A network diagram with white and grey nodes connected by lines, set against a dark teal background.

MTH8414

OUTILS ET LOGICIELS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE EN INGÉNIERIE

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569

Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Programmation linéaire

- **introduction**
- un peu de théorie
- analyse de sensibilité
- difficultés
- exercice



Motivation

La programmation linéaire fut développée au cours de la Seconde Guerre mondiale.

- L'objectif était d'allouer plus intelligemment les ressources de l'armée.
- Le terme « programmation » est employé avec le sens de « plan ».

La PL peut résoudre un VASTE nombre de problèmes (modèle de transport, allocation de ressources, théorie des jeux, tarifications, etc.)

Le développement de la théorie et des algorithmes est une des avancées scientifiques importantes du 20^e siècle

- avec l'accélération des ordinateurs, la vitesse de résolution est améliorée par un facteur de 800 milliard en 20 ans...

Impact majeur :

- économique : des centaines de millions de \$ dans l'industrie aérienne
- santé : traitement en radiothérapie

Formulation d'un modèle PL

Variable de décisions

- Des variables mathématiques représentant des décisions

Fonction Objectif

- Une équation linéaire qui quantifie un objectif
- L'objectif le plus fréquent des entreprises est de maximiser les profits.
- Pour un département de service, on essaie souvent de minimiser les coûts d'opération.

Contrainte

- Des équations linéaires qui restreignent les variables de décisions.



Formulation d'un modèle PL

$$\begin{aligned} \max/ \min z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{subject to:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \end{aligned}$$

x_j = variables de décision

b_i = terme de droite

c_j = coefficients de la fonction objectif

a_{ij} = coefficients des contraintes





Un exemple

Un menuisier assemble deux produits (chaises et tabourets)

Ses ressources sont limitées à:

- 3000 unités de bois.
- 40 heures de production par semaine.

Le profit est de

- 8\$ pour une chaise.
- 5\$ pour un tabouret.



Un exemple

Variable de décision:

- X_1 = Production (mensuelle) de chaises
- X_2 = Production (mensuelle) de tabourets

Fonction objectif:

- maximiser le profit mensuel

Contraintes

- Une chaise demande 5 unités de bois et 10 minutes d'assemblage.
 - Un tabouret demande 3 unité de matière et 15 minutes d'assemblage.
 - Pas plus de 800 produits au total par mois (stockage)
 - Nombre de chaises ne doit pas dépasser de plus de 400 le nombre de tabourets.
- 



Un exemple

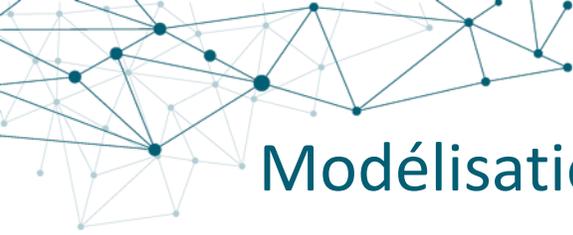
Une stratégie de production intuitive... mais est-elle optimale ?

- Produire le plus possible de chaises (le plus profitable)
- Utiliser les ressources disponibles pour produire des tabourets, tout en respectant les règles.

Le plan consiste donc à produire :

- Chaises = 525 unités
- Tabouret = 125 unités
- Profit = $8 \times 525 + 5 \times 125 = 4825\$$



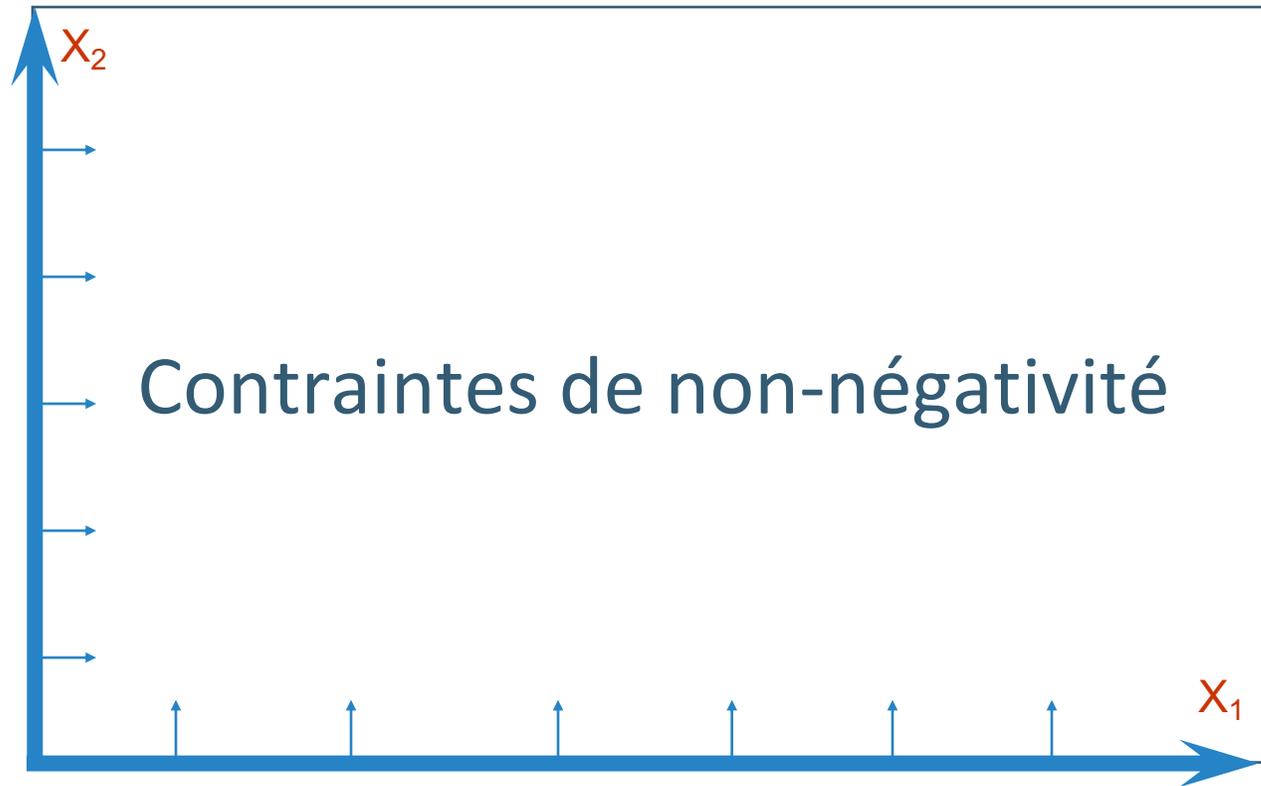


Modélisation en PL

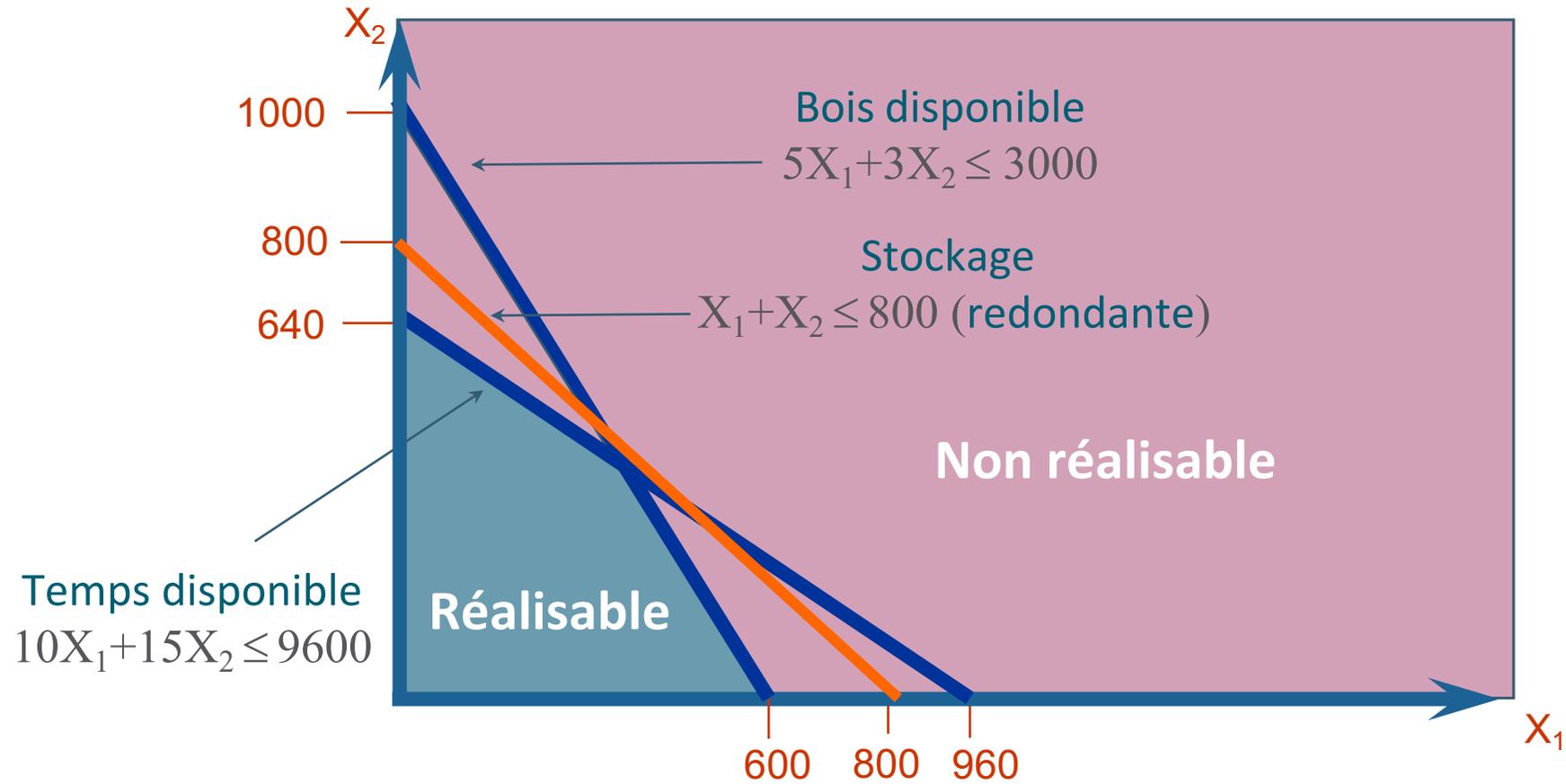
Max	$8X_1 + 5X_2$	(profit mensuel)
Sujet à		
	$5X_1 + 3X_2 \leq 3000$	(Bois dispo)
	$10X_1 + 15X_2 \leq 9600$	(Temps dispo)
	$X_1 + X_2 \leq 800$	(Stockage)
	$X_1 - X_2 \leq 400$	(Mélange)
	$X_j \geq 0, j = 1,2$	(Non négativité)



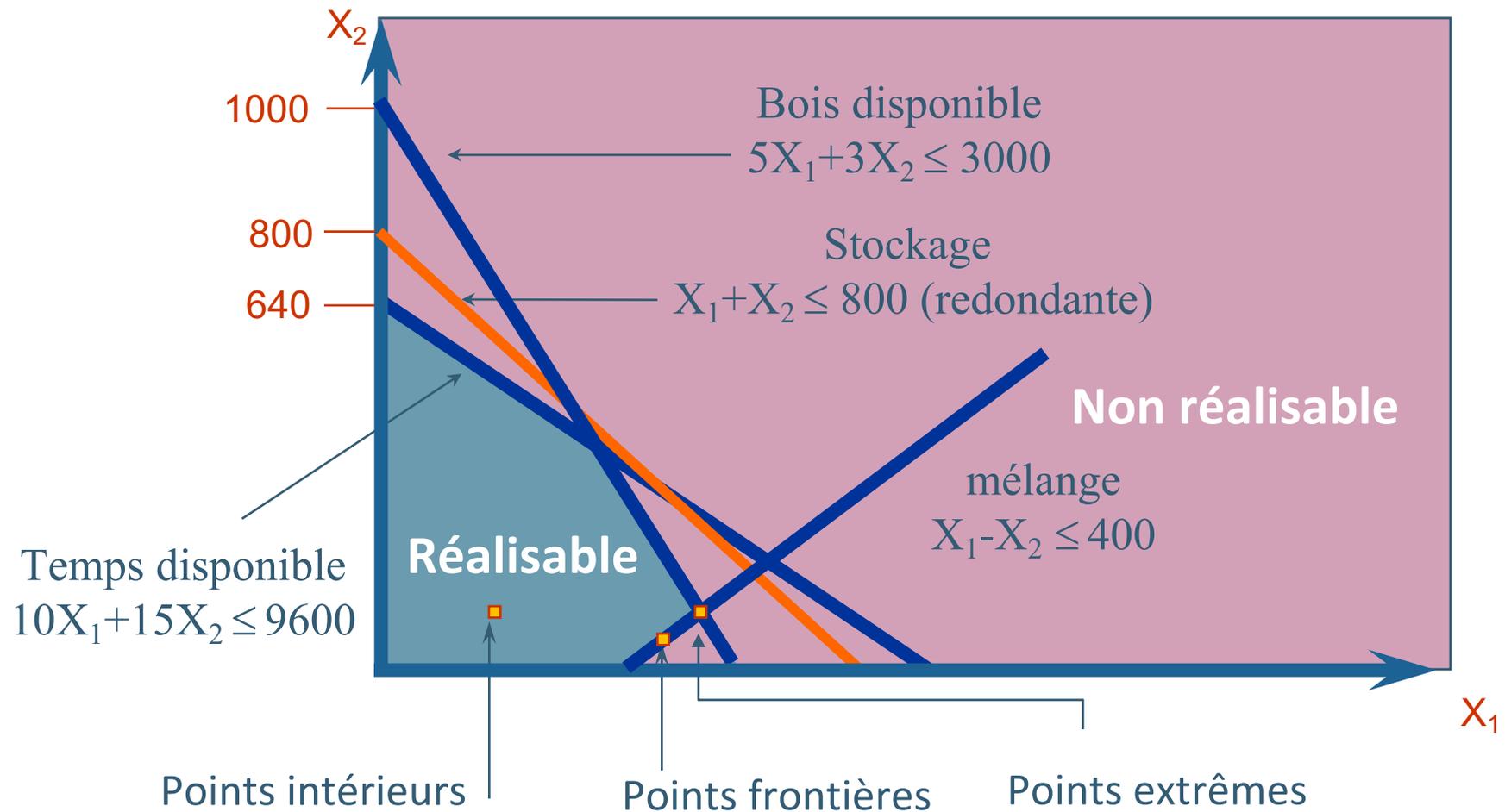
Résolution graphique



Résolution graphique



Résolution graphique



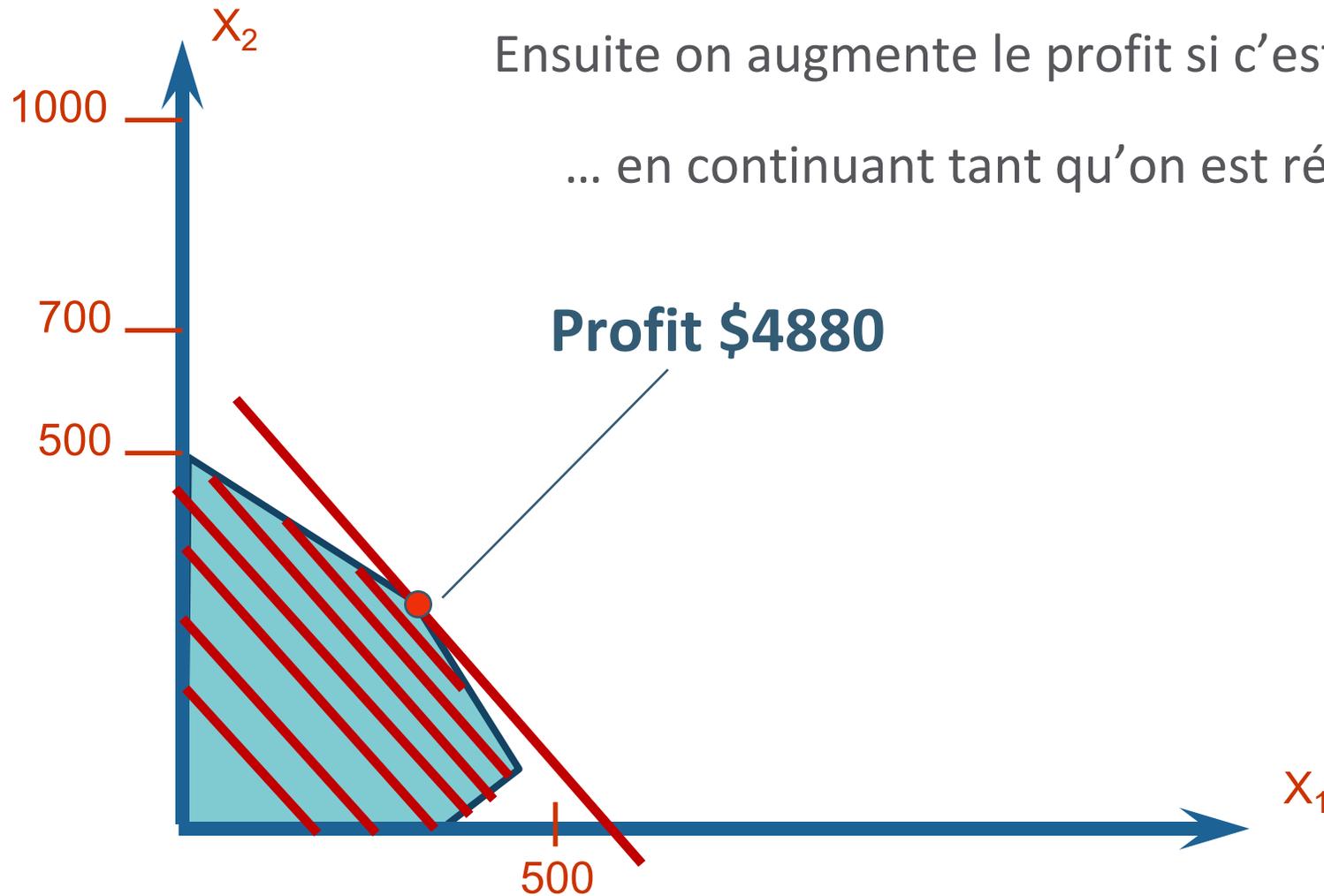
Trois types de points réalisables

Trouver une solution optimale

Débuter avec un profit arbitraire, disons \$2,000...

Ensuite on augmente le profit si c'est possible

... en continuant tant qu'on est réalisable



La solution optimale...

Chaises = 360 unités

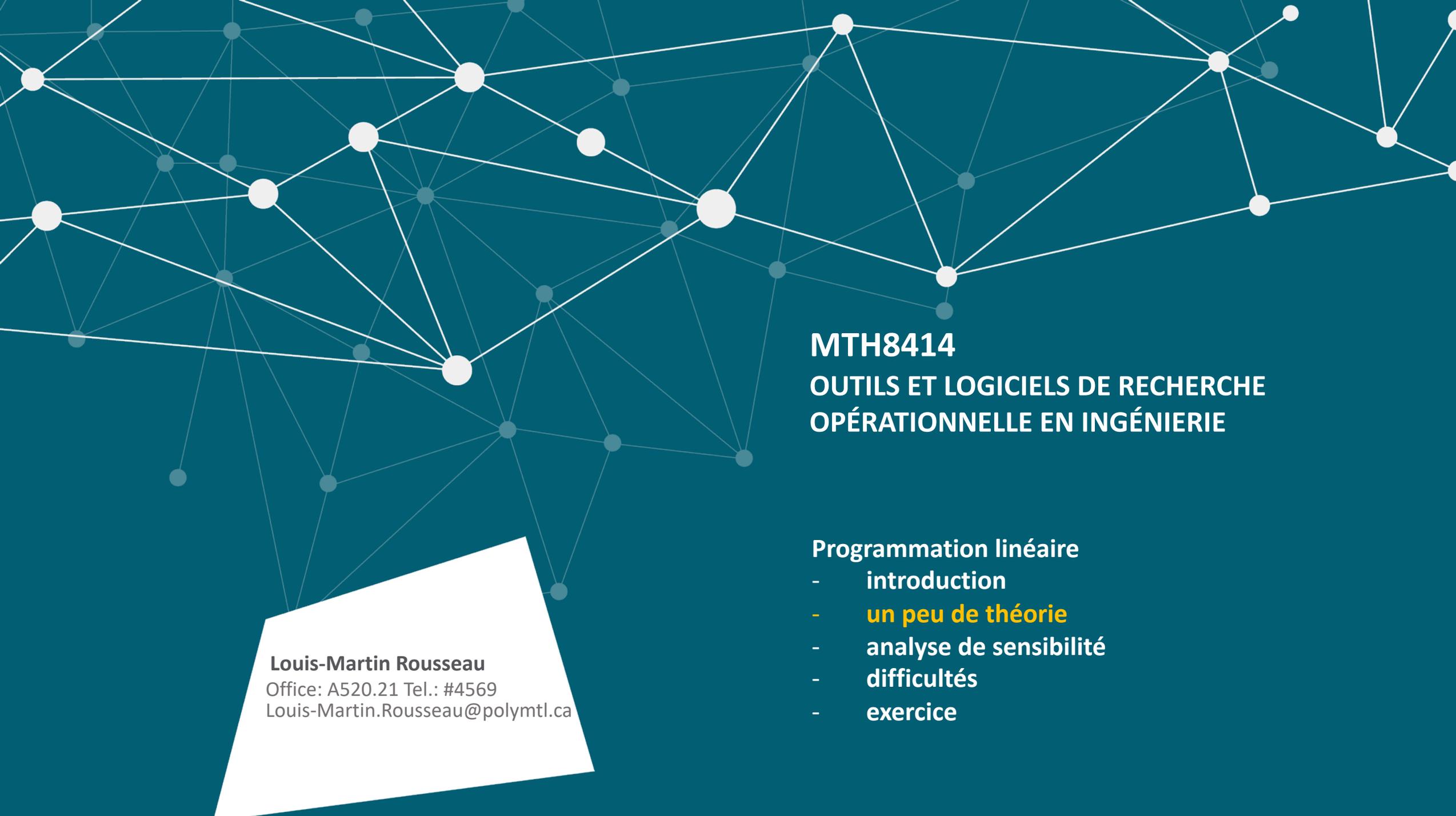
Tabourets = 400 unités

Profit = 4880\$

- Cette solution utilise tout le matériel et le temps disponible.
- La production est de 760 (non 800).
- La production de tabourets dépasse celle des chaises de 140 unités.

Le plan “intuitif” consistait à produire :

- Chaises = 525 unités
- Tabouret = 125 unités
- Profit = $8 \times 525 + 5 \times 125 = 4825\$$

A network diagram with white and grey nodes connected by white lines on a dark teal background. The nodes are of varying sizes and are scattered across the frame, with some larger nodes acting as hubs.

MTH8414

OUTILS ET LOGICIELS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE EN INGÉNIERIE

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569

Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Programmation linéaire

- introduction
- **un peu de théorie**
- analyse de sensibilité
- difficultés
- exercice

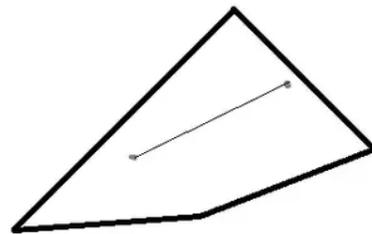
Résolution par le simplexe

Les inégalités représentent des plans (en 2D) ou des hyperplans.

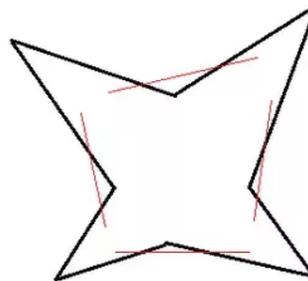
Un ensemble d'inégalités permet de construire un espace réalisable borné que l'on appelle un polygone convexe (2D) ou polyèdre convexe.

Un rappel sur la convexité :

- Soit a et b deux solutions réalisables d'un polyèdre convexe, alors $(a+b)/2$ est aussi une solution de ce polyèdre



Convex Polygon



Non convex polygon





Encore un peu de géométrie...

La propriété des points extrêmes nous dit que si un polyèdre (P) contient une solution optimale, alors il existe une solution optimale qui est située sur un point extrême.

La bonne nouvelle : on ne peut que considérer les points extrêmes !

La mauvaise nouvelle : le nombre de points extrêmes peut-être exponentiellement élevé par rapport au nombre de variables de décision.

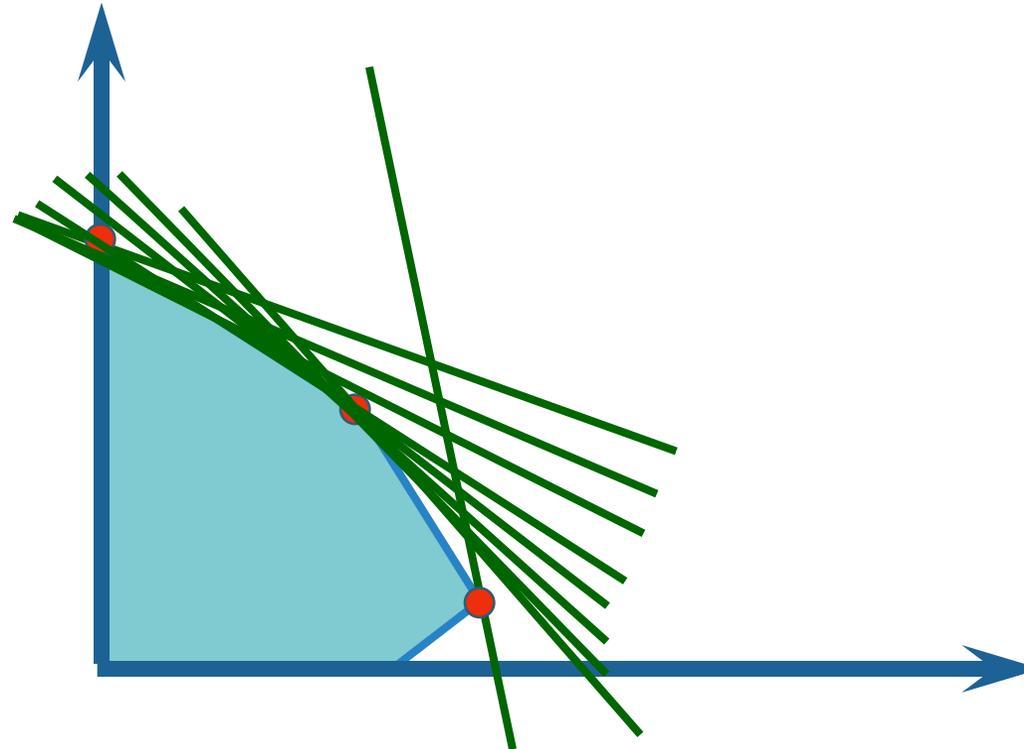
Le prix de consolation : la convexité garantit que les optimums locaux sont des optimaux globaux.

- C'est-à-dire qu'un point extrême est optimal si tous ses voisins sont pires que lui.
- Mais attention aux plateaux...



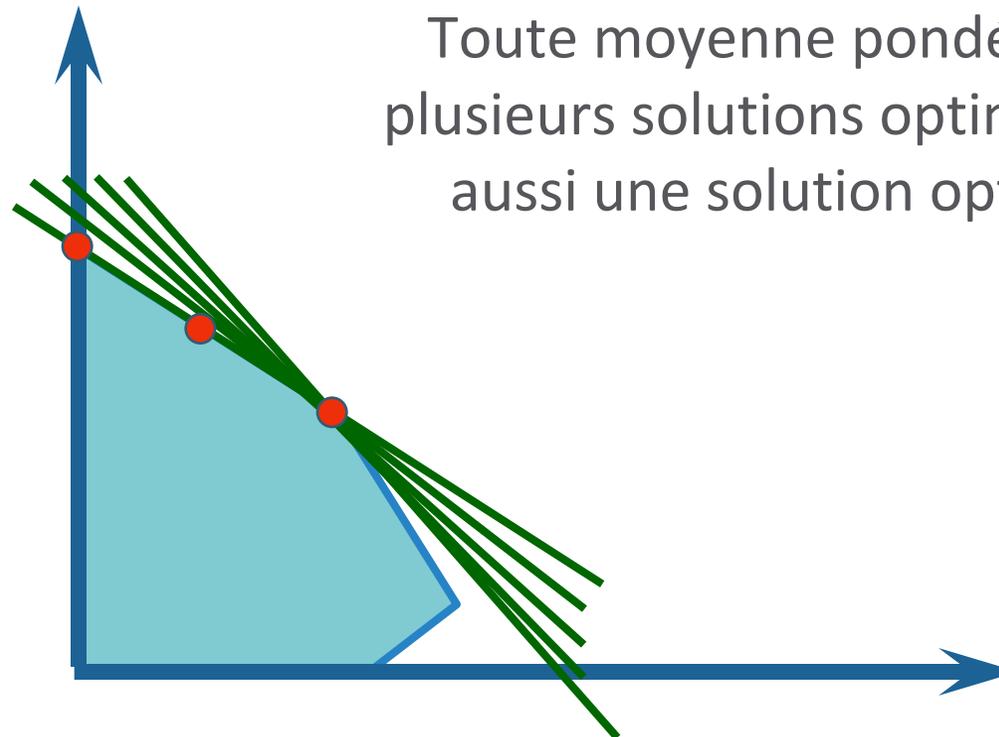
Le rôle des points extrêmes...

Si un programme linéaire possède une solution optimale, alors au moins un point extrême est optimal.



Plusieurs solutions optimales

Si plusieurs solutions optimales existent alors la fonction objectif doit être parallèle à au moins une des contraintes



Toute moyenne pondérée de plusieurs solutions optimales est aussi une solution optimale

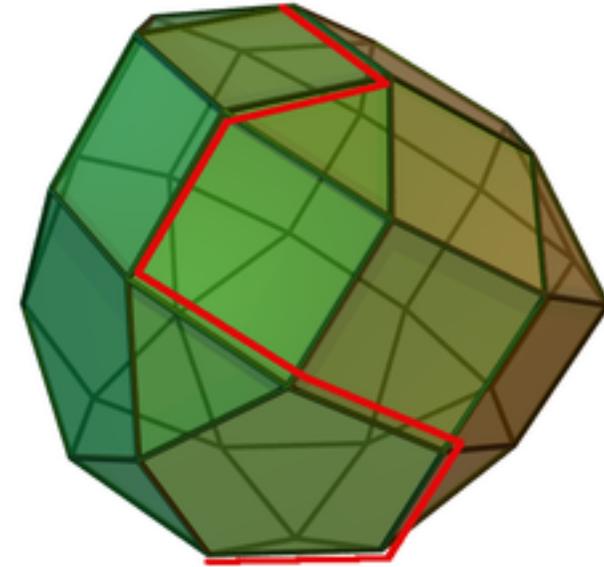
L'algorithme du simplexe (Dantzig, 1947)

Développé juste après la Seconde Guerre mondiale

Utilisé pour planifier le pont aérien de Berlin en 1948.

Les grandes lignes de l'algorithme :

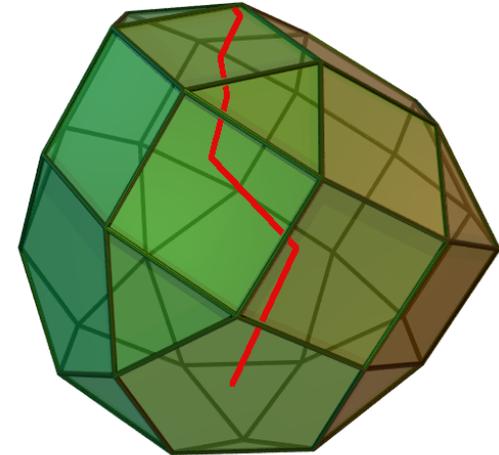
- La recherche démarre d'un point extrême
- Elle se déplace (pivot) vers un point extrême voisin
- On répète jusqu'à l'obtention de la solution optimale

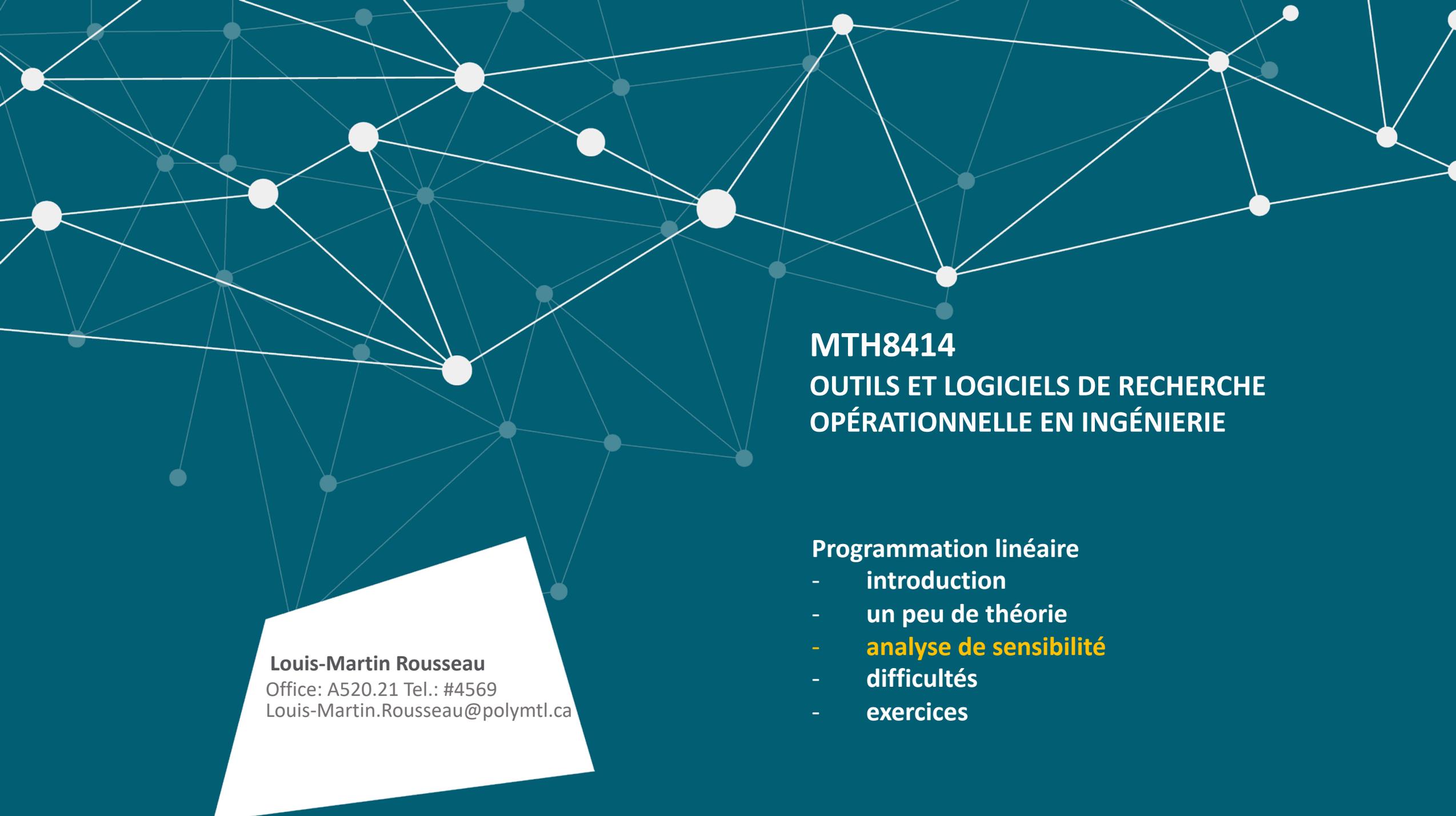


D'autres algorithmes pour résoudre les PLs

Il existe d'autres algorithmes pour résoudre des programmes linéaires, en particulier les méthodes de points intérieurs

- En théorie ces méthodes convergent dans un temps polynomial (elles devraient donc être beaucoup plus efficaces que le simplexe)
- En pratique elles fonctionnent mieux que l'espace est plus «lisse» alors que le simplexe semble plus efficace quand les arêtes sont plus prononcées.



A network diagram with white and grey nodes connected by lines, set against a dark teal background.

MTH8414

OUTILS ET LOGICIELS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE EN INGÉNIERIE

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569

Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Programmation linéaire

- introduction
- un peu de théorie
- **analyse de sensibilité**
- difficultés
- exercices

L'analyse de sensibilité

Est-ce que la solution optimale est sensible aux paramètres du problème ?

Pourquoi se poser cette question ?

- Les paramètres utilisés ne sont que des estimations
- Dans un environnement dynamique, ceux-ci peuvent changer régulièrement.
- Une analyse de scénarios (what-if) peut permettre de proposer des changements aux paramètres.

Analyse sensibilité (objectif)

Intervalle d'optimalité

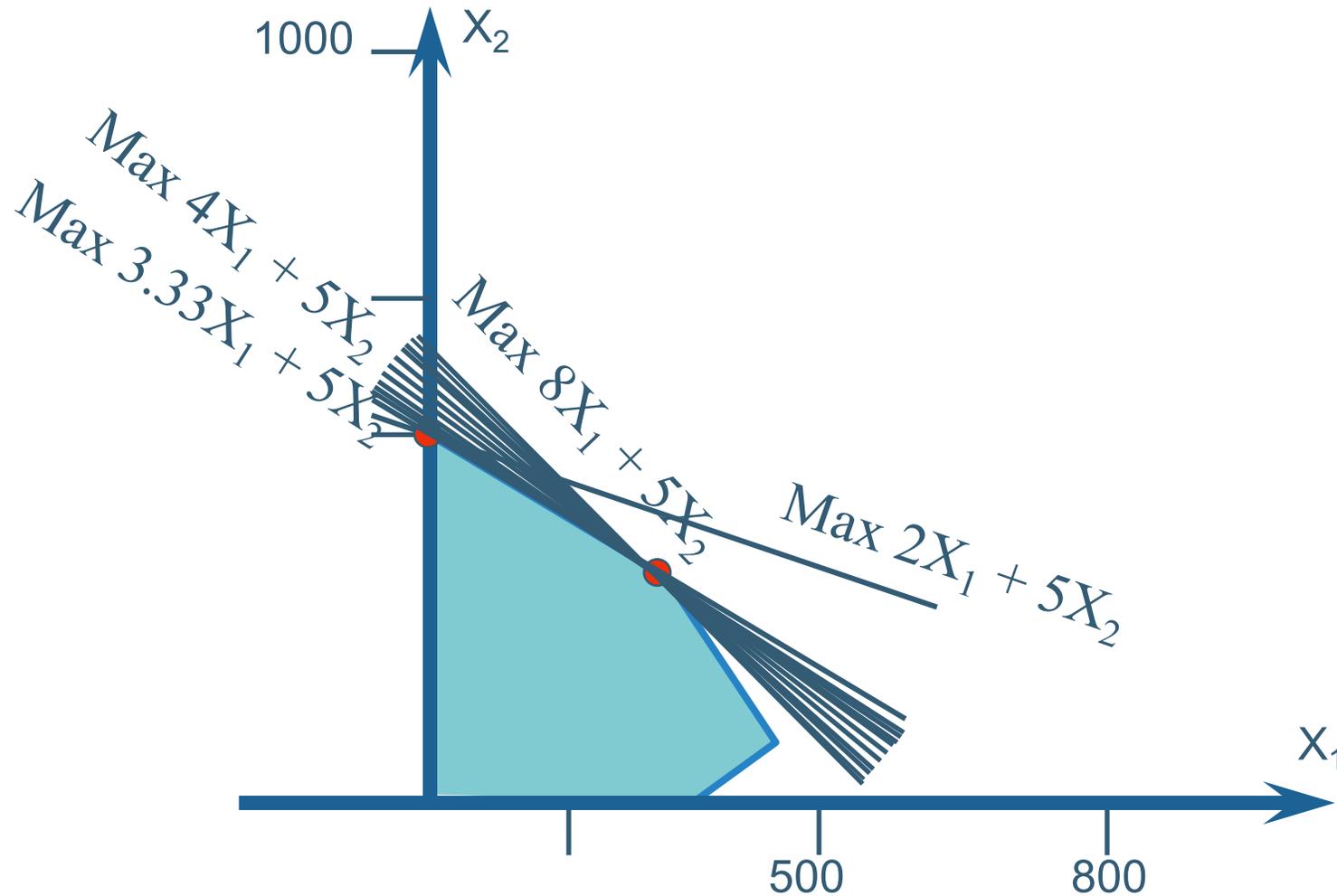
La **solution** optimale demeurera inchangée tant que:

- Un coefficient de la fonction objectif demeure dans son **intervalle d'optimalité**;
- Rien d'autre ne change.

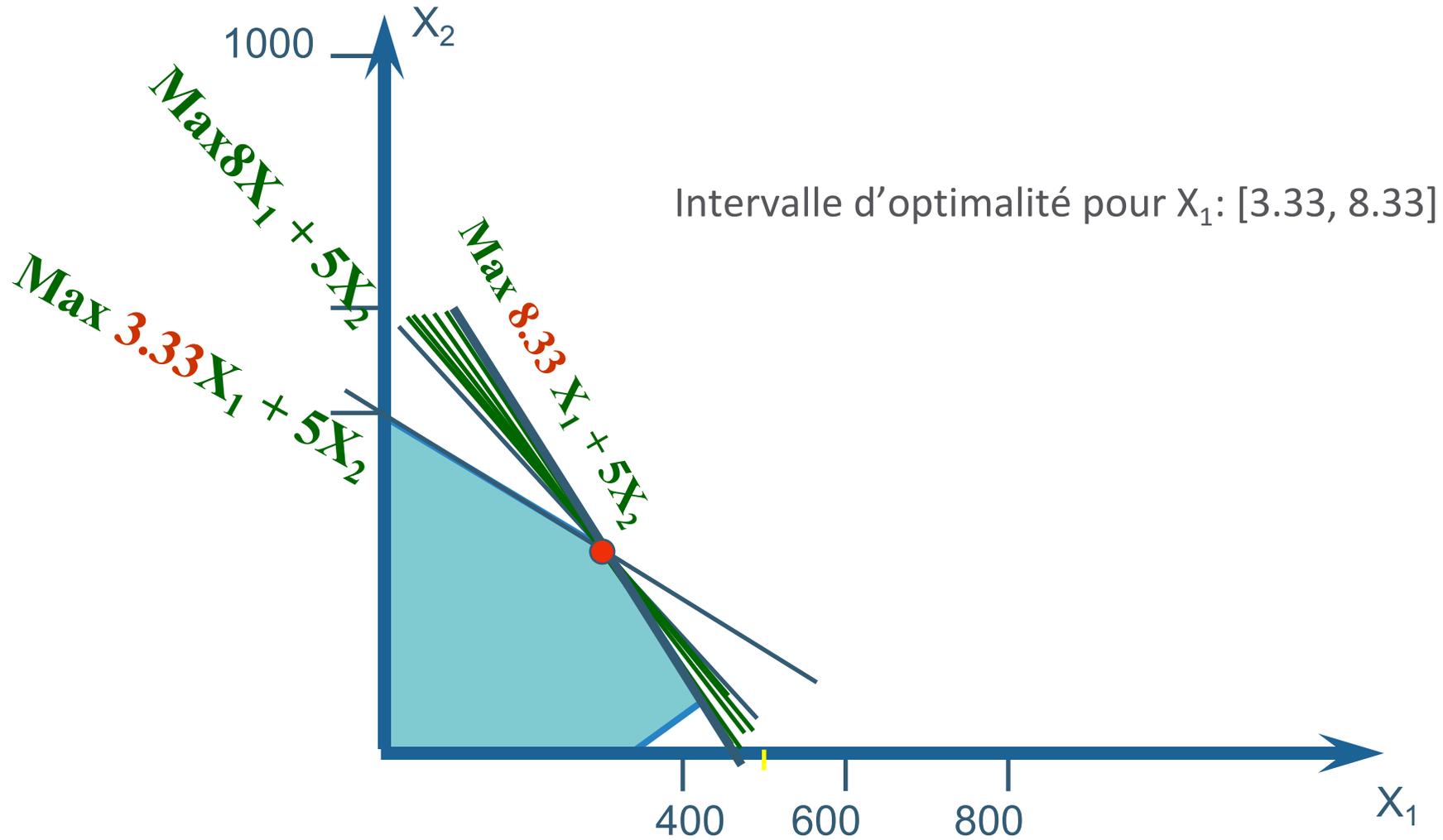
La **valeur** de cette solution changera si:

- Le coefficient qui a changé multiplie une variable dont la valeur optimale est non nulle.

Analyse sensibilité (objectif)



Analyse sensibilité (objectif)





Analyse sensibilité (objectif)

Coûts réduits

En assumant que rien d'autre ne change dans les paramètres, le coût réduit d'une variable qui vaut 0 dans la solution optimale est:

- L'inverse de l'augmentation du coefficient de l'objectif de la variable X_j (C_j) nécessaire pour que la variable devienne positive dans la solution optimale.
- OU, c'est le changement à la valeur de l'objectif pour chaque unité d'augmentation de X_j (nulle).

Écart complémentaire

Pour une solution optimale, soit la variable vaut 0, soit c'est son coût réduit qui vaut 0.



Analyse sensibilité (termes de droite)

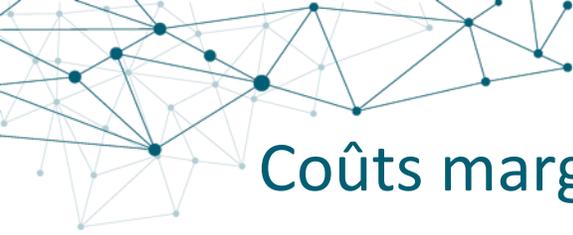
L'analyse de sensibilité du terme de droite des contraintes est utile pour répondre aux questions suivantes:

- En conservant tous les paramètres inchangés, de combien l'objectif de la solution optimale changerait si on modifiait le terme de droite d'une contrainte.
- Pour combien d'unité supplémentaire (ou de moins) est-ce que la solution optimale demeurerait la même ?

Analyse sensibilité (termes de droite)

Tout changement au terme de droite d'une contrainte active (qui touche la solution optimale) entraînera une modification de la solution optimale.

Tout changement au terme de droite d'une contrainte inactive qui est plus petite que l'écart entre la solution et cette contrainte n'entraînera pas de modification à la solution optimale.

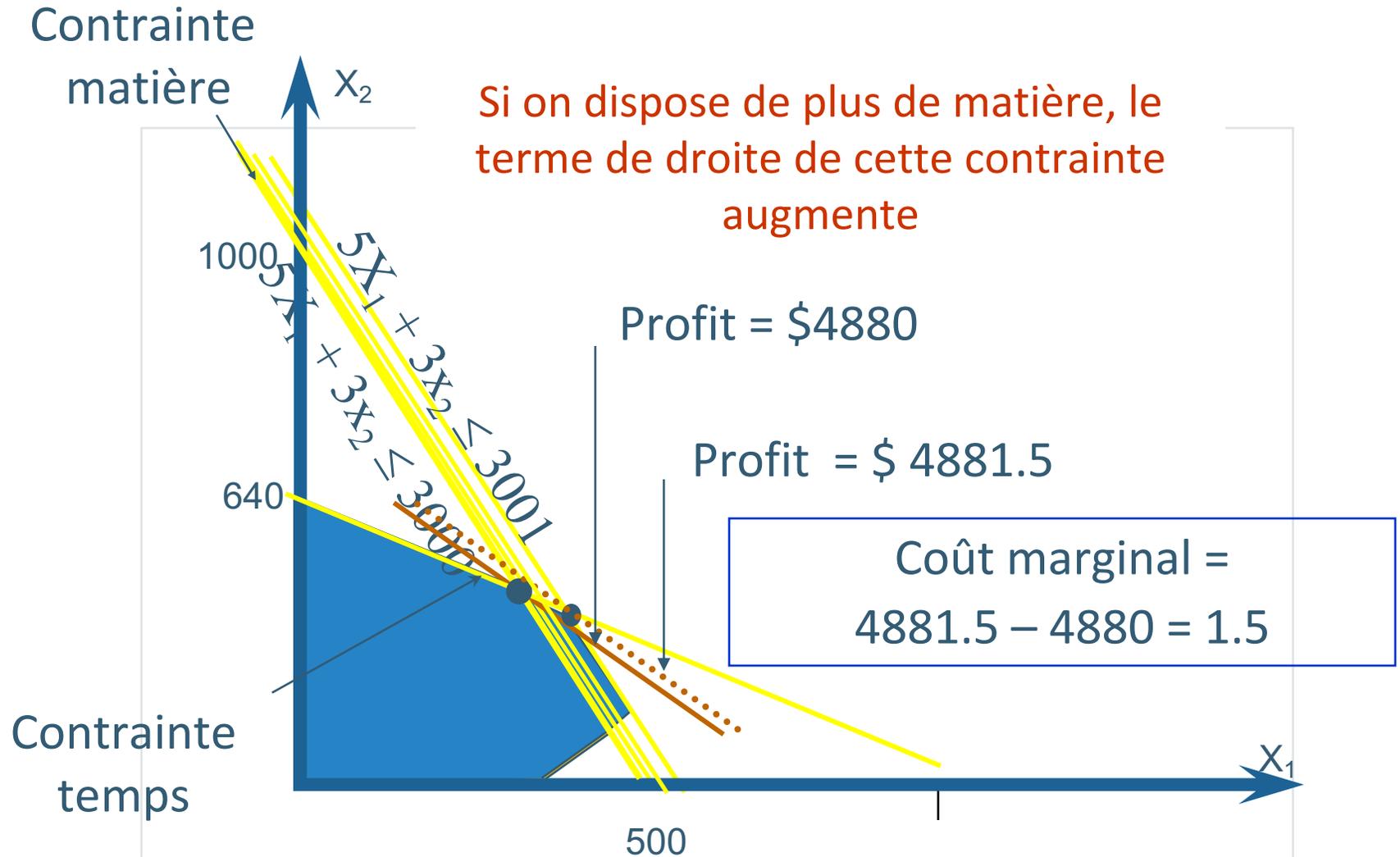


Coûts marginaux

En assumant que rien d'autre ne change dans les paramètres, l'augmentation de la valeur de l'objectif pour chaque augmentation d'une unité du terme de droite d'une contrainte est nommée le coût marginal de cette contrainte.



Coût marginal (graphique)





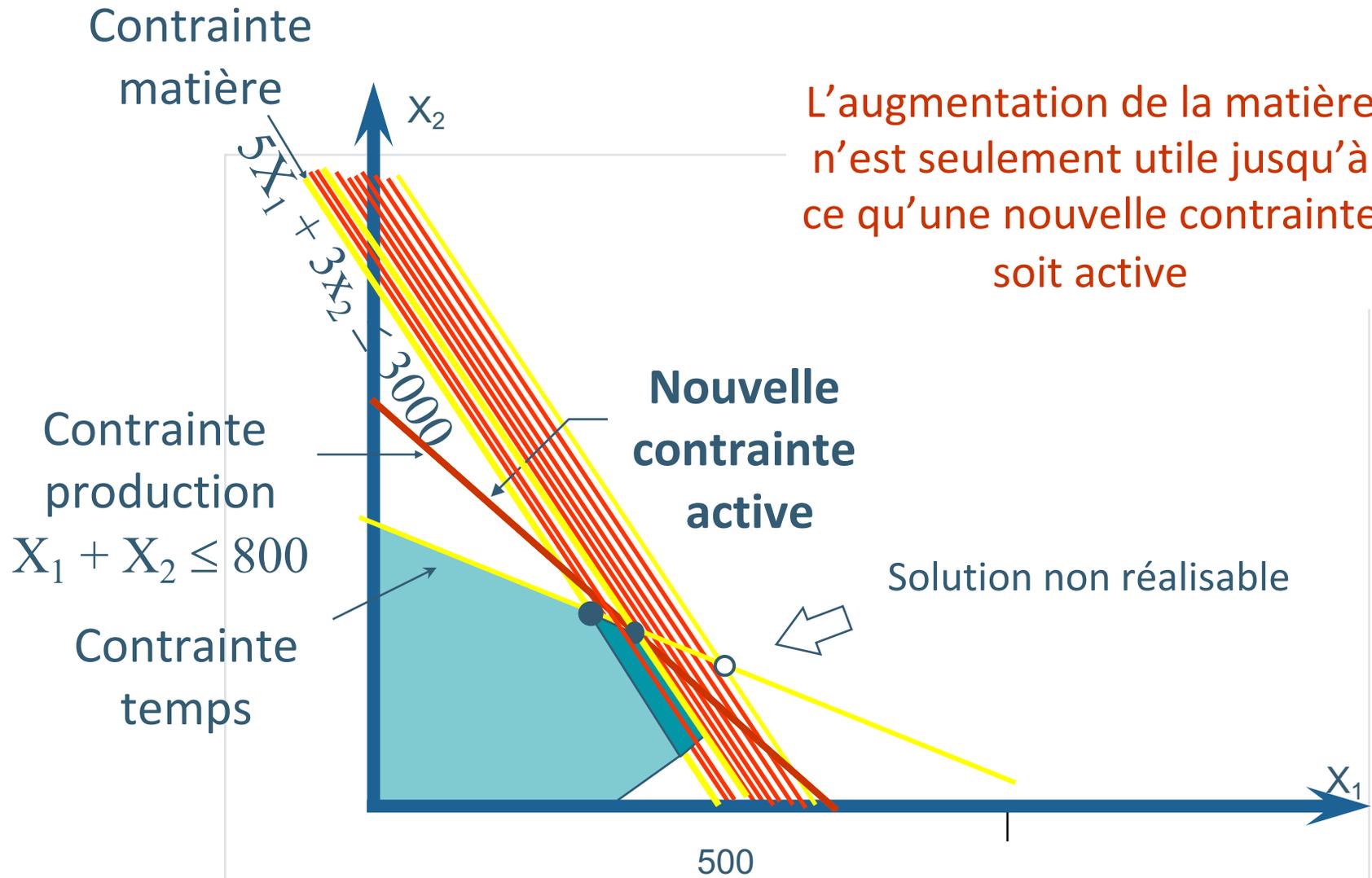
Intervalle de réalisabilité

En assumant que rien ne change dans les paramètres, l'intervalle de réalisabilité est défini comme:

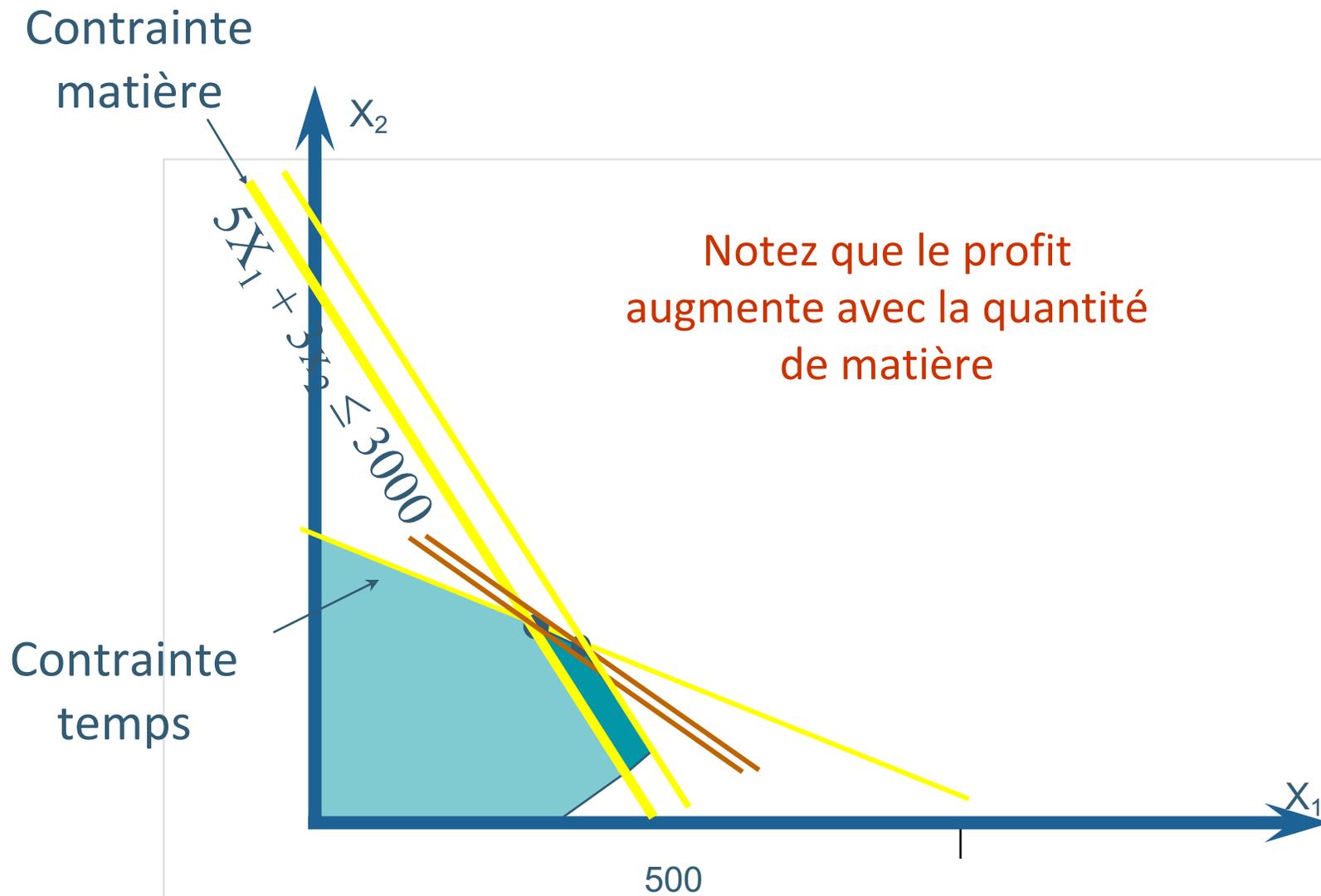
- L'intervalle dans lequel le terme de droite d'une contrainte peut varier, sans que le coût marginal n'en soit affecté.
- Dans cet intervalle, la fonction objective varie comme suite: $Obj = Obj + \text{CoutMarginal} * \text{Modif}$.



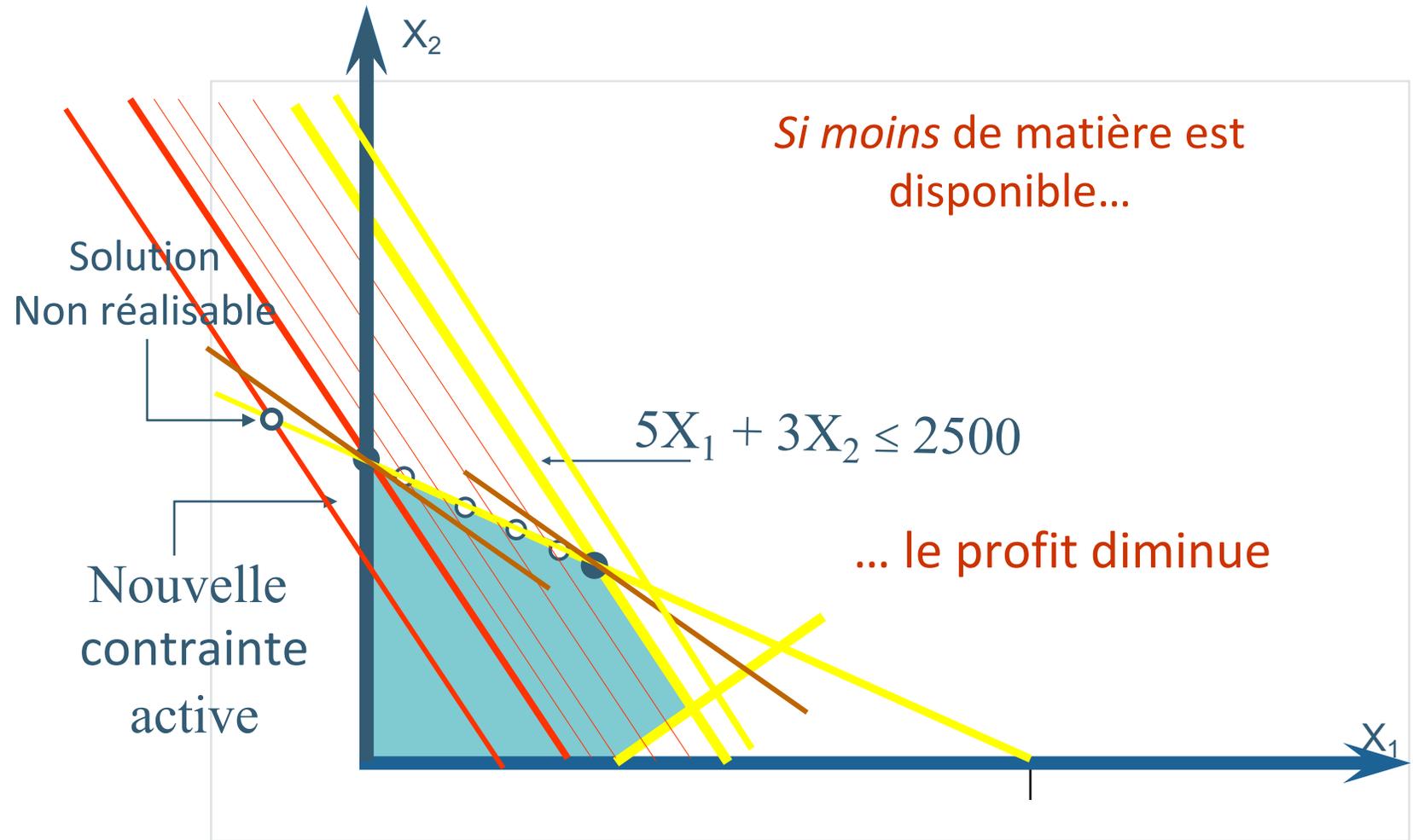
Intervalle de réalisabilité



Intervalle de réalisabilité



Intervalle de réalisabilité



A network diagram with white and grey nodes connected by lines, set against a dark teal background.

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569

Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

MTH8414

OUTILS ET LOGICIELS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE EN INGÉNIERIE

Programmation linéaire

- introduction
- un peu de théorie
- analyse de sensibilité
- **difficultés**
- exercice

Problèmes rencontrés en PL.

La programmation linéaire est un outil de modélisation et de résolution très puissant.

Par contre, dans certaines situations, on peut rencontrer certaines difficultés...

- Solutions optimales multiples
- Phénomène de dégénérescence et cyclage
- Solution réalisable inexistante
- Solution non bornée

Solutions optimales multiples

Soit le problème linéaire suivant:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 4x_2$$

sujet à:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

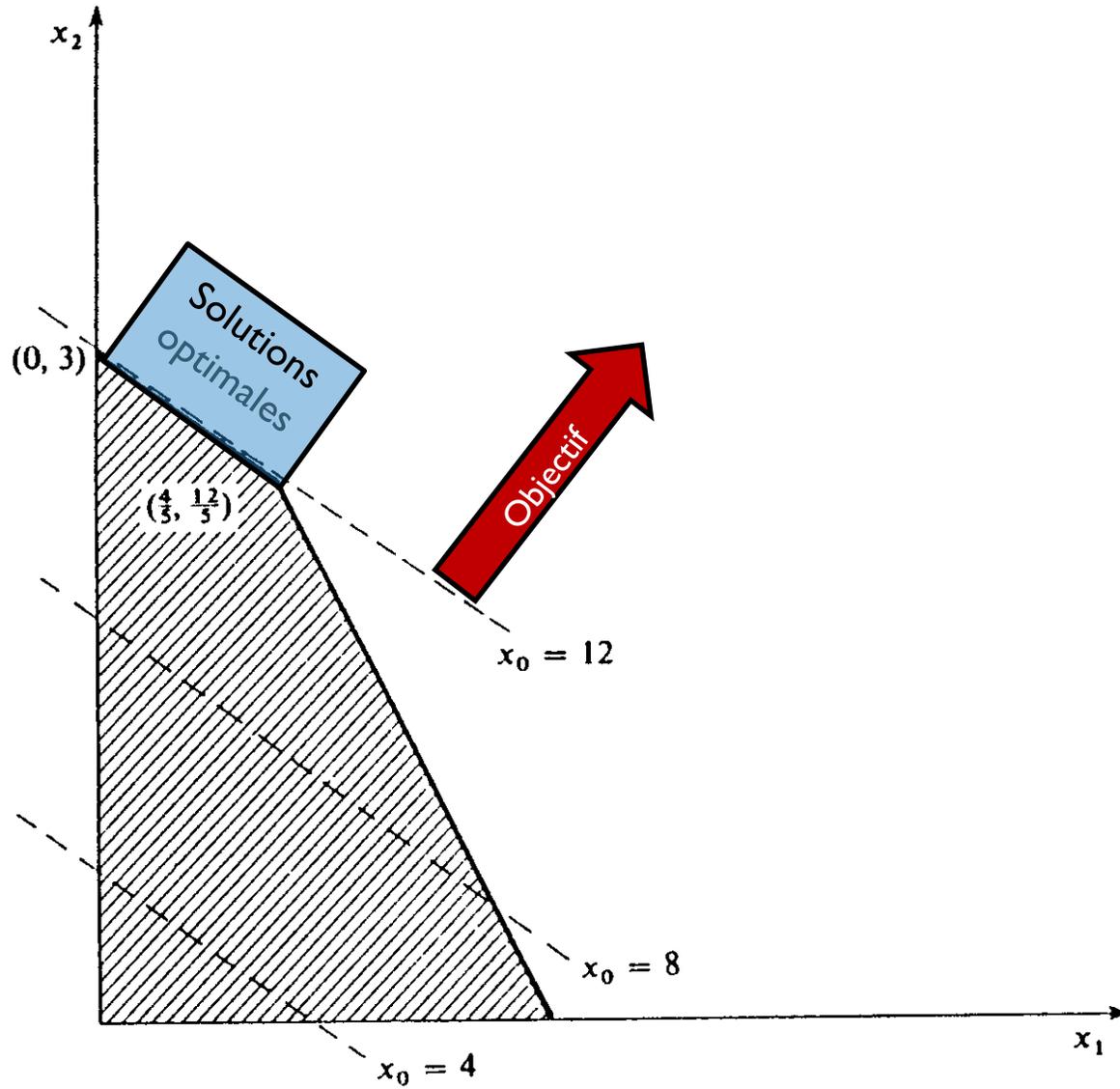
$$3x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solutions optimales multiples



Solutions optimales multiples

- La fonction objectif tracée au niveau optimal coïncide avec la droite (contrainte) : $3x_1 + 4x_2 = 12$
- Tous les points sur le segment de droite joignant $(0,3)$ à $(4/5, 12/5)$ représentent des solutions optimales i.e.:

$$3x_1^* + 4x_2^* = 12$$

$$0 \leq x_1^* \leq 4/5$$

$$12/5 \leq x_2^* \leq 3$$

$$z^* = 12$$

Solutions réalisables inexistantes

Soit le programme linéaire suivant:

$$\text{Max } x_0 = 4x_1 + 3x_2$$

Sujet à:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12 \quad (2.11)$$

$$x_1 + x_2 \geq 4 \quad (2.19)$$

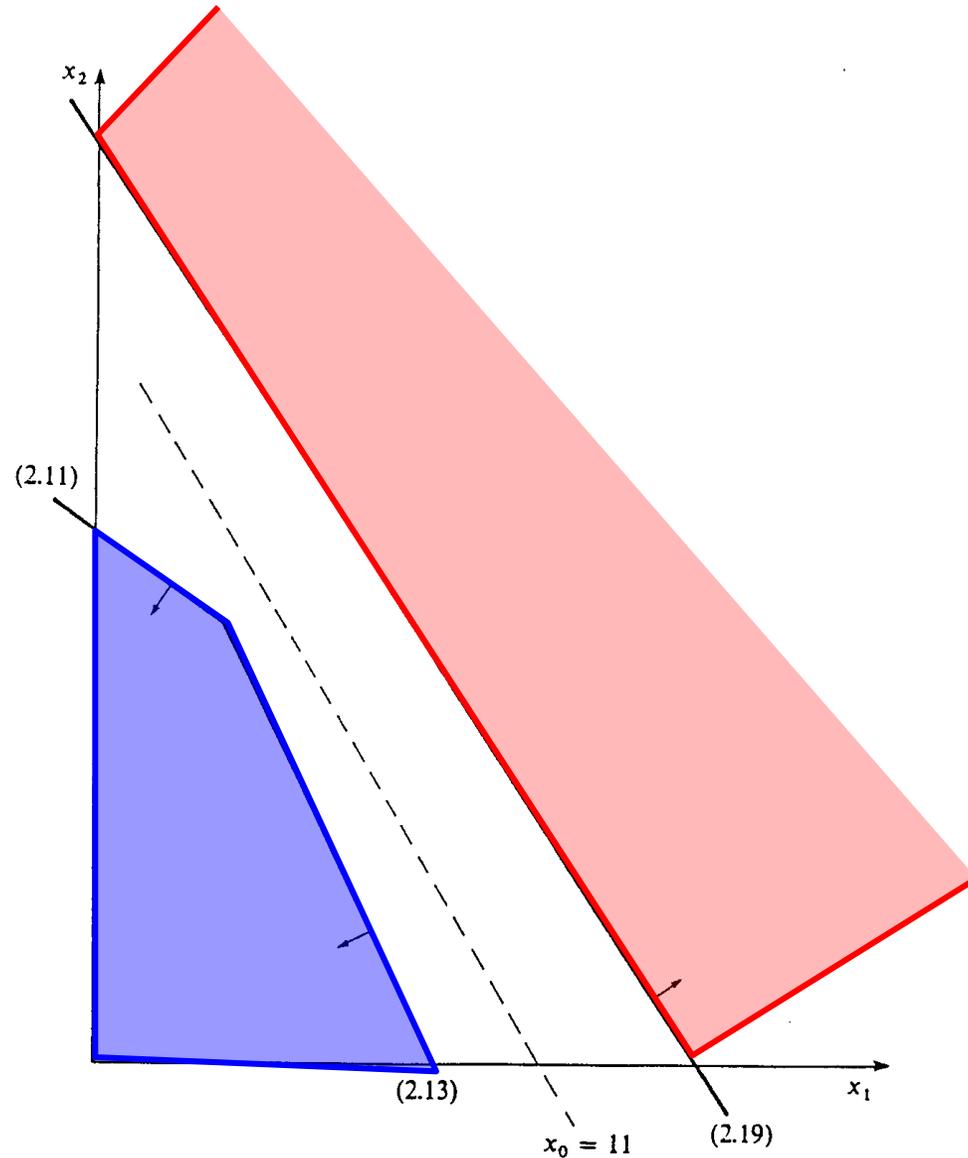
$$4x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (2.13)$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0.$$

Solutions réalisables inexistantes

Il n'existe pas de point qui satisfasse toutes les contraintes simultanément.



Problème de PL non borné

Soit le programme linéaire suivant:

$$\text{Max } z = x_1 + x_2 \quad (2.21)$$

Sujet à:

$$-4x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2.22)$$

$$x_1 + x_2 \geq 3 \quad (2.23)$$

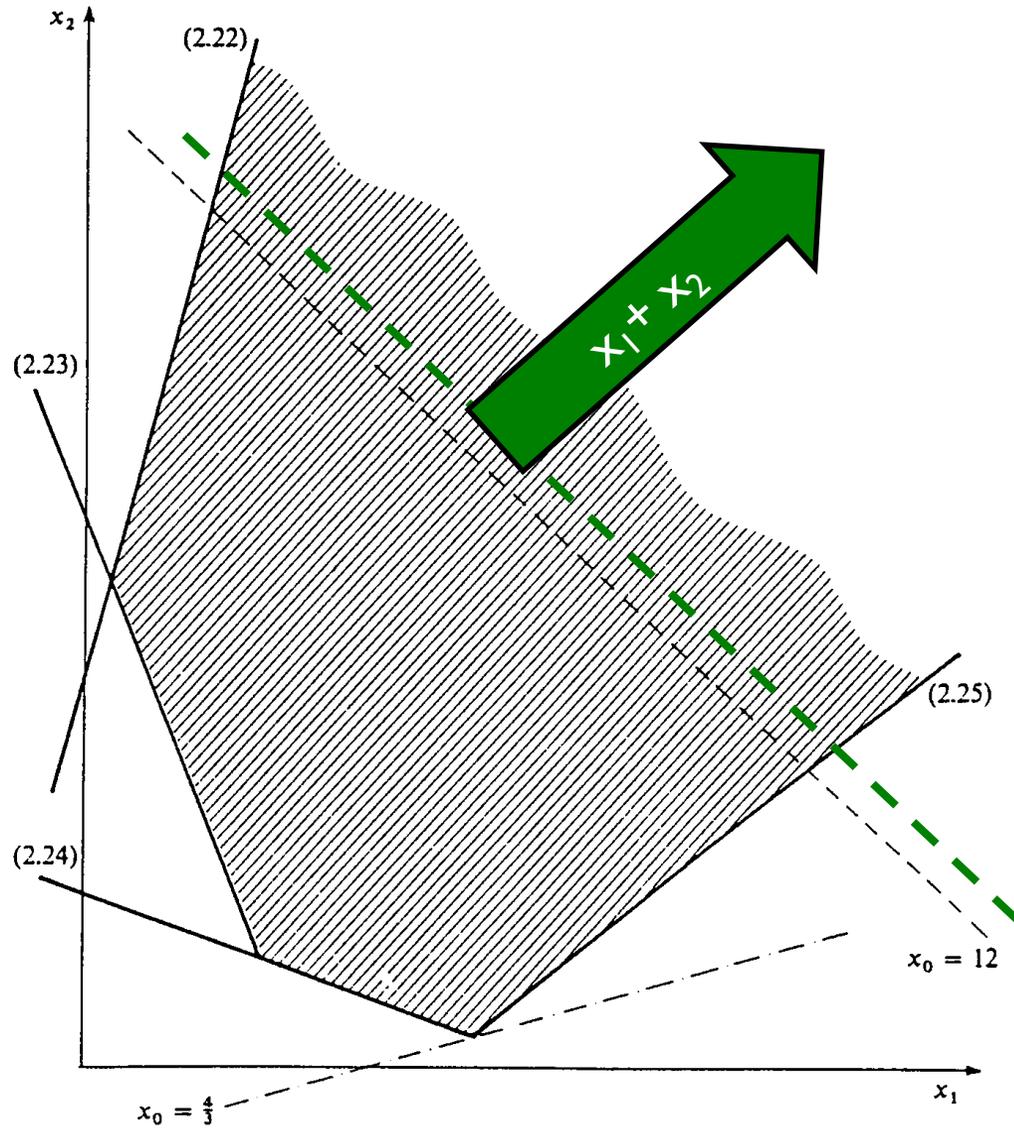
$$x_1 + 2x_2 \geq 4 \quad (2.24)$$

$$x_1 - x_2 \leq 2 \quad (2.25)$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0.$$

Problème de PL non borné



Pas de solution optimale

A network diagram with white and grey nodes connected by lines, set against a dark teal background.

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-
Martin.Rousseau@polymtl.ca

MTH8414

OUTILS ET LOGICIELS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE EN INGÉNIERIE

Programmation linéaire

- **introduction**
- **un peu de théorie**
- **analyse de sensibilité**
- **difficultés**
- **exercice**

Exemple : le problème du brasseur

Une petite micro-brasserie produit 2 types de produit (une Ale et une Bière). Suite à une sécheresse, la production doit être limitée par le manque de ressources en céréales (maïs, houblon, malte).

Le tableau suivant donne les recettes utilisées pour la production, ainsi que les ressources disponibles et le profit associé à chaque produit.

Bière	Mais (lb)	Houblon(on)	Malte(lb)	Profit(\$)
Ale	5	4	35	10
Bière	15	4	20	23
Quantité	480	160	1190	

Comment le brasseur peut-il maximiser son profit ?

- Ne faire que de l'Ale ?
- Ne faire que de la Bière ?
- 7,5 barils d'Ale et 29,5 barils de Bière ?
- 12 barils d'Ale et 28 barils de Bière ?

Exemple : le problème du brasseur

Trouver le mélange optimal

De combien peuvent varier les prix sans qu'il ne faille changer le plan de production.

De quelle matière première devrait négocier davantage de volume.

De quelle matière première pourrait-on réduire le volume (et de combien).

Que se passe-t-il si le prix de la bière monte à 30 \$?