Définition. Une *solution* à un système d'équations linéaires est un ensemble de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant toutes les équations simultanément.

En termes de matrices, une solution est un vecteur X satisfaisant l'équation matricielle $AX = B$.

5.4 Résolution de systèmes linéaires

Résoudre un système d'équations linéaires signifie trouver toutes les solutions du système.

5.4.1 Méthode de la matrice inverse

S'applique aux systèmes dont la matrice des coefficients est carrée et inversible.

Dans ce cas, multipliant à gauche par l'inverse on trouve :

$$
\begin{aligned}
& AX = B \\
\Rightarrow\ & A^{-1}AX = A^{-1}B \\
\Rightarrow\ & IX = A^{-1}B \\
\Rightarrow\ & X = A^{-1}B.
\end{aligned}
$$

Théorème 5.4.1. Soit $AX = B$ un système dont la matrice des coefficients est inversible. Alors l'unique solution du système est

$$X = A^{-1}B.$$

5.4.2 Méthode de Gauss

Théorème 5.4.2. Soit $AX = B$ un système linéaire quelconque. Les opérations suivantes transforment le système en un système équivalent, c'est-à-dire ayant les mêmes solutions :

1. Intervertir les lignes i et j : $l_i \leftrightarrow l_j$
2. Multiplier la ligne i par un scalaire $\alpha \neq 0$: $\alpha l_i \to l_i$
3. Ajouter à la ligne i un multiple de la ligne j : $l_i + \alpha l_j \to l_i$

Les opérations ci-dessus sont appelées *opérations élémentaires* sur les lignes du système.

Pour simplifier, on effectue ces opérations sur la *matrice augmentée* du système, obtenue en ajoutant le vecteur colonne B à la matrice des coefficients A. On dénote la matrice augmentée par $A|B$.

Définition. Une matrice A est

- *échelonnée* si
  1. le premier élément non nul de chaque ligne est situé à droite du premier élément non nul de la ligne précédente
  2. toutes les lignes nulles sont situées après les lignes non nulles.
- *échelonnée réduite* si
  1. elle est échelonnée
  2. le premier élément non nul de chaque ligne est égal à 1 et est le seul élément non nul de sa colonne.

Méthode de Gauss. Pour résoudre le système $AX = B$.

1. Former la matrice augmentée $A|B$.
2. Utiliser les opérations élémentaires sur les lignes pour transformer la matrice augmentée en une matrice **échelonnée** équivalente.
3. Résoudre le système triangulaire ainsi obtenu en remontant à partir de la dernière variable.

Méthode de Gauss-Jordan. Pour résoudre le système $AX = B$.

1. Former la matrice augmentée $A|B$.
2. Utiliser les opérations élémentaires sur les lignes pour transformer la matrice augmentée en une matrice **échelonnée réduite** équivalente.
3. Résoudre le système diagonal ainsi obtenu.

Théorème 5.4.3. Soit $AX = B$ un système linéaire. Trois cas sont possibles :

1. Le système possède une solution unique.
2. Le système possède une infinité de solutions.
3. Le système ne possède aucune solution.

Définition. Le *rang* d'une matrice est la taille de la plus grande sous-matrice carrée de A de déterminant non nul.

Théorème 5.4.4. Soit $AX = B$ un système linéaire.

- Si $\text{rang}(A|B) \leq \text{rang}(A)$ alors le système possède au moins une solution.
- Si $\text{rang}(A|B)$ est égal au nombre de variables du système alors le système possède une solution unique.
- Si $\text{rang}(A|B) > \text{rang}(A)$ alors le système ne possède aucune solution.

Théorème 5.4.5. Soit $AX = B$ un système linéaire carré. Si $\det(A) \neq 0$ alors le système possède un solution unique.

5.4.3 Calcul de l'inverse

Calcul de l'inverse d'une matrice.
Pour déterminer l'inverse A^{-1} d'une matrice A de taille $n \times n$

1. Former la matrice augmentée $A|I_n$

2. Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour transformer cette matrice sous forme échelonnée réduite.

3. La matrice obtenue à l'étape précédente est $I_n|A^{-1}$.

5.5 Droites et plans dans l'espace

5.5.1 Droites

Équation vectorielle d'une droite. Soit $\vec{d}$ un vecteur, P un point, O l'origine et $X = (x, y, z)$.
L'équation de la droite passant par P dans la direction $\vec{d}$ est

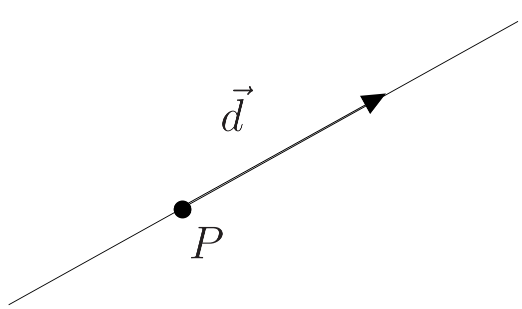
$$\vec{OX} = \vec{OP} + t\vec{d}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Le vecteur $\vec{d}$ est appelé *vecteur directeur* de la droite.

Pour déterminer l'équation de la droite passant par deux points P et Q, on prend comme vecteur directeur : $\vec{d} = \vec{PQ}$.

Équations paramétriques d'une droite dans l'espace. Soit $\vec{d} = d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3\vec{k}$ et $P = (p_1, p_2, p_3)$. Les *équations paramétriques* de la droite passant par P dans la direction $\vec{d}$ sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& p_1 + td_1 \\ y &=& p_2 + td_2 \\ z &=& p_3 + td_3 \end{array}\right., \ t \in \mathbf{R}.$$



5.5.2 Plans

Théorème 5.5.1. L'équation du plan passant par un point $P = (p_1, p_2, p_3)$ et perpendiculaire à un vecteur $\vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j} + n_3\vec{k}$ est

$$n_1(x - p_2) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0.$$

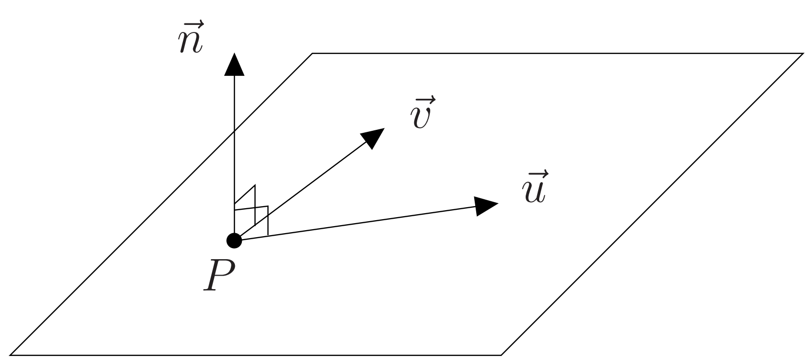
Vectoriellement cette équation s'écrit

$$\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est appelé *vecteur normal* au plan.

Définition. Le *plan engendré* par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par un point P est le plan passant par P et dont le vecteur normal est $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Définition. Le plan passant par trois points P, Q et R est le plan passant par P et engendré par $\vec{u} = \vec{PQ}$ et $\vec{v} = \vec{PR}$.



Deuxième partie

Exercices

Exercices série 1

Ensembles de nombres

1. Nommez le plus petit ensemble parmi $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ auquel appartiennent les nombres suivants
   a) $\dfrac{27}{82}$ b) $3-5$ c) $5-3$ d) $5-\sqrt{64}$ e) $1+2\sqrt{2}$ f) $\pi-1$

2. Vrai ou Faux ?
   a) x^2-3 possède une racine dans $\mathbf{Z}$.
   b) x^2-4 possède une racine dans $\mathbf{Z}$.
   c) Une fraction est un nombre réel.
   d) $\sqrt{2}$ s'exprime comme une fraction.
   e) Il existe une infinité de nombres réels qui ne sont pas des fractions.

3. Donnez, s'ils existent, le plus petit et le plus grand élément de l'ensemble dans l'intervalle donné.
   a) Ensemble $= \mathbf{Z}$, intervalle $= [4/3, 15/4]$.
   b) Ensemble $= \mathbf{N}$, intervalle $=]0, 1[$.
   c) Ensemble $= \mathbf{Q}$, intervalle $= [1/2, 3/4[$.
   d) Ensemble $= \mathbf{R}$, intervalle $=]0, \pi]$.
   e) Ensemble $= \mathbf{Q}$, intervalle $=]1/2, 3/2[$.

4. * Montrez que les nombres réels de la forme $a+b\sqrt{2}$, où $a, b \in \mathbf{R}$ sont dénombrables.

5. ** Montrez que $\mathbf{R}$ est non dénombrable, c'est-à-dire que l'on ne peut pas établir une liste mettant en correspondance tous les éléments de $\mathbf{R}$ avec ceux de $\mathbf{N}$.

Puissances et exposants

6. Mettez les expressions suivantes sous la forme la plus simple possible (sans calculatrice).

   a) $(5\times 6\times 7)^2$ b) $(2\times 3\times 4\times 5)^3$ c) $(5\times \frac{1}{2}\times \frac{1}{4})^3$

   d) $(3^2)^2$ e) $(10^2\times 5^3)^2$ f) $(4^2\times \frac{1}{2}\times \left(\frac{2}{3}\right)^3\times 9^2)^2$

7. Mettez les expressions suivantes sous la forme la plus simple possible.

   a) $(2a^2)^3$ b) $(5x^4)^3$ c) $(2ab^2)^2$ d) $(-2a^2b^3cd^2)^3$

   e) $\left(\dfrac{3b}{4c}\right)^2$ f) $\left(\dfrac{2a^2b}{b^2cd^3}\right)^2$ g) $\left(\dfrac{5x^2y^2z^3}{-2xyz^2}\right)^3$ h) $\left(\dfrac{-2x^4y^2}{3z^4}\right)^4$

8. Simplifiez.

a) $(5xy^2)(4x^2y^2)$ b) $(-3a^4b^2c^5)^2$ c) $(-x^3yz)^2(2y^5z^4)$ d) $\left(\dfrac{x^5}{y^2}\right)^3$ e) $\left(\dfrac{u^2}{v^3}\right)^{-4}$

f) $\dfrac{(x^2y^{-3})^4}{(xy^2)^{-2}}$ g) $\left(\dfrac{a^{-1}b^5}{a^3b^{-2}}\right)^{-3n}$ h) $\dfrac{a^{-3}b}{c}$ i) $\dfrac{xy^{-2}}{x^{-3}y}$ j) $\dfrac{1+a^{-2}b}{c}$

9. **Notation scientifique.** Pour permettre une lecture et des calculs plus aisés, on écrit souvent un nombre en notation scientifique, comme suit : $x = c \times 10^n$, où $c \in \mathbf{R}$ avec $1 \leq c < 10$ et $n \in \mathbf{Z}$. 9

Par exemple :
· $23470 = 2.3470 \times 10^4$.
· $0.00827 = 8.27 \times 10^{-3}$.
· $225000^2 = (2.25 \times 10^5)^2 = (2.25)^2 \times (10^5)^2 = 5.0625 \times 10^{10}$.
· $10000000 \div 250000 = (1 \times 10^7) \div (2.5 \times 10^5) = (1 \div 2.5) \times (10^7 \div 10^5) = 0.4 \times 10^2 = 4 \times 10^1$.

Simplifiez les expressions suivantes et réécrivez-les en notation scientifique (utilisez une calculatrice et donnez 4 décimales dans votre réponse).

a) $\dfrac{81223 \times 0.05}{45.67}$ b) $\dfrac{0.00001 \times 12.348}{0.02}$ c) $\dfrac{143000^2 \times 2760}{125650}$

10. Réécrivez les expressions suivantes sous la forme la plus simple possible en employant seulement des exposants positifs.

a) $25^{3/2}$ b) $0.00001^{3/5}$ c) $81^{0.75}$ d) $\dfrac{(x^{-1/2}y)^3x^{-5/2}y^4}{(xy^2)^{-2}}$ e) $\sqrt[3]{-27/64}$

f) $\sqrt[5]{(-32)^2}$ g) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{12}$ h) $\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt[3]{t}}$ i) $t^{-3}\sqrt[2]{\sqrt[3]{t^{12}}}$ i) $\sqrt{\dfrac{x^{m-2}}{x^{4-m}}}$

Radicaux

11. Exprimez sous la forme la plus simple possible.

a) $\sqrt{288}$ b) $\sqrt[3]{-2187}$ c) $\sqrt{27a^3b^5}$ d) $\sqrt[n]{x^{3n}y^{2n+5}}$ e) $\sqrt[3]{8x^4y - 24x^3y^2 + 24x^2y^3 - 8xy^4}$

12. Écrivez les expressions suivantes avec des exposants positifs et sous la forme de radicaux de l'ordre demandé.

a) $\sqrt[3]{x^2}$, ordre 6

b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^{-14}}}$, ordre 12

c) $\sqrt{a^{-\frac{1}{n}}}$, ordre $4n$

13. Trouvez la valeur de :

a) $2\sqrt{14} \times \sqrt{21}$

b) $\sqrt[3]{168} \times \sqrt[3]{147}$

c) $\dfrac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{98}} \div \dfrac{5}{7\sqrt{22}}$

d) $3\sqrt{45} - \sqrt{20} + 7\sqrt{5}$

e) $\sqrt{44} - 5\sqrt{176} + 2\sqrt{99}$

f) $5\sqrt[3]{-54} - 2\sqrt[3]{-16} + 4\sqrt[3]{686}$

g) $(3\sqrt{x} - 5) \times 2\sqrt{x}$

h) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2$

i) $(\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - \sqrt{7})$

j) $(\sqrt{2x+a} - \sqrt{2x-a})^2$

k) $(9\sqrt{2} - 7)(9\sqrt{2} + 7)$

l) $(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})$

m) $(2\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) + (5\sqrt{3} - 4\sqrt{2})$

n) $29 + (11 + 3\sqrt{7})$

o) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} \div \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

p) $\dfrac{2\sqrt{15} + 8}{-5 + \sqrt{15}} \div \dfrac{8\sqrt{3} + 6\sqrt{5}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}$

14. Simplifiez et écrivez avec des exposants positifs :

a) $\left(\sqrt[4]{(x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})^3}\right)^{-2/3}$

b) $(4a^{-2} \div 9x^2)^{-1/2}$

c) $\sqrt[6]{a^4x^6} \times (a^{2/3}x^{-1})^{-6}$

d) $\sqrt[n]{a^{n+k}b^{2n-k}} \div \left(a^{\frac{1}{n}}b^{-\frac{1}{n}}\right)^k$

e) $\left(\dfrac{a^{-2}b}{a^3b^{-4}}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{ab^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^5$

f) $\left(a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\sqrt{ax^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$

g) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{x^{-1}a}\right)^2 \div \sqrt{\dfrac{a^{-1}}{x^{-3}}}$

h) $\left(\sqrt{\dfrac{a^{\frac{1}{2}}x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}a^2}} \times \sqrt[3]{\dfrac{a^2\sqrt{x}}{x^{-1}\sqrt{a}}}\right)^{-4}$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{a^3b^3 + a^6}}{\sqrt[3]{(b^6 - a^3b^3)^{-1}}}$

j) $\dfrac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1}} \times 2^{n-1} \times \dfrac{1}{4^{-n}}$

k) $\dfrac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

l) $\dfrac{3^{n+4} - 6 \cdot 3^{n+1}}{3^{n+2} \times 7}$

15. Rationalisez les expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ b) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

d) $\dfrac{a}{a+\sqrt{b}}$ e) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ f) $\dfrac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}$

16. Éliminez les radicaux dans les équations suivantes. Ne résolvez pas les équations obtenues.

a) $\sqrt{x}+8=2y+4$

b) $\sqrt{x+1}-1=x$

c) $\sqrt[3]{y}+z=1$

d) $\sqrt{a}+2\sqrt{b}=ab$

e) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{y+3}=2$

Exercices série 2

Multiplication et division algébrique

1. Effectuez les multiplications.

   a) $-6a^2 \times 7a^4$ b) $8xy \times 6ab \times -2c$

   c) $-5a^3b^2c \times -4ab^3c^2d$ d) $4x^2yz^3 \times -6xy^4zw^2 \times 7xw^4 \times -3xy^2w$

   e) $24a^3b \times -4a^2b^2 \times 6ab^3 \times 7a^3b$

2. Multipliez

   a) $7x^2y$ par $-8x^3y^3$ b) $8x^2 - 9y^2 + 7z^2$ par $12x^2y$

   c) $x^2y^3 - y^3z^4 - z^4x^2$ par $x^2y^2z^2$ d) $a^3 - 2a^2b - 5b^2$ par $-4a^3b^4$

   e) $-(\frac{2}{3}a^2 - \frac{5}{6}ab + \frac{3}{4}b^2)$ par $\frac{1}{2}ab$

3. Calculez le produit et simplifiez.

   a) $(a^2 + ab + b^2) \times (a^2 - ab + b^2)$ b) $(2a^2 + 3ab + 4b^2) \times -(a^2 + 2ab + b^2)$

   c) $(2x^2 + 3xy + 4y^2) \times (5x^2 + 6xy + 7y^2)$ d) $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x^2 + 2xy + y^2)$

   e) $(x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2)(x + y + z)$ f) $(-3s^2 + 4st - 6t^2)(-7s^2 + 3st - t^2)$

   g) $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$

   h) $[(x-1)^2 + (y-2)^3] \times [(x-3)^3 - 2(4+y)]$

   i) $[(y-z)^3 + (y+z)^3 + 3(y+z)(y-z)^2 + 3(y-z)(y+z)^2][y+z]$

4. Effectuez les divisions.

   a) $a^3b^2 \div ab$ b) $8ab^2c^3d^4 \div 4abc^2d^2$

   c) $7a^2xyz^3 \div 7a^2yz^2$ d) $28x^2y^3z^2w^3 \div -7z^2w^2$

   e) $33m^2n^2x \div mnx$

5. Divisez

   a) $12a^4b^2 - 6a^3b^3 + 9a^2b$ par $3a^2b$

   b) $-(-9a^3b + 12a^2b^2 - 15ab^3)$ par $-2ab$

   c) $45x^2y^3 + 50x^3y^4 - 65x^4y^2$ par $5x^2y^2$

   d) $36xy^4 - 20x^2y + 32x^5y^5$ par $2xy$

   e) $35c^4x^4 - 28c^2x^8 - 14c^3x^{12}$ par $7c^2x^4$

6. Calculez le quotient et simplifiez.

   a) $(a^2 + 2ab + b^2) \div (a + b)$

   b) $(4a^2 - b^2) \div (2a - b)$

   c) $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \div (x + y)$

   d) $(x^3 + 4x^2 + 2x - 3) \div (x + 3)$

   e) $(8y^3 + 64x^3) \div (2x + y)$

   f) $(x^3 + xy + x + yx^2 + y^2 - 2y - 3x^2 - 3)$
   $\div(x^2 + y + 1)$

   g) $(a^3 - 6a^2 + 12a - 8) \div (4 - 4a + a^2)$

   h) $(x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24) \div (x + 4)$

   i) $(x^8 - y^8) \div (x^2 + y^2)$

   j) $(2x^2 + xy - 3xz - y^2 + 3yz - 2z^2)$
   $\div(x + y - 2z)$

   k) $\dfrac{6x^3 + 11x^2y - 25xy^2 + 9y^3}{2x - y}$

   l) $\dfrac{x^3 - 8y^3}{x^2 + 2xy + 4y^2}$

7. Déterminez le reste de la division. Pour le d), ordonnez les termes selon les puissances de x.

   a) $(-x^3 + x + 8) \div (x^2 + 2x + 4)$

   b) $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30) \div (x^2 - 1)$

   c) $(x^9 + x^6 + x^3 + x + 1) \div (x^3 + 1)$

   d) $(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \div (x + y - z)$

8. Simplifiez les expressions suivantes.

   a) $\dfrac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{2}{x} - 1}$

   b) $\left(x + \dfrac{xy}{x - y}\right) \times \left(y - \dfrac{xy}{x + y}\right)$

   c) $\dfrac{2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} + \dfrac{y}{1 - \frac{y}{x}} - \dfrac{x}{1 - \frac{x}{y}}$

   d) $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{a}}$

e) $\dfrac{1}{x-\frac{x^2-1}{x+\frac{1}{x-1}}}$

f) $\dfrac{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)}$

g) $\dfrac{\frac{a^2+b^2}{b}-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\times\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

h) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\times\dfrac{\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x}}+\dfrac{\frac{1}{x}}{x-1+\frac{1}{x}}$

Factorisation

9. Mettez en facteurs en employant la méthode indiquée.

   a) Mise en évidence de facteurs communs

      i) $3a^2h+6ah^2-9h^3$

      ii) $(p^2-pa)(p^2-pb)$

      iii) $2R^2\sqrt{2}+\frac{1}{3}R^2\sqrt{3}$

      iv) $8a^4b^4-6a^2b^3+10ab^5$

      v) $5a^2b^3c^2+15a^3b^2c^2+75a^2b^2c^2-35a^4b^5cd^5$

   b) Regroupement de termes

      i) $ab+b^2+ac+bc$

      ii) $x^2+3x-x-3$

      iii) $ax+bx+cx-ay-by-cy$

      iv) $28bc^2y+14acxy-12b^2cx-6abx^2$

      v) $ax+3a^2+2ab+bx+3ab+2b^2$

   c) Équation quadratique

      i) $y^2+8y+15$

      ii) $4x^2-x-3$

      iii) x^2+4x-4

      iv) $x^2+2x-35$

      v) $64x^2-80x+25$

      vi) y^2-3y+3

      vii) $x^2y^2+2xy-3$

      viii) $2x^2y+4xy-6y$

   d) Identités remarquables

      i) y^2-49z^2

      ii) $\dfrac{x^2y^2}{10}-\dfrac{9a^2b^2}{25}$

      iii) $81a^2+36ax-49x^2+4x^2$

      iv) $(2x+y-5)^2-(3-4x)^2$

      v) $2x^3y+250y^4$

   e) Début du carré

      i) $a^4+a^2b^2+b^4$

      ii) $9x^4-19x^2y^2+25y^4$

      iii) $49x^4+45x^2b^2+25b^4$

      iv) $81a^4-27a^2b^2+b^4$

f) Méthode de la racine évidente

i) $2x^3 - x^2 + 4x - 5$

ii) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

iii) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 8$

iv) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

10. Mettez en facteurs en utilisant la méthode la plus appropriée.

a) $3x^2 - 10x + 3$

b) $x^4 - 5x^2 + 4$

c) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

d) $(a+b)^2 - (c-d)^2$

e) $x^2 - 25x + 150$

f) $x^2 - x - y^2 + y$

g) $6 - a - a^2$

h) $x^2 - y^4$

i) $x^3 - 5x^2 - 6x + 10$

j) $3a^2 + 6ab + 3b^2$

k) $(a^2 - b^2) + (a + b)$

l) $x^3 - 4x^2 - 5x + 20$

m) $a^4 - 64$

n) $x^2 - 4x - xa^2 + 4a^2$

o) $10x^2 + 9x - 1$

p) $y^4 + 8y^2 + 7$

q) $1 - (3x - 4y)^2$

r) $x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 6y$

s) $4x^3 - 4x^2 - x + 1$

t) $4x^2 + x + 3$

Exercices série 3

Équations quadratiques

1. Résolvez les équations suivantes.

a) $(x-1)(x+2) = 3(x-1)$

b) $x^2 + 6x - 7 = 1 - x$

c) $4x^2 + 4x - 3 = 0$

d) $4x^2 + 10x + 3 = 3x$

e) $2x^3 + 24x^2 + 70x = 0$

Équations se ramenant à un équation quadratique

2. Résolvez les équations suivantes.

a) $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 12 = 0$

b) $x^8 + 6x^4 = 16$

c) $x^{-6} - 11x^{-3} - 26 = 0$

d) $x^4 - 53x^2 + 196 = 0$

e) $x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{4}} - 10x = 0$

Équations comportant des radicaux

3. Résolvez les équations suivantes.

a) $x + \sqrt{x-4} = 10$

b) $x = \sqrt{3x-4}$

c) $\sqrt[3]{1-2x} + x = 0$

d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$

e) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{5x+2} = -1$

Équations comportant des valeurs absolues

4. Résolvez les équations suivantes.

a) $|x-2| = 3x+2$

b) $|5x+3| = 8$

c) $|x^2 - 3| = 2x$

d) $|x+1| + |x+2| = 3$

e) $|x+3| - |2x+1| = 1$

f) $|x^2 - 1| + |2x-3| = 5$

Équations fractionnaires

5. Résolvez les équations suivantes.

a) $\dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$

b) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{10}{x^2-25} + \dfrac{4}{x+5} - \dfrac{1}{x-5} = 0$

d) $\dfrac{1}{x^2+x-12} + \dfrac{1}{x^2-x-6} = \dfrac{2}{x^2-2x-3}$

e) $\dfrac{4x+2}{x^2-2x-3} + \dfrac{3x-1}{2x+3} - \dfrac{2x+1}{2x-6} = 0$

Problèmes supplémentaires

6. Résolvez les équations suivantes.

a) $\dfrac{1}{x^2-10} = \dfrac{2}{2x^2-7x+3}$

b) $(2x+3)(x-2) = 5(x-2)$

c) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} = 2$

d) $9x^2 + 8x + 8 = 6 - x$

e) $|x^2-3| - |2x^2+1| = x$

f) $\dfrac{2x}{(2x+3)(x-2)} = \dfrac{2+x}{2x^2-x-6} + \dfrac{x}{2}$

g) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} = -1$

h) $\sqrt[4]{x^2+1} = x$

i) $|x+1| + |2x+3| - |2x-2| = 1$

j) $\dfrac{2}{x^{10}} + \dfrac{5}{x^5} - 3 = 0$

Exercices série 4

Fonctions

1. Donnez le domaine et l'image des fonctions suivantes.

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^4$

b) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 4}$

e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) =$ partie entière de x

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

g) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 2}$

h) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 5}$

2. Déterminez si chacune des fonctions suivantes est injective, surjective ou bijective.

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^4$

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^5$

c) $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x}$

d) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \setminus \{0\}, f(n) =$ nombre de diviseurs de n

e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b,\ a \neq 0$

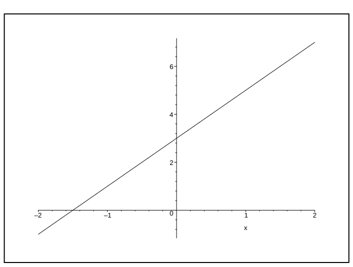
3. Quel est l'inverse des fonctions suivantes ?

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = 2x + 1$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

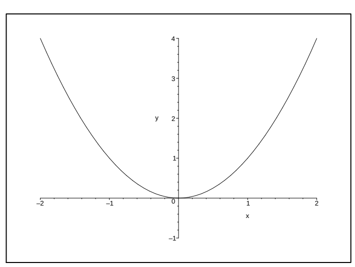
4. Associez chaque fonction avec son graphe.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = 2x + 3$

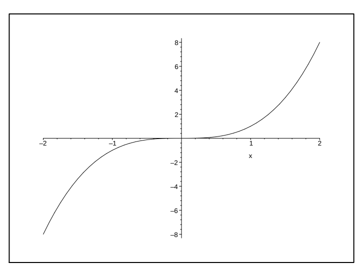
d) $f(x) = x^4$ e) $f(x) = 1 - x$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



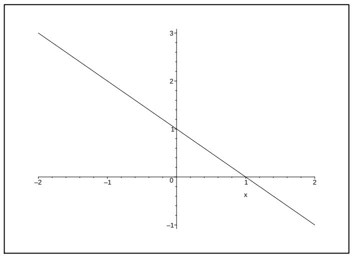
(1)



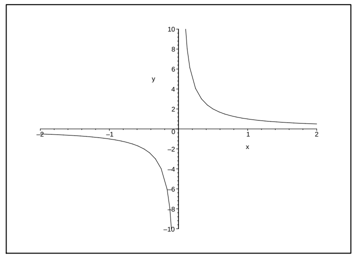
(2)



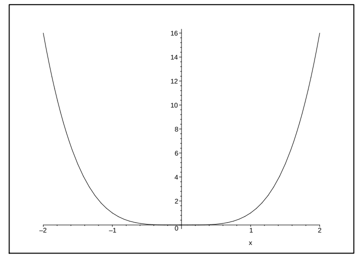
(3)



(4)



(5)



(6)

Fonctions exponentielles et logarithmiques

5. Déterminez les quantités demandées.

   a) Si $8^x = 5$, que vaut 2^{12x} ? b) Si $4^x = 2^7$, que vaut x ?

   c) Si $25^x = 5^{4x+2}$, que vaut x ? d) Si $27^x = 9 \cdot 3^x$, que vaut x ?

   e) Si $49^x = 3^2$, que vaut 7^{3x} ?

6. Déterminez

   a) $\log_2(32)$ b) $\log_{10}(0.00001)$

   c) $\log_{10}\left(\frac{1}{1000000}\right)$ d) $\log_b(b^2)$

   e) $\log_8(1)$ f) $\log_2(2^3)$

7. Déterminez les quantités demandées. Sauf pour d), n'utilisez pas de calculatrice.

   a) Que vaut $\log_3(9 \cdot 27)$?

   b) Si $\log_b(3) = 0.68$ et $\log_b(4) = 0.86$, que vaut $\log_b(12)$?

   c) Si $\log_b(3) = 0.68$, que vaut b ? (utilisez une calculatrice et donnez 2 décimales).

   d) Si $\log_b(2) = 0.3$ et $\log_b(3) = 0.47$, que vaut $\log_b(36)$?

   e) Quelle est la valeur de $\log_2(3) - \log_2(48)$?

   f) Quelle est la valeur de $\log_6(8) + \log_6(9) - \log_6(2)$?

   g) Sachant que $\log_5(25/4) = 1.13$, calculez la valeur de $3 - \log_5(5) + \log_5(2)$.

   h) Sachant que $\ln(2) = 0.69$, calculez $\ln(8)$.

   i) Sachant que $\log_{10}(6) = 0.77$, calculez $\log_{10}(360\,000)$ (Indice : $360\,000 = 600^2$).

8. Sachant que $\ln(x) = 1.60$ et $\ln(10) = 2.30$, calculez

   a) $\log_{10}(x)$ b) $\log_{10}(10x)$ c) $\log_{10}(100x)$

   d) $\log_{10}(x^2)$ e) $\log_{10}(x^2/100)$

9. Montrez que

   a) $\ln(2) = \dfrac{1}{\log_2(e)}$ b) $\ln(32) = \dfrac{5}{\log_2(e)}$ c) $\log_2(2e) = 1 + \dfrac{1}{\ln(2)}$

Exercices série 5

Équations exponentielles et logarithmiques

1. Résolvez les équations suivantes.

   a) $2^{x+1} = 128$ b) $(0.01)^x = 10$

   c) $3^{2x+3} = 8^{3x-4}$ d) $7^{3x}(5^{x-1}) = 35$

   e) $4^{-x} = 8^{x+2}$

2. Résolvez les équations suivantes.

   a) $\log_3(x+3) = 2$ b) $\log_3(3x+4) - \log_3(2x-2) = 2$

   c) $\ln(x) + \ln(x+2) = 1$ d) $\log_2(x^2-16) - \log_2(x-4) = 4$

   e) $\log_2(x+1) + 2\log_2(x) = 1$

3. Résolvez

   a) $\log((2x-3)^3) = 3$ b) $25^{x+1} = 5^{x^2}$

   c) $4^{2x+1} = 7^{2x-1}$ d) $\dfrac{1}{16^{x^2}} = 2^{x+1}$

   e) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$ f) $\ln(x^2-4) - \ln(x+2) = 6$

   g) $3^{4x-1} = 729$ h) $\log_2(x+1) + 2\log_2(x-2) = 2$

   i) $x^{\log(x)} = 10$ j) $x^{\log_2(x)} = 4x$

4. Un montant de 2500\$ est investi à un taux annuel de 10%, composé annuellement.
   a) Quel sera le montant accumulé dans 3 ans ?
   b) Dans combien de temps l'investissement initial aura-t-il doublé ?
   c) Si on veut doubler son investissement en 5 ans, à quel taux faut-il investir ?

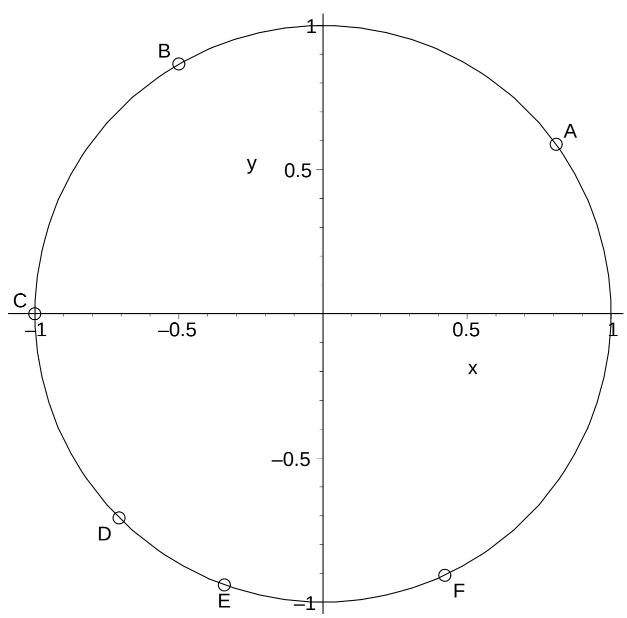
5. Vous investissez 1000\$ à 8% annuellement, composé à chaque 6 mois.
   a) Combien aurez-vous dans 3 ans ?
   b) Dans combien de temps votre investissement aura-t-il triplé ?
   c) Si vous voulez avoir 3000\$ dans 10 ans, quel montant devez-vous investir ?
   d) Si vous voulez tripler votre investissement dans 12 ans, à quel taux d'intérêt devez-vous investir ?

Trigonométrie

6. Effecteur les conversions demandées.
   a) $63°$ en radians. b) $25° \, 20'$ en radians.
   c) $\dfrac{\pi}{5}$ en degrés. d) 2 radians en degrés, minutes et secondes.

7. Déterminez les quantités demandées.
   a) Quelle est la longueur de l'arc sous-tendu par un angle au centre de 5 rad dans un cercle de rayon 3 ?
   b) Quelle est la longueur de l'arc sous-tendu par un angle au centre de $22°$ dans un cercle de rayon 10 ?
   c) Quelle est l'aire du secteur d'un cercle de rayon 6 délimité par un angle au centre de $\dfrac{\pi}{12}$ rad ?

8. Identifiez les points correspondant aux angles suivants sur le cercle trigonométrique ci-dessous.
   a) $\frac{\pi}{5}$ b) $\frac{5\pi}{4}$ c) $295°$ d) $-\frac{4\pi}{3}$ e) $-110°$ f) 19π



9. a) Si $\cos(\theta) = \dfrac{1}{3}$ et le point trigonométrique correspondant à θ est dans le premier quadrant, que vaut $\sin(\theta)$?
   b) Si $\cos(\theta) = \dfrac{4}{5}$ et le point trigonométrique correspondant à θ est dans le quatrième quadrant, que vaut $\sin(\theta)$?

c) Si $\sin(\theta) = -\frac{2}{3}$ et le point trigonométrique correspondant à θ est dans le troisième quadrant, que vaut $\tan(\theta)$?

d) Si $\sin(\theta) = \frac{1}{4}$ et le point trigonométrique correspondant à θ est dans le deuxième quadrant, que vaut $\sec(\theta)$?

10. Complétez le tableau suivant et vérifiez vos réponses à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de mathématiques.

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$	θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	1	0	0	$\frac{5\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$	0	1	non définie	$\frac{7\pi}{4}$			
$\frac{2\pi}{3}$				$\frac{11\pi}{6}$			
$\frac{3\pi}{4}$				$-\frac{\pi}{6}$			
$\frac{5\pi}{6}$				$-\frac{\pi}{4}$			
π				$-\frac{\pi}{3}$			
$\frac{7\pi}{6}$				$-\frac{\pi}{2}$			

Exercices série 6

Identités trigonométriques

1. Utilisez les identités trigonométriques pour démontrer les égalités suivantes.

   a) $(1-\sin^2(t))(1+\tan^2(t))=1$

   b) $2\sec^2(t)=\dfrac{1}{1+\sin(t)}+\dfrac{1}{1-\sin(t)}$

   c) $\dfrac{1}{\sec(t)+\tan(t)}=\sec(t)-\tan(t)$

   d) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\tan(B)}$

   e) $\tan(x)\sin(2x)=2\sin^2(x)$

2. Simplifiez les expressions suivantes.

   a) $(1+\tan^2(t))\cos(t)$

   b) $\dfrac{1}{\sin(t)\cos(t)}-\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$

   c) $(\sin^2(x)-\cos^2(x))\left(\dfrac{\tan(x)+\cot(x)}{\tan(x)-\cot(x)}\right)$

   d) $\dfrac{2-\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}-1+2\sin^2(\theta)$

   e) $\cos(5\pi/12)-\cos(\pi/12)$

   f) $\sin(3\pi/8)\cos(\pi/8)$

   g) $\dfrac{\sin(3x)+\sin(5x)}{\cos(x)\sin(2x)}$

   h) $\dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)+\sin(x)}$

3. Exprimez comme une somme de sinus et cosinus.

   a) $\sin(x)\sin(4x)$ b) $\cos(x)\cos(2x)$

   c) $2\sin(x)\cos(2x)$ d) $3\cos(x)\cos(4x)$

4. Exprimez comme un produit.

   a) $\sin(3x)+\sin(8x)$ b) $\cos(5x)-\cos(3x)$

   c) $\cos(x)+\cos(3x)$ d) $\sin(x)-\sin(3x)$

Graphe des fonctions trigonométriques

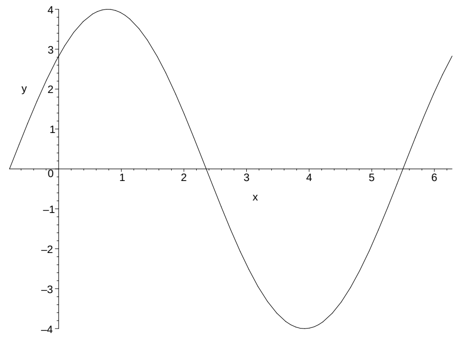
5. Associez chaque fonction avec son graphe (à la page suivante).

   a) $f(x)=-3\sin(x)$ b) $f(x)=-\tan(x)$

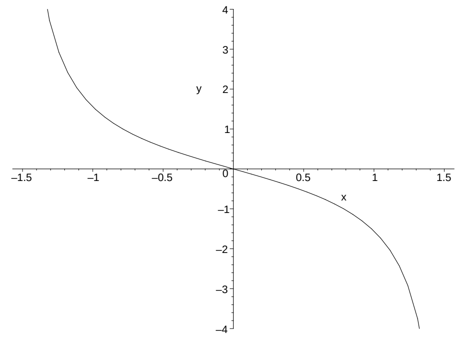
   c) $f(x)=4\cos(x-\pi/4)$ d) $f(x)=2\sin(4x)$

   e) $f(x)=3\cos(2x+\pi/6)$

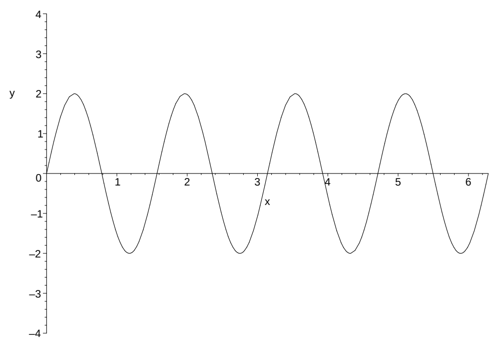
(A)



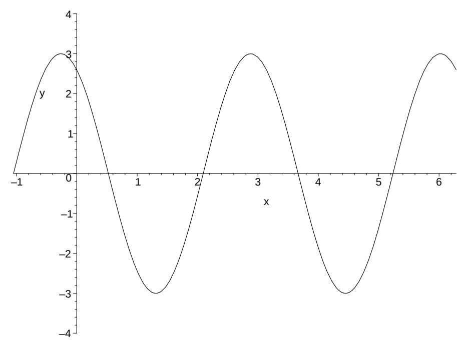
(B)



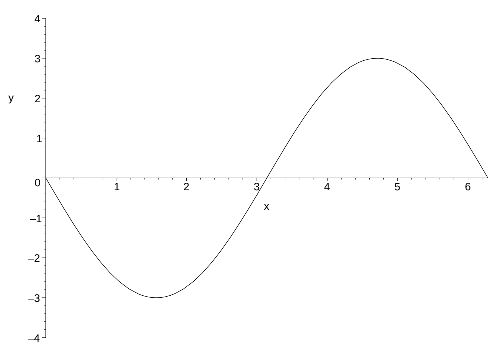
(C)



(D)



(E)



Exercices série 7

Équations trigonométriques

1. Trouvez toutes les solutions aux équations suivantes.

a) $\cos(5x) = -\sqrt{3}/2$

b) $2\sin^2(3x) = \sin(3x) + 1$

c) $\cos(2x - \pi/4) = -1/2$

d) $\tan(3x) = \sqrt{3}$

e) $\sin(3x + \pi) = -1$

f) $\sin(3x) = \cos(x)$

g) $\cos(x) = \sin(2x + \pi/3)$

h) $2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 = 0$

i) $\tan^2(x) - (1 + \sqrt{3})\tan(x) + \sqrt{3} = 0$

j) $\cos(x) = \sin(x) + \sin(3x)$

2. Déterminez tous les zéros de la fonction dans l'intervalle donné.

a) $f(x) = -100\sin\left(\frac{\pi}{4}(x - 4)\right) + 100$, $x \in [-8, 8]$

b) $f(x) = 3\cos(x - 2) + 3/2$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$

Dérivées

3. Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

b) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$

c) $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$

d) $y = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{6}{x^{1/3}} - \dfrac{2}{x^{3/2}} - \dfrac{4}{x^{3/4}}$

e) $y = \sqrt[3]{3x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{5x}}$

f) $y = (x^2 - 3)^4$

g) $y = \dfrac{3}{(a^2 - x^2)^2}$ (a une constante)

h) $y = (x^2 + 6x + 3)^{1/3}$

i) $y = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$

j) $y = \dfrac{3 - 2x}{3 + 2x}$

k) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

l) $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

m) $y = \left(\dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)^4$

n) $y = \sqrt{x^3(3 - x^2)}$

o) $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

4. Calculez les dérivées indiquées.

   a) $y = 3x^4 - 2x^2 + x - 5; y'''$

   b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}; y^{(4)}$

   c) $y = \sqrt{2 - 3x^2}; y''$

   d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}; y''$

   e) $y = x^3 + 3x^2 - 8x - 2; y^{(6)}$

   f) $y = \dfrac{1}{x^2}; y^{(n)}$

5. Déterminez l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction au point donné.

   a) $f(x) = 3x^3 + 2x - 1, x = 0$

   b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x = 1$

   c) $g(x) = x^2 - 4x + 1, x = 2$

   d) $k(x) = \dfrac{1}{x}, x = 1/3$

Exercices série 8

Dérivation implicite

1. Calculez les dérivées demandées.
   a) y' si $xy^3 + xy - 2y - 1 = 0$ b) y' si $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$
   c) y' si $x\cos(y) = \sin(2xy)$ d) y' si $xe^y = y^2$
   e) $y'(1)$ et $y''(1)$ si $x^3y + xy^3 = 2$ et $y(1) = 1$

2. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe au point donné.
   a) $xy^3 - 2xy = 1$ en $(1, -1)$ b) $x^4 = 4(x^2 - y^2)$ en $(1, \sqrt{3}/2)$

3. Déterminez la dérivée des fonctions inverses suivantes.
   a) $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ b) $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$

Dérivation logarithmique

4. Calculez la dérivée des fonctions suivantes.
   a) $f(x) = \cos(x)^x$ b) $g(x) = x^{x^2+1}$ c) $h(x) = x^{\ln(x)}$

5. Utilisez la dérivation logarithmique pour calculer la dérivée des fonctions suivantes.
   a) $y = (x^3 + 2)^2(1 - x^2)^4(x^5 - 3x)x^2(1 - x)$ b) $y = \dfrac{x(1 - x^2)^3}{(1 + x^2)(x + 1)^{2/3}}$
   c) $y = \dfrac{x\sin(x)\cos(x)}{1 + \cos(x)}$ d) $y = \dfrac{xe^x\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Applications de la dérivée

6. Soit $y = f(x)$ une courbe dans le plan. Si $f(2) = -3$ et $f'(2) = 5$, quelle est l'équation de la tangente à la courbe au point $(2, -3)$?

7. Tracez le graphe des fonctions suivantes.
   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

8. Trouvez les minimums et maximums locaux et globaux des fonctions suivantes.
   a) $f(x) = x(12 - 2x)^2$ b) $g(x) = e^{-x^2}$ c) $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

9. Une boîte métallique à base carré a un volume de 32 cm^3. Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimise la quantité de métal utilisée pour sa fabrication ?

10. On dispose de 200 m de clôture pour entourer un champ rectangulaire. Quelles sont les dimensions du champ d'aire maximale qu'il est possible de clôturer avec le matériel dont on dispose ?

Exercices série 9

Changement de variable et intégration par parties

1. Calculez les intégrales suivantes à l'aide des formules de base et de changements de variable.

a) $\displaystyle\int (2x^2 - 5x + 3)\, dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\, dx$

c) $\int \dfrac{dx}{x^2}$

d) $\displaystyle\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}$

f) $\displaystyle\int 3(x^3+2)^2 x^2\, dx$

g) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$

h) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x-3}$

j) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\, dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}\, dx$

l) $\displaystyle\int (e^x+1)^3 e^x\, dx$

m) $\displaystyle\int \sin(\frac{x}{2})\, dx$

n) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^2(x)\, dx$

o) $\displaystyle\int \tan(2x)\, dx$

p) $\int e^x \cos(e^x)\, dx$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+9}$

r) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\, dx$

s) $\displaystyle\int \cos^2(3x)\, dx$

t) $\displaystyle\int x\sin^3(x^2)\, dx$

2. Calculez les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties.

a) $\displaystyle\int x\cos(5x)\, dx$

b) $\displaystyle\int x^2\ln(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\, dx$

d) $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx$

e) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\, dx$

f) $\displaystyle\int x^2\sin(4x)\, dx$

g) $\displaystyle\int \sin(x)\ln(\cos(x))\,dx$ h) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int e^{-x}\sin(x)\,dx$ j) $\displaystyle\int e^{3x}\cos(2x)\,dx$

Intégrale définie

3. Calculez les intégrales définies suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^5 (3-2x-x^4)\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)^{3/2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos(2x)\sin(2x)\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{10} xe^{-x^2}\,dx$

4. Calculez l'aire de la région délimitée par les courbes données.
a) $y = 4x^2$ et $y = x^2+3$
b) $y = e^x$ et l'axe des x, au-dessus de [0,2]
c) $y = \sin(x)$ et l'axe des x, pour $x \in [0, 2\pi]$
d) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ et $y = x^2 - x$ pour $x \in [0, 2]$.

Exercices série 10

Substitution trigonométrique et décomposition en fractions partielles

1. Calculez chacune des intégrales suivantes à l'aide de la décomposition en fractions partielles.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx$

2. Calculez chacune des intégrales suivantes en utilisant une substitution trigonométrique.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+2x^2)^{3/2}}$

e) $\displaystyle\int \sqrt{16x^2-1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x}\,dx$

Exercices supplémentaires

3. Calculez chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une technique appropriée.

a) $\displaystyle\int x^2\cos(2x+3)\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2}}$

c) $\displaystyle\int (x-1)^2(x+2)^{10}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$

e) $\displaystyle\int 9\cos^3(3x)\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$

g) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-3x+2}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}\,dx}$ j) $\displaystyle\int \sec(x)\tan^3(x)\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+5)^4}\,dx$ l) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$

Exercices série 11

Vecteurs géométriques

1. Parmi les quantités suivantes, déterminez lesquelles sont des scalaires et lesquelles sont des vecteurs.

a) Le poids	b) La chaleur spécifique	c) La quantité de mouvement
d) La densité	e) L'énergie	f) La vitesse
g) Le volume	h) La direction	i) Le champ magnétique
j) La masse		

2. Représenter graphiquement les vecteurs suivants dans le plan.
   a) $2\vec{i}+3\vec{j}$ b) $-\vec{i}+\vec{j}$ c) $-4\vec{j}$ d) $-5\vec{i}+\vec{j}$

3. Exprimez les vecteurs suivants dans la base canonique.

   a) $\vec{v}$ de norme 4 et formant un angle de $\pi/3$ avec l'axe des x.

   b) $\vec{v}$ de norme 2 et perpendiculaire à l'axe des y.

   c) $\vec{v}$ unitaire et formant un angle de $\pi/4$ avec l'axe des x.

   d) $\vec{v}$ ayant la même direction que $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}$, sens opposé et norme deux fois plus petite.

   e) Le vecteur d'origine $A=(1,2)$ et d'extrémité $B=(5,-2)$.

   f) Le vecteur dont la représentation graphique relie les points $A=(-1,1)$ et $B=(1,-1)$.

   g) Le vecteur d'origine $A=(1,2,3)$ et d'extrémité $B=(-4,5,-6)$.

   h) Le vecteur d'origine $A=(0,1,2)$ déterminé par le point $B=(3,0,0)$.

4. Soit les points du plan $A=(0,2)$, $B=(3,1)$, $C=(-1,1)$ et $D=(3,-4)$. Déterminez les points demandés.

   a) P si $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{CP}$ b) Q si $3\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{BC}=\vec{CQ}$

   c) R si $\vec{BR}=3\vec{CB}$ d) S si $\vec{AS}+2\vec{BC}-5\vec{DS}=\vec{0}$

   e) T si $3\vec{BT}=4\vec{TC}$ f) U si $\vec{DU}=\vec{0}$

5. Soit les points de l'espace $A=(1,2,3)$, $B=(-1,0,1)$ et $C=(0,0,2)$. Déterminez les points demandés.
   a) P si $\frac{1}{2}\vec{AB}=\vec{CP}$ b) Q si $\vec{AQ}+\vec{BQ}-2\vec{AC}=\vec{0}$ c) R si $\vec{AR}+\vec{BC}=\vec{k}$

6. Soit les points du plan $A=(1,2)$, $B=(-3,4)$ et $C=(1,-1)$.
   a) Quelle est la norme de $\vec{AB}$? b) Quelle est la distance entre A et B ?
   c) Quel est α si $|\vec{AB}+\alpha\vec{AC}|=5$?

Produit scalaire

7. Calculez le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si

   a) $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

   b) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$

   c) $\vec{u} = 7\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 7\vec{j}$

   d) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = -8\vec{k}$

   e) $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$, où $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, -1, 1)$ et $C = (5, 0, 2)$

   f) $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ et l'angle entre le vecteurs est $\pi/4$.

8. Quels sont les vecteurs perpendiculaires dans l'exercice précédent ?

9. Déterminez α si

   a) $\vec{u} = \alpha\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ et ces vecteurs sont perpendiculaires.

   b) $\vec{u} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{v} = -4\vec{i} - 10\vec{j}$ et ces vecteurs sont parallèles.

   c) $\vec{u} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $|\vec{u}| = \sqrt{14}$.

   d) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\alpha\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

10. Calculez l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si

    a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$

    b) $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{CD}$ où $A = (2, 5)$, $B = (3, 5)$, $C = (-1, 2)$ et $D = (0, 2 - \sqrt{3})$

Exercices série 12

Opérations sur les matrices

Pour les questions 1 à 5, utilisez les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Pour les matrices ci-dessus
   a) Donnez la dimension de chacune.
   b) Identifiez a_{32}, b_{22}, c_{22}, d_{14}, e_{33}, f_{11}, g_{22}.

2. Effectuez les opérations suivantes lorsque c'est possible. Sinon, dites pourquoi l'opération est impossible. I_n dénote la matrice identité $n \times n$.
   a) $A + B$ b) $4D$ c) $A + C$ d) $E + 3C$ e) $2D - 5G$
   f) $E^t + C + 3I_3$ g) $B - A$ h) $I_4 - 5A$ i) $A + F^t$ j) $C^t + 2F$

3. Ici, $0_{m\times n}$ dénote la matrice nulle $m \times n$. Déterminez, lorsque c'est possible, la matrice A telle que
   a) $C - 2E + X = 0_{3\times 3}$ b) $B + 2X = 2A$ c) $E - X = 4I_3$
   d) $3X + C = 2B$ e) $A^t X = 0_{4\times 1}$

4. Calculez les produits CE et EC. Les résultats sont-ils égaux ?

5. Effectuez les opérations suivantes si c'est possible.
   a) AB b) CA c) $(2B)F$ d) DG e) $G(4D)F$
   f) $(C + E)A$ g) $(2A + 3B)G$ h) DC i) DF j) AD^t

Matrice inverse

6. Déterminez, si possible, l'inverse des matrices suivantes.
   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminant et produit vectoriel

7. Calculez le déterminant des matrices suivantes, si possible.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1/2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -6 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix}$

8. Parmi les matrices de l'exercice précédent, lesquelles sont inversibles ?

9. Calculez les produits vectoriels suivants.

a) $\vec{i} \times \vec{j}$ b) $\vec{j} \times \vec{k}$

c) $(\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$ d) $\vec{u} \times \vec{v}$ si $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j} - 4\vec{k}$

e) $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ si $P = (0, 1, 2)$, $Q = (1, 0, 1)$ et $R = (0, 3, -2)$

10. Donnez un exemple pour illustrer les énoncé suivants.
a) $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

11. Calculez l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{j} + 10\vec{k}$.

12. Calculez le volume du parallélipipède engendré par $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{j} + 10\vec{k}$ et $\vec{w} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$.

Exercices série 13

Systèmes linéaires

1. Utilisez la méthode de la matrice inverse pour trouver, si possible, la solution au système. La matrice A dont l'inverse est donné est la matrice des coefficients.

a) $\begin{cases} 6x & -3y & = 8 \\ 5x & -2y & = 7 \end{cases}$ si $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & = 1 \end{cases}$ si $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} x & +3y & +z & = -5 \\ 2x & -y & -3z & = 6 \\ -x & +2y & +4z & = 1 \end{cases}$ si $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 8 \\ 5 & -5 & -5 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} x & -2y & & & = 10 \\ 2x & +2y & -z & & = 12 \\ & y & +2z & -w & = 8 \\ & & z & -2w & = 15 \end{cases}$ si $A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 12 & -6 \\ 2 & -1 & 6 & -13 \end{pmatrix}$

2. Utilisez la méthode de Gauss pour trouver, si elles existent, toutes les solutions au système.

a) $\begin{cases} x & +2y & -3z & = 4 \\ x & +3y & +z & = 11 \\ 2x & +5y & -4z & = 13 \\ 2x & +6y & +2z & = 22 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x & +y & -2z & +3w & = 1 \\ 3x & +2y & -z & +2w & = 4 \\ 3x & +3y & +3z & -3w & = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x & +y & -2z & = 10 \\ 3x & +2y & +2z & = 1 \\ 5x & +4y & +3z & = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x & +2y & -3z & = 6 \\ 2x & -y & +4z & = 2 \\ 4x & +3y & -2z & = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x & +y & -z & = 0 \\ 2x & -3y & +z & = 0 \\ x & -4y & +2z & = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x & +2y & -z & = 1 \\ 2x & +5y & +z & = 0 \\ 4x & +9y & -2z & = 3 \end{cases}$

3. Utilisez la méthode de Gauss-Jordan pour trouver, si elles existent, les solutions au système.

a) $\begin{cases} 2x & +3y & = 1 \\ 5x & +7y & = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x & +y & -3z & = 5 \\ 3x & -2y & +2z & = 5 \\ 5x & -3y & -z & = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x & +2y & +3z & = 5 \\ 2x & +3y & +8z & = 2 \\ 3x & +2y & +16z & = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x & +2y & -3z & +2w & = 2 \\ 2x & +5y & -8z & +6w & = 5 \\ 3x & +4y & -4z & +2w & = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x & +3y & -2z & = 5 \\ x & -2y & +3z & = 2 \\ 4x & -y & +4z & = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x & +3y & -2z & = 0 \\ x & -3y & +4z & = 0 \\ -2x & +4y & +z & = 0 \end{cases}$

4. Quel est le rang des matrices suivantes ?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. Résolvez les systèmes suivants à l'aide de la méthode de votre choix.

a) $\begin{cases} 2x & -y & +3z & = 2 \\ x & +2y & +z & = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x & +2y & +3z & = 1 \\ 2x & +3y & +z & = 0 \\ 3x & +2y & +z & = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x & & +4z & = 0 \\ 2x & +y & -3z & = 0 \\ x & +2y & +2z & = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x & +y & -3z & +2w & = 13 \\ 2x & +2y & -3z & & = 9 \\ & y & -6z & +2w & = 14 \\ x & +y & & +w & = 6 \end{cases}$

6. Calculez l'inverse des matrices suivantes à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Droites et plans

8. Déterminez les équations paramétriques de la droite

   a) passant par l'origine et dont le vecteur directeur est $3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$.

   b) passant par les points $P=(1,2,3)$ et $Q=(-3,-1,5)$

   c) passant par le point $P=(1,2,3)$ et parallèle à la droite qui passe par $P=(1,0,0)$ et $Q=(0,0,1)$.

   d) passant par $P=(8,-2,3)$ et perpendiculaire au plan d'équation $x+y+z=1$.

9. Déterminez l'équation du plan

   a) passant par le point $P=(5,1,2)$ et perpendiculaire au vecteur $\vec{n}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

   b) passant par les points $P=(1,0,0), Q=(0,1,0)$ et $R=(0,0,1)$.

   c) engendré par les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{j}-\vec{k}$ et contenant le point $P=(6,8,2)$.

   d) passant par l'origine et perpendiculaire à la droite $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -1+3t \\ z & = & 5t \end{array}\right. , t \in \mathbf{R}$.

Troisième partie

Réponses aux exercices

Réponses série 1

1. a) $\mathbf{Q}$ b) $\mathbf{Z}$ c) $\mathbf{N}$ d) $\mathbf{Z}$ e) $\mathbf{R}$ f) $\mathbf{R}$

2. a) Faux b) Vrai c) Vrai d) Faux e) Vrai

3. a) 2 et 3 b) pas de plus petit ni de plus grand c) 1/2, pas de plus grand
d) pas de plus petit, π e) pas de plus petit ni de plus grand

6. a) $25 \times 36 \times 49$ b) $8 \times 27 \times 64 \times 125$ c) $125 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{64}$
d) 81 e) $10^4 \times 5^6$ f) $4^3 \times \dfrac{2^6}{3^6} \times 9^4$

7. a) $8a^6$ b) $125x^{12}$ c) $4a^2b^4$ d) $-8a^6b^9c^3d^6$
e) $\dfrac{9b^2}{16c^2}$ f) $\dfrac{4a^4}{b^2c^2d^6}$ g) $-\dfrac{125}{8}x^3y^3z^3$ h) $\dfrac{16x^{16}y^8}{81z^{16}}$

8. a) $20x^3y^4$ b) $9a^8b^4c^{10}$ c) $2x^6y^7z^6$ d) $\dfrac{x^{15}}{y^6}$ e) $\dfrac{v^{12}}{u^8}$
f) $\dfrac{x^{10}}{y^8}$ g) $\dfrac{a^{12n}}{b^{21n}}$ h) $\dfrac{b}{a^3c}$ i) $\dfrac{x^4}{y^3}$ j) $\dfrac{a^2+b}{a^2c}$

9. a) 8.8923×10 b) 6.1740×10^{-3} c) 4.4917×10^8

10. a) 125 b) $\dfrac{1}{1000}$ c) 27 d) $\dfrac{y^{11}}{x^2}$ e) $-\dfrac{3}{4}$
f) 4 g) x^4 h) $t^{1/6}$ i) $\dfrac{1}{t}$ i) x^{m-3}

11. a) $12\sqrt{2}$ b) $-9\sqrt[3]{3}$ c) $3ab^2\sqrt{3ab}$ d) $x^3y^2\sqrt[n]{y^5}$ e) $2(x-y)\sqrt[3]{xy}$

12. a) $\sqrt[6]{x^4}$ b) $\sqrt[12]{a^{21}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[4n]{a^2}}$

13.

a) $14\sqrt{6}$ b) $14\sqrt[3]{9}$ c) $\frac{33}{10}$ d) $14\sqrt{5}$

e) $-12\sqrt{11}$ f) $17\sqrt{2}$ g) $6x - 10\sqrt{x}$ h) $30 + 12\sqrt{6}$

i) $16 + 6\sqrt{10}$ j) $4x - 2\sqrt{4x^2 - a^2}$ k) 113 l) $a - 4b$

m) $7\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ n) $40 + 3\sqrt{7}$ o) $\dfrac{\sqrt{ax}}{a - x}$ p) -1

14.

a) $\dfrac{x^{1/3}}{y^{1/4}}$ b) $\frac{3}{2}ax$ c) $\dfrac{x^7}{a^{10/3}}$ d) ab^2 e) $\dfrac{1}{a^5}$ f) $a^{\frac{1}{18}}x^{\frac{1}{9}}$

g) $\dfrac{x^{3/2}}{a^{1/6}}$ h) ax^3 i) $ab\sqrt[3]{a^6 - b^6}$ j) 2^{n^2+2n-2} k) 4 l) 1

15.

a) $\sqrt{2} + 1$ b) $-(2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ c) $\dfrac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{6} - 3\sqrt{10}}{28}$

d) $\dfrac{a^2 - a\sqrt{b}}{a^2 - b}$ e) $\dfrac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}$ f) $\dfrac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{x} + x\sqrt{2} - x^{3/2}}{2 - x}$

16.

a) $4y^2 - 16y + 16 - x = 0$ b) $x^2 + x = 0$

c) $1 - 3z + 3z^2 - z^3 - y = 0$ d) $a^4b^4 - 2a^3b^2 - 8a^2b^3 + a^2 - 8ab + 16b^2 = 0$

e) $x^2 - 28x - 8xy + 48y + 16y^2 + 4 = 0$

Réponses série 2

1.

a) $-42a^6$ b) $-96xyabc$

c) $20a^4b^5c^3d$ d) $504x^5y^7z^4w^7$

e) $-4032a^9b^7$

2.

a) $-56x^5y^4$ b) $96x^4y - 108x^2y^3 + 84x^2yz^2$

c) $x^4y^5z^2 - x^2y^5z^6 - x^4y^2z^6$ d) $-4a^6b^4 + 8a^5b^5 + 20a^3b^6$

e) $-\frac{1}{3}a^3b + \frac{5}{12}a^2b^2 - \frac{3}{8}ab^3$

3.

a) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

b) $-2a^4 - 7a^3b - 12a^2b^2 - 11ab^3 - 4b^4$

c) $10x^4 + 27x^3y + 52x^2y^2 + 45xy^3 + 28y^4$

d) $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

e) $x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + y^3 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + z^3$

f) $21s^4 - 37s^3t + 57s^2t^2 - 22st^3 + 6t^4$

g) $a^5 - b^5$

h) $\begin{array}{l} 245 + 328xy + 12x^3y + 54x^2y^2 + 27xy^3 - 162xy^2 - 6x^3y^2 - 11x^4 - 2y^4 - 23y^3 + x^5 \\ +x^3y^3 - 119x - 110x^2y - 9x^2y^3 - 406y - 26x^2 + 38x^3 + 186y^2 \end{array}$

i) $8y^4 + 8y^3z$

4.

a) a^2b b) $2bcd^2$ c) xz d) $-4x^2y^3w$ e) $33mn$

5.

a) $4a^2b - 2ab^2 + 3$ b) $-\frac{9}{2}a^2 + 6ab - \frac{15}{2}b^2$

c) $9y + 10xy^2 - 13x^2$ d) $18y^3 - 10x + 16x^4y^4$

e) $5c^2 - 4x^4 - 2cx^8$

6.

a) $a+b$ b) $2a+b$ c) $x^2+2xy+y^2$

d) x^2+x-1 e) $32x^2-16xy+8y^2$ f) $x-3+y$

g) $a-2$ h) $x^3+6x^2+11x+6$ i) $x^6-y^2x^4+y^4x^2-y^6$

j) $2x-y+z$ k) $3x^2+7xy-9y^2$ l) $x-2y$

7. a) x b) $24-24x$ c) x d) $4z^2$

8.

a) $\frac{1+x}{2-x}$ b) $\frac{x^2y^2}{x^2-y^2}$ c) 0

d) $\frac{1}{a+1}$ e) $\frac{x^2-x+1}{2x-1}$ f) 1

g) $\frac{(a+b)a(a^2+b^2-ab)}{a^2+b^2}$ h) $\frac{2}{x^2-x+1}$

9.

a)

i) $3h(a^2+2ah-3h^2)$ iv) $2ab^3(4a^3b-3a+5b^2)$

ii) $p^2(p-a)(p-b)$ v) $5a^2b^2c(bc+3ac+15c-7a^2b^3d^5)$

iii) $R^2(2\sqrt{2}+\sqrt{3}/3)$

b)

i) $(a+b)(b+c)$ iv) $2(2bc+ax)(7cy-3bx)$

ii) $(x-1)(x+3)$ v) $(a+b)(x+3a+2b)$

iii) $(x-y)(a+b+c)$

c)

i) $(y+5)(y+3)$ iv) $(xy-1)(xy+3)$ vii) $(x-5)(x+7)$

ii) $(x-1)(4x+3)$ v) $(8x-5)^2$ viii) $2y(x+3)(x-1)$

iii) $(x+2-\sqrt{8})(x+2+\sqrt{8})$ vi) irréductible

d)

i) $(y-7z)(y+7z)$ iv) $(6x+y-8)(-2x+y-2)$

ii) $\left(\frac{xy}{\sqrt{10}}-\frac{3ab}{5}\right)\left(\frac{xy}{\sqrt{10}}+\frac{3ab}{5}\right)$ v) $2y(x+5y)(x^2-5xy+25y^2)$

iii) $9(a+x)(9a-5x)$

e)

i) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

ii) $(5y^2 + 7xy + 3x^2)(5y^2 - 7xy + 3x^2)$

iii) $(7x^2 + 5b^2 - 5xb)(7x^2 + 5b^2 + 5xb)$

iv) $(9a^2 - b^2 - 3ab)(9a^2 - b^2 + 3ab)$

f)

i) $(x - 1)(2x^2 + x + 5)$

ii) $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

iii) $2(x - 1)(x - \frac{9+\sqrt{17}}{4})(x - \frac{9-\sqrt{17}}{4})$

iv) $(x + 1)^2(x - 2)(x + 3)$

10.

a) $(3x - 1)(x - 3)$

b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 1)$

c) $(x^2 + y^2 - 3xy)(x^2 + y^2 - 3xy)$

d) $(a + b + c - d)(a + b - c + d)$

e) $(x - 10)(x - 15)$

f) $(x + y - 1)(x - y)$

g) $-(a + 3)(a - 2)$

h) $(x - y^2)(x + y^2)$

i) $(x - 1)(x - 2 - \sqrt{14})(x - 2 + \sqrt{14})$

j) $3(a + b)^2$

k) $(a + b)(a - b + 1)$

l) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - 4)$

m) $(a - \sqrt{8})(a + \sqrt{8})(a^2 + 8)$

n) $(x - a^2)(x - 4)$

o) $(x + 1)(10x - 1)$

p) $(y^2 + 7)(y^2 + 1)$

q) $(1 - 3x + 4y)(1 + 3x - 4y)$

r) $(x + y)(x + y + 6)$

s) $(x - 1)(2x + 1)(2x - 1)$

t) $4x^2 + x + 3$ (irréductible)

Réponses série 3

1.

a) $x = 1$

b) $x = 1, x = -8$

c) $x = 1/2, x = -3/2$

d) $x = -3/4, x = -1$

e) $x = 0, x = -7, x = -5$

2.

a) $x = 64, x = -27$

b) $x = \sqrt[4]{2}, x = -\sqrt[4]{2}$

c) $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, x = \frac{1}{\sqrt[3]{13}}$

d) $x = 2, x = -2, x = 7, x = -7$

e) $x = 0, x = \frac{1}{625}$

3.

a) $x = 8$

b) pas de solution

c) $x = 1, x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

d) $x = 2$

e) $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

4.

a) $x = 0$

b) $x = 1, x = -11/5$

c) $x = 3, x = 1$

d) $x = 0, x = -3$

e) $x = 1, x = -1$

f) $x = -1 + \sqrt{10}, x = -1$

5.

a) $x = -10$

b) $x = 3$

c) pas de solution

d) $x = -5/2$

e) $x = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}, x = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}$

6.

a) $x = 23/7$

b) $x = 1, x = 2$

c) $x = 1$

d) $x = -1/3, x = -2/3$

e) $x = -1, x = 2/3$

f) $x = 1/2, x = -2$

g) $x = 1$

h) $x = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$

i) $x = -1/5, x = -7$

j) $x = \sqrt[5]{2}, x = -\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$

Réponses série 4

1.

a) $\text{dom}(f) = \mathbf{R}, \text{ima}(f) = \mathbf{R}_+$	b) $\text{dom}(f) = \mathbf{N}, \text{ima}(f) = \{0, 1\}$
c) $\text{dom}(f) = [-1, 1], \text{ima}(f) = [0, 1]$	d) $\text{dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$, $\text{ima}(f) = \mathbf{R}$
e) $\text{dom}(f) = \mathbf{R}, \text{ima}(f) = \mathbf{N}$	f) $\text{dom}(f) = \mathbf{R}, \text{ima}(f) =]0, 1]$
g) $\text{dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}\}$, $\text{ima}(f) =]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup]0, \infty[$	h) $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1 \text{ et } x \neq 5\}$, $\text{ima}(f) = \mathbf{R}$

2.

a) ni injective, ni surjective	b) bijective
c) injective	d) surjective
e) bijective	

3. a) $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ c) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

4. a) (2) b) (3) c) (1) d) (6) e) (4) f) (5)

5. a) 625 b) 7/2 c) -1 d) 1 e) 27

6. a) 5 b) -5 c) -6 d) 2 e) 0 f) 3

7. a) 5 b) 1.54 c) 5.0 d) 1.54 e) -4 f) 2 g) 2.435 h) 2.07 i) 5.54

8. a) 0.69 b) 1.69 c) 2.69 d) 1.39 e) -0.61

Réponses série 5

1. a) $x = 6$ b) $x = -0.5$ c) $x = \frac{3+4\log_3(8)}{3\log_3(8)-2}$ d) $x = \frac{\ln(175)}{\ln(1715)}$ e) $x = -6/5$

2. a) $x = 6$ b) $x = 22/15$ c) $x = -1 + \sqrt{1+e}$ d) $x = 12$ e) $x = 1$

3.
   a) $x = 13/2$ b) $x = 1 \pm \sqrt{3}$ c) $x = \frac{1+\log_4(7)}{2\log_4(7)-2}$ d) pas de solution
   e) $x = 3$ f) $x = 2 + e^6$ g) $x = 7/4$ h) $x = 3$
   i) $x = 10, x = 1/10$ j) $x = 4, x = 1/2$

4. a) Environ 3327.50\$ b) Environ 7.27 ans c) Environ 14.8%

5. a) Environ 1265.32\$ b) Environ 14 ans c) Environ 1369\$ d) Environ 9.35%

6. a) $\frac{7\pi}{20}$ rad b) $\frac{19\pi}{135}$ rad
   c) 36° d) $114^\circ\, 35'\, 30''$

7. a) 15 b) $\frac{11\pi}{9}$ c) $\frac{3\pi}{2}$

8. a) A b) D c) F d) B e) E f) C

9. a) $2\sqrt{2}/3$ b) -3/5 c) $2/\sqrt{5}$ d) $-4/\sqrt{15}$

Réponses série 6

2.

a) $\sec(t)$	b) $\tan(t)$
c) 1	d) $\cos^2(\theta)$
e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	f) $\frac{\sqrt{2}+2}{4}$
g) $4\cos(2x)$	h) $\cos(x) - \sin(x)$

3.

a) $\frac{1}{2}(\cos(3x) - \cos(5x)$	b) $\frac{1}{2}(\cos(x) + \cos(3x))$
c) $\sin(3x) - \sin(x)$	d) $\frac{3}{2}(\cos(3x) + \cos(5x))$

4.

a) $2\sin(11x/2)\cos(5x/2)$	b) $-2\sin(4x)\sin(x)$
c) $2\cos(2x)\cos(x)$	d) $-2\cos(2x)\sin(x)$

5. a) E b) B c) A d) C e) D

Réponses série 7

1. Dans tous les cas, $k \in \mathbf{Z}$.

a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{5}k\pi, x = \frac{7\pi}{30} + \frac{2}{5}k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

c) $x = \frac{11}{24}\pi + k\pi, x = \frac{19}{24} + k\pi$ d) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k}{3}\pi$

e) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$ f) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

g) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ h) $x = \pi + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

i) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ j) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$
$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$

2. a) $x = -2, 6$ b) $x = 2 - 2\pi/3, x = 2 + 4\pi/3, x = 2 + 2\pi/3, x = 2 - 4\pi/3.$

3.

a) $y' = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$ b) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

c) $y' = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} - 3x^{1/2}$ d) $y' = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$

e) $y' = \frac{2x}{(3x^2)^{2/3}} + \frac{5}{2(5x)^{3/2}}$ f) $y' = 8x(x^2 - 3)^3$

g) $y' = \frac{12x}{(a^2-x^2)^3}$ h) $y' = \frac{2x+6}{3(x^2+6x+3)^{2/3}}$

i) $y' = 4x(x^2 + 4)(2x^3 - 1)^3 + 18(x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^2x^2$ j) $y' = -\frac{12}{(3+2x)^2}$

k) $y' = \frac{x(8-x^2)}{(4-x^2)^{3/2}}$ l) $y' = \frac{1}{(x+1)\sqrt{(x-1)(x+1)}}$

m) $y' = \frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$ n) $y' = \frac{x^2(9-5x^2)}{2(x^3(3-x^2))^{1/2}}$

o) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

4.

a) $y''' = 72x$ b) $y^{(4)} = \frac{105}{16x^{9/2}}$

c) $y'' = -\frac{6}{(2-3x^2)^{3/2}}$ d) $y'' = \frac{4-x}{4(x-1)^{5/2}}$

e) $y^{(6)} = 0$ f) $y^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$

5. a) $y = 2x - 1$ b) $y = -3$ c) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $y = -9x + 6$

Réponses série 8

1. a) $y' = -\frac{y^3+y}{3xy^2+x-2}$ b) $y' = \frac{y^2-2x-2xy}{x^2+2y-2xy}$

   c) $y' = \frac{\cos(y)-2y\cos(2xy)}{x\sin(y)+2x\cos(2xy)}$ d) $y' = \frac{e^y}{2y-xe^y}$

   e) $y'(1) = -1$, $y''(1) = 0$

2. a) $y = -x$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}$

3. a) $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

4. a) $f'(x) = \cos(x)^x\left(\ln(\cos(x)) - x\tan(x)\right)$ b) $g'(x) = x^{x^2+1}\left(2x\ln(x) + \frac{x^2+1}{x}\right)$

   c) $h'(x) = \frac{2x^{\ln(x)}\ln(x)}{x}$

5.

   a) $y' = (x^3+2)^2(1-x^2)^4(x^5-3x)x^2(1-x)\left(\frac{6x^2}{x^3+2} - \frac{8x}{1-x^2} + \frac{5x^4-3}{x^5-3x} + \frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$

   b) $y' = \left(\frac{x(1-x^2)^3}{(1+x^2)(x+1)^{2/3}}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{6x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{3(x+1)}\right)$

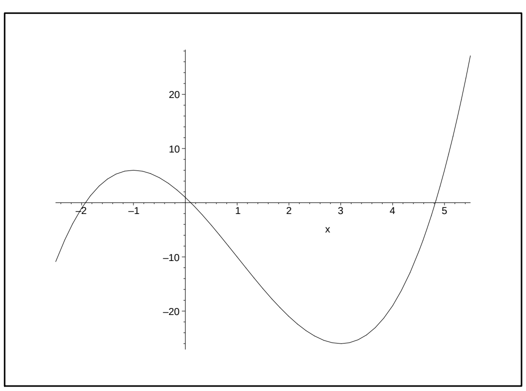
   c) $y' = \left(\frac{x\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)$

   d) $y' = \left(\frac{xe^x\ln(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1} + 1\right)$

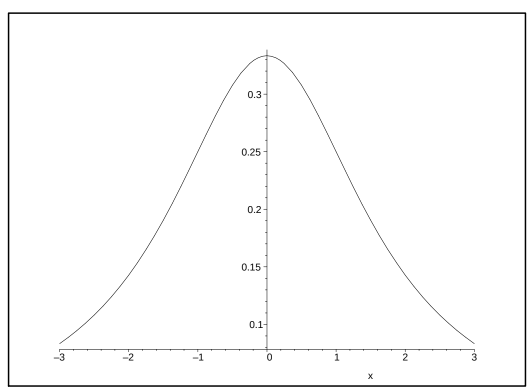
6. $y = 5x - 13$

7.

   a)



   b)



8. a) max local en $x = 2$, min local en $x = 6$, pas de min ou max global.
   b) max global en $x = 0$, pas de min local ou global.
   c) max global en $x = \sqrt{2}$, min global en $x = -\sqrt{2}$.

9. Boîte cubique de côté $2\sqrt[3]{2^2}$ cm.

10. Les dimensions sont 50 m pour tous les côtés (le champ est carré).

Réponses série 9

1.

a) $\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$ b) $\frac{3x^{4/3}}{4} + C$

c) $-\frac{1}{x} + C$ d) $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

e) $\frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C$ f) $\frac{(x^3+2)^3}{3} + C$

g) $-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{3/2} + C$ h) $2x^{1/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

i) $\frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$ j) $\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

k) $x + \ln|x+1| + C$ l) $\frac{1}{4}(e^x+1)^4 + C$

m) $-2\cos(\frac{x}{2}) + C$ n) $\frac{\sin^3(x)}{3} + C$

o) $\frac{1}{2}\ln|\sec(2x)| + C$ p) $\sin(e^x) + C$

q) $\frac{1}{6}\arctan(\frac{2x}{3}) + C$ r) $\frac{1}{3}\arcsin(x^3) + C$

s) $\frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin(6x) + C$ t) $\frac{\cos^3(x^2)}{6} - \frac{\cos(x^2)}{2} + C$

2.

a) $\frac{\cos(5x)}{25} + \frac{x\sin(5x)}{5} + C$ b) $\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$

c) $\frac{2}{15}(1+x)^{3/2}(3x-2) + C$ d) $-(x+1)e^{-x} + C$

e) $e^{3x}(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}) + C$ f) $-\frac{x^2\cos(4x)}{4} + \frac{\cos(4x)}{32} + \frac{x\sin(4x)}{8} + C$

g) $(1-\ln(\cos(x)))\cos(x) + C$ h) $\frac{2}{9}x^{3/2}(3\ln(x)-2) + C$

i) $-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) + C$ j) $\frac{3}{13}e^{3x}\cos(2x) + \frac{2}{13}e^{3x}\sin(2x) + C$

3. a) -635 b) $8\sqrt{2}/5$ c) 3/8 d) 0 e) 1/4 f) $(1-e^{-100})/2$

4. a) 4 b) e^2-1 c) 4 d) 3/2

Réponses série 10

1.

a) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

b) $-\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C$

c) $-\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

d) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$

e) $\frac{5}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$

f) $\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$

2.

a) $\arcsin(x/3) + C$

b) $-\frac{1}{4}x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{8}x(1-x^2)^{1/2}$
$+\frac{1}{8}\arcsin(x) + C$

c) $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$

d) $\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} + C$

e) $\frac{x\sqrt{16x^2-1}}{2} - \frac{1}{8}\ln|4x + \sqrt{16x^2-1}| + C$

f) $\sqrt{25x^2-4} + 2\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{25x^2-4}}\right) + C$

3.

a) $\frac{1}{2}x^2\sin(2x+3) - \frac{1}{4}\sin(2x+3)$
$+\frac{1}{2}x\cos(2x+3) + C$

b) $-\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x} + C$

c) $\frac{(x+2)^{13}}{13} - \frac{(x+2)^{12}}{2} + \frac{9(x+2)^{11}}{11} + C$

d) $\frac{\arcsin(x^3)}{3} + C$

e) $\cos^2(3x)\sin(3x) + 2\sin(3x) + C$

f) $-\arctan(x) - \frac{1}{x} + C$

g) $\frac{\ln|x-1|}{9} - \frac{2}{3(x-1)} - \frac{\ln|x+2|}{9} + C$

h) $\arctan(e^x) + C$

i) $\frac{\arcsin(2x)}{16} + -\frac{x\sqrt{1-4x^2}}{8} + C$

j) $\frac{\sec^3(x)}{3} - \sec(x) + C$

k) $\frac{-1}{3(x^2+3x+5)^3} + C$

l) $\frac{1}{2}\ln|x+1|(x^2-1) + \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + C$

Réponses série 11

Vecteurs géométriques

1.

a) Vecteur b) Scalaire c) Vecteur d) Scalaire e) Scalaire

f) Vecteur g) Scalaire h) Vecteur i) Vecteur j) Scalaire

3.
a) $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\sqrt{3}\,\vec{j}$ b) $\vec{v} = 2\vec{i}$
c) $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ d) $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$
e) $\vec{AB} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$ f) $\vec{AB} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$
g) $\vec{AB} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}$ h) $\vec{AB} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

4.
a) $P = (-2, 0)$ d) $S = (7/4, -11/2)$
b) $Q = (10, -2)$ e) $T = (5/7, 1)$
c) $R = (15, 1)$ f) $U = (3, -4)$

5. a) $P = (-1, -1, 1)$ b) $Q = (-1, -1, 1)$ c) $R = (0, 2, 3)$

6. a) $2\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $\alpha = -1/3$ ou $\alpha = 5/3$

7.
a) -7 b) 8 c) 0
d) 0 e) -4 f) $6\sqrt{2}$

8. Les vecteurs des exercices c) et d).

9. a) 6 b) 2 c) 2 ou -2 d) 1/3

10. a) $\pi/4$ b) $\pi/3$

Réponses série 12

1.

a) $A_{3\times4}$, $B_{3\times4}$, $C_{3\times3}$, $D_{1\times4}$, $E_{3\times3}$, $F_{4\times3}$, $G_{4\times1}$

b) $a_{32}=1$, $b_{22}=3$, $c_{22}=7$, $d_{14}=1$, $e_{33}=1$, $f_{11}=1$, g_{22} n'est pas défini.

2.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ c) impossible

d) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -2 & 23 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ e) impossible f) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 12 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ h) impossible i) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

j) impossible

3.

a) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 7/2 & 2 & 5/2 \\ 1/2 & -1/2 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

d) impossible

e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $CE = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 9 & 15 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad EC = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 17 & 5 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad CE \neq EC.$

5.

a) impossible

b) $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -8 & 8 \\ 4 & 10 & 3 & 17 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 18 & 38 \\ 0 & 10 & 0 \\ 2 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

d) (9)

e) $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 24 & 56 \\ 32 & 48 & 112 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 & 16 \\ 2 & 11 & -7 & 17 \\ 6 & 17 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 58 \\ 7 \\ 41 \end{pmatrix}$

h) impossible

i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

6.

a) impossible b) $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

c) pas inversible d) $\begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ -1/2 & -2/5 \end{pmatrix}$

7. a) -34 b) impossible c) -186 d) 0 e) -217 f) 1

8. Les matrices de a), c), e) et f).

9.

a) $\vec{k}$ b) $\vec{i}$

c) $-17\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ d) $-8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

e) $6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$

11. 16

12. 98

Réponses série 13

1. a) $X = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} \frac{39}{5} \\ -6 \\ \frac{26}{5} \end{pmatrix}$ d) $X = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 154 \\ -23 \\ 22 \\ -139 \end{pmatrix}$

2.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) Pas de solution

c) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} 2-z \\ 2+2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R}$

e) $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}z \\ z \\ \frac{5}{3}z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R}$ f) $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.

a) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 115 \\ -28 \\ -18 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} 2w \\ 1-2w \\ 0 \\ w \end{pmatrix}, w \in \mathbf{R}$

e) Pas de solution f) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. a) 1 b) 2 c) 2

5.

a) $X = \begin{pmatrix} z \\ 5z-6 \end{pmatrix}$ b) $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $X = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

6.

a) $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -1 & 8 & -5 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -44/3 & 24 & -32 \\ 24 & -36 & 48 \\ -32 & 48 & -60 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -1 \\ 6 & -24 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

7.

a) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & 4t \\ z & = & -t \end{array}\right. ,t \in \mathbf{R}$ b) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-4t \\ y & = & 2-3t \\ z & = & 3+5t \end{array}\right. ,t \in \mathbf{R}$

c) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & 2 \\ z & = & 3+t \end{array}\right. ,t \in \mathbf{R}$ d) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 8+t \\ y & = & -2+t \\ z & = & 3+t \end{array}\right. ,t \in \mathbf{R}$

8.

a) $3x - y + 2z = 18$ b) $x + y + z = 1$

c) $-x + y + z = 4$ d) $2x + 3y + 5z = 0$