Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR É.D.O
AIDE MÉMOIRE

Automne 2006

Définitions, développement de Taylor et erreur de troncature

- Erreur absolue: $\Delta x = |x - x^\star|$
- Erreur relative: $e_r(x) = \frac{\Delta x}{|x|}$
- Chiffres significatifs:

  Le chiffre de $x^\star$ associé à la puissance de m et les chiffres associés aux puissances supérieures tels que $\Delta x \leq 0{,}5 \times 10^m$.

- $f(x_0 + h) = P_n(h) + R_n(h)$:

$$\begin{cases} P_n(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n \\ R_n(h) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(h))h^{(n+1)} \quad \text{pour } \xi(h) \text{ entre } x_0 \text{ et } x_0 + h. \end{cases}$$

- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$:

$$\begin{cases} P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))(x - x_0)^{(n+1)} \quad \text{pour } \xi(h) \text{ entre } x_0 \text{ et } x_0 + h. \end{cases}$$

- $f(h) = \mathcal{O}(h^n)$:

  Il existe une constante $C > 0$ t.q. $\left|\frac{f(h)}{h^n}\right| \leq C$ pour h près de 0.

- $f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$.
- $f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$.

Norme IEEE et erreur de représentation

- Représentation IEEE en simple précision:

$$(d_1 d_2 d_3 \cdots d_{31} d_{32}) = (-1)^{d_1} \times 2^{(d_2 d_3 \cdots d_9)_2} \times 2^{-127} \times (1{,}d_{10} d_{11} \cdots d_{32})_2$$

- Représentation IEEE en double précision:

$$(d_1 d_2 d_3 \cdots d_{31} d_{64}) = (-1)^{d_1} \times 2^{(d_2 d_3 \cdots d_{12})_2} \times 2^{-1023} \times (1{,}d_{13} d_{14} \cdots d_{64})_2$$

- Représentation par excès (selon la norme IEEE):

  L'excès: $d = 2^{k-1} - 1$ où k est le nombre de bits utilisés pour l'exposant.

- Précision machine ε:

  $\varepsilon = \beta^{-t}$, où t est le nombre de bits utilisés pour la mantisse si le premier bit de la mantisse normalisée n'est pas mis en mémoire et β est la base.

Équations différentielles

- Pour le problème avec condition initiale $y'(t) = f(t,y(t))$ où $y(t_0) = y_0$:

  pour (t_0,y_0) et h donnés, et pour $n = 0,1,2,\ldots$:

  Euler explicite (ordre 1):

  $$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n,y_n) \\ t_{n+1} \ = t_n + h \end{cases}$$

  Taylor d'ordre 2:

  $$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n,y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n,y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n,y_n)}{\partial y} f(t_n,y_n)\right) \\ t_{n+1} \ = t_n + h \end{cases}$$

  Euler modifié (Runge-Kutta d'ordre 2):

  $$\begin{cases} \tilde{y} = y_n + hf(t_n,y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n,y_n) + f(t_n + h,\tilde{y})) \\ t_{n+1} \ = t_n + h \end{cases}$$

  Point milieu (Runge-Kutta d'ordre 2):

  $$\begin{cases} k_1 = hf(t_n,y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2},y_n + \frac{k_1}{2}) \\ t_{n+1} \ = t_n + h \end{cases}$$

  Runge-Kutta d'ordre 4:

  $$\begin{cases} k_1 = hf(t_n,y_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2},y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2},y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(t_n + h,y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} \ = t_n + h \end{cases}$$

  Euler implicite (ordre 1):

  $$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1},y_{n+1}) \\ t_{n+1} \ = t_n + h \end{cases}$$

  Crank-Nicholson (ordre 2):

  $$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},y_{n+1})) \\ t_{n+1} \ = t_n + h \end{cases}$$

- Erreur de troncature locale:

  pour $y_{n+1} = y_n + h\varphi(t_n,y_n,t_{n+1},y_{n+1})$:

  $$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \varphi(t_n,y(t_n),t_{n+1},y(t_{n+1}))$$