Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

Programmation en nombres entiers

- Introduction
- Résolution

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Types de problème d'optimisation

Programme Linéaire en Nombre Entier (PLNE ou IP) : $X \subseteq \mathbb{Z}^n$

Programme Linéaire en Nombre Entier Mix (MIP) :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in X} & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ \text{where,} & X \subseteq \mathbb{Z}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_r} \end{array}$$

Ces problèmes sont théoriquement très difficiles, mais en pratique ils peuvent (souvent) être résolus très rapidement.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Formulation PLNE

$$\min \sum_{s \in \Omega} c_s x_s$$

$$\begin{aligned} s.t. \sum_{s \in \Omega} a_{is} x_s &\geq d_i \quad \forall i \in T \\ x_s &\geq 0, \cancel{\text{entier}}, \forall s \in \Omega \end{aligned}$$

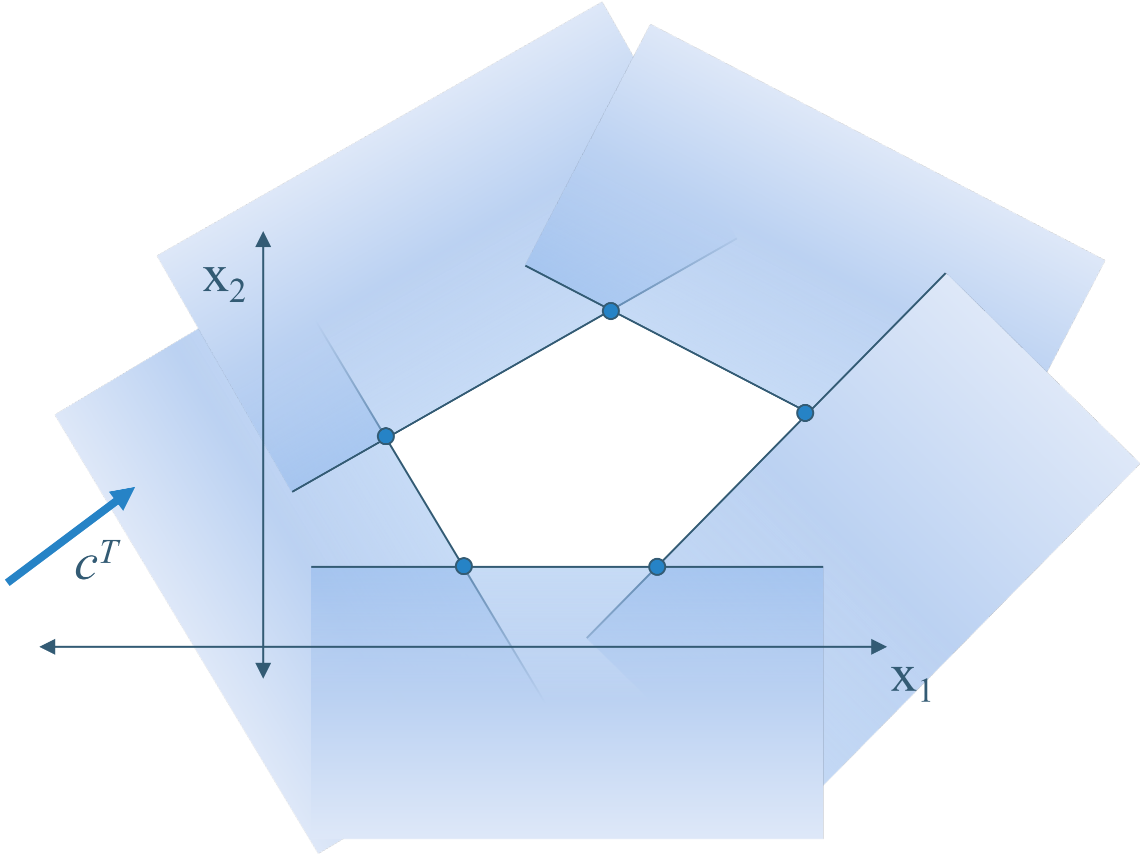
on obtient un PL nommé "Relaxation Linéaire"

- Résolu par séparation et évaluation progressive
  - on branche sur les variables de décision
  - la relaxation linéaire nous donne des bornes inférieures.

Méthodes de résolution pour PL

Algorithme du simplex

- Une solution optimale se trouve nécessairement sur un point extrême.
- Donc on peut la trouver en parcourant les arêtes du polyèdre.



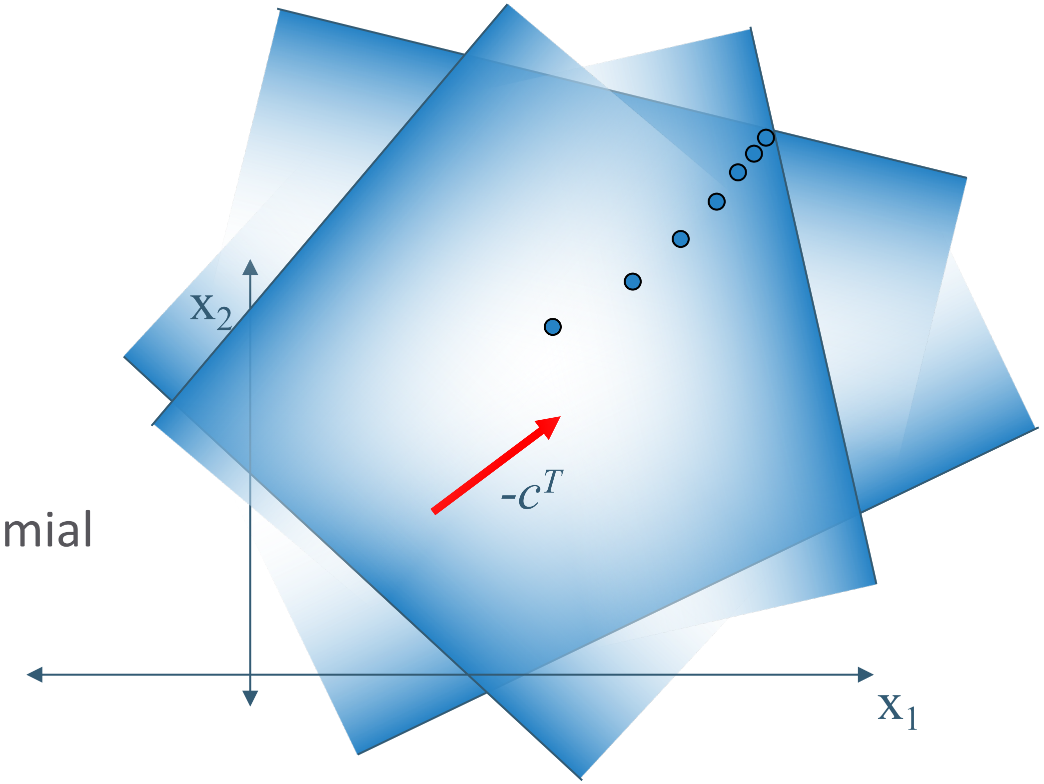
Méthodes de résolution pour PL

Méthode par points Intérieurs

- Méthode dites “Barrières”
- Formulation “Primal-Dual”
- Pas de Newton

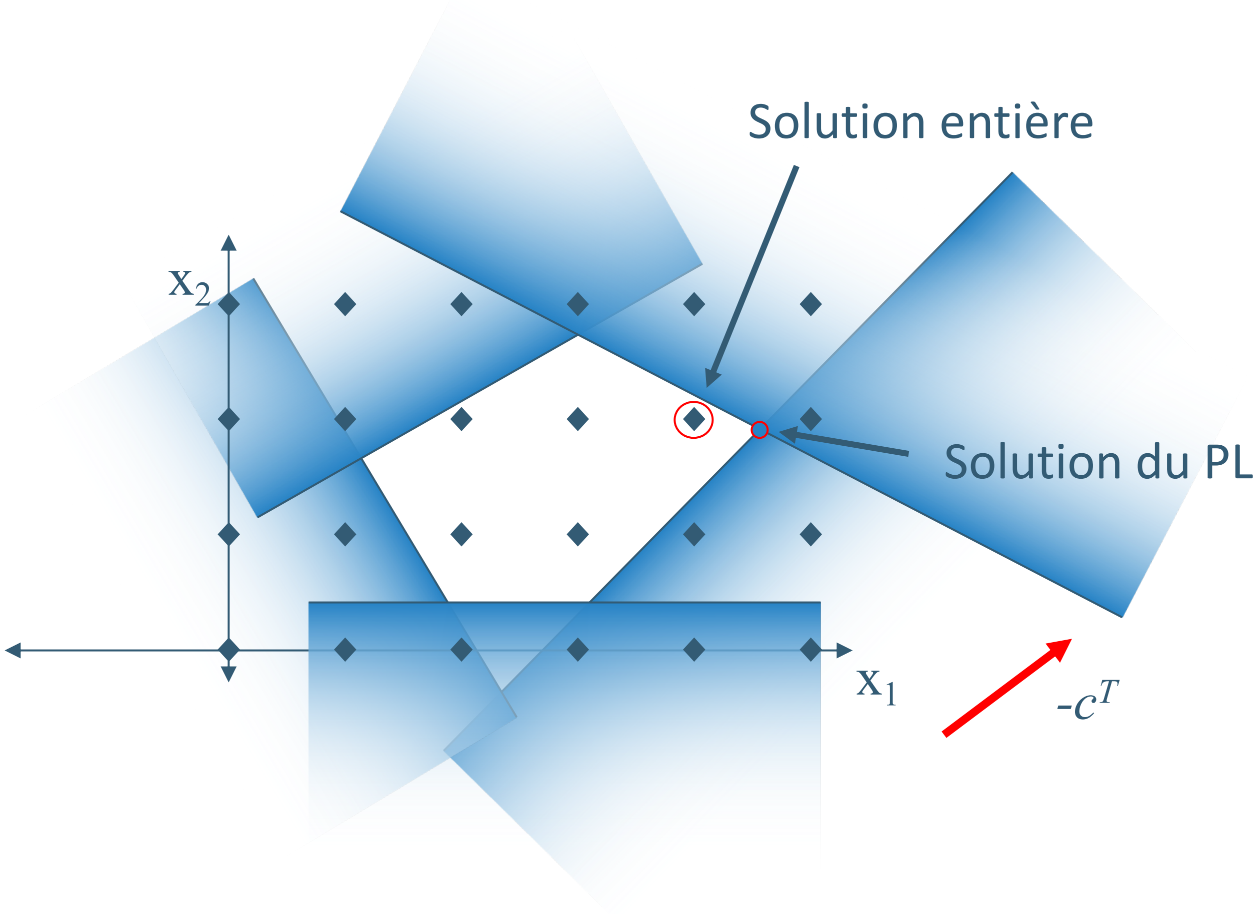
Avantages

- Permet de résoudre de très gros problèmes
- Preuve d’optimalité (comme le simplex)
- Preuve de convergence en un temps polynomial



Comment résoudre un PLNE ?

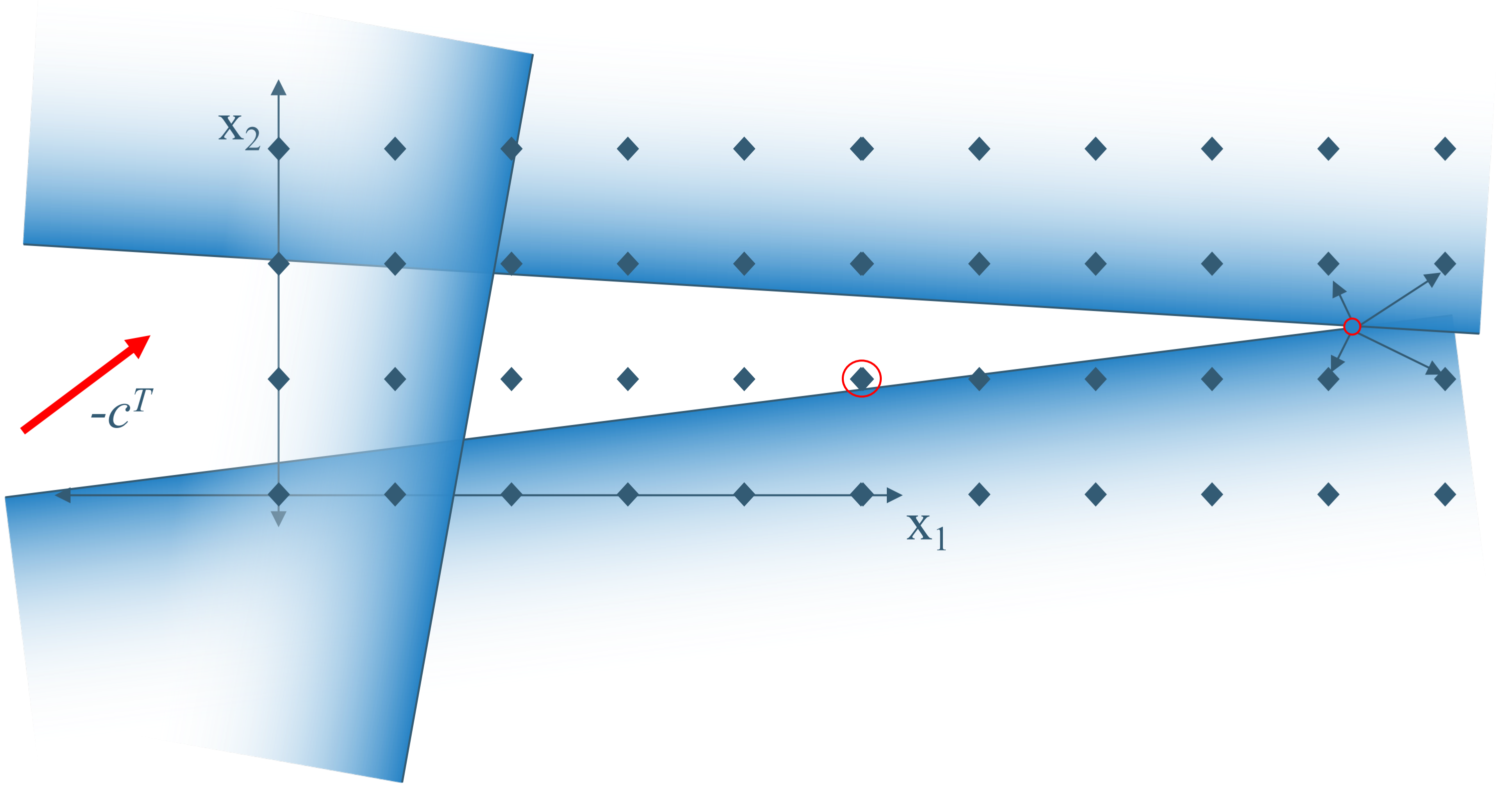
Résoudre un PL puis arrondir ?



Comment résoudre un PLNE ?

Le PL fournit une borne inf (ou sup si on maximise) sur la valeur du PLNE.

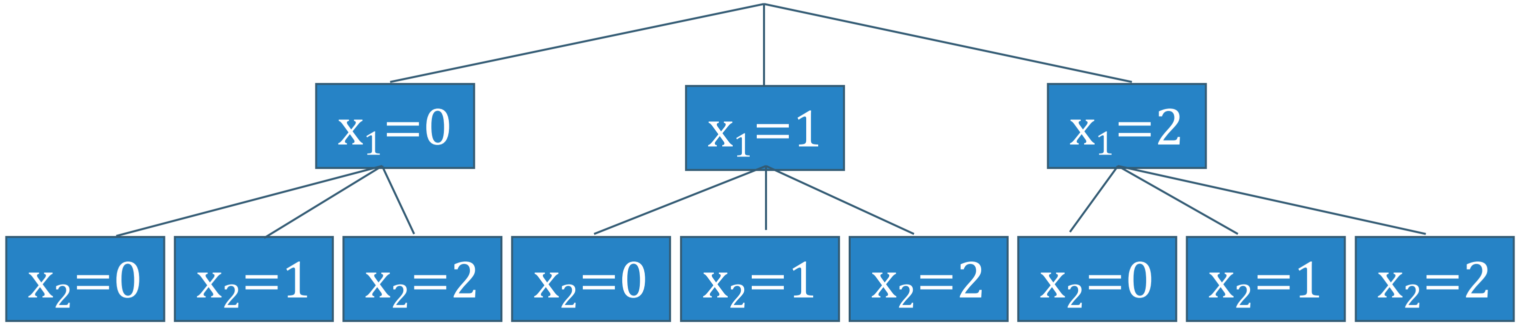
Mais en arrondissant, on peut être très loin d'une solution entière…



Comment résoudre un PLNE ?

Peut-on énumérer les solutions ?

- Énumération (Recherche Arborescente, Programmation Dynamique)



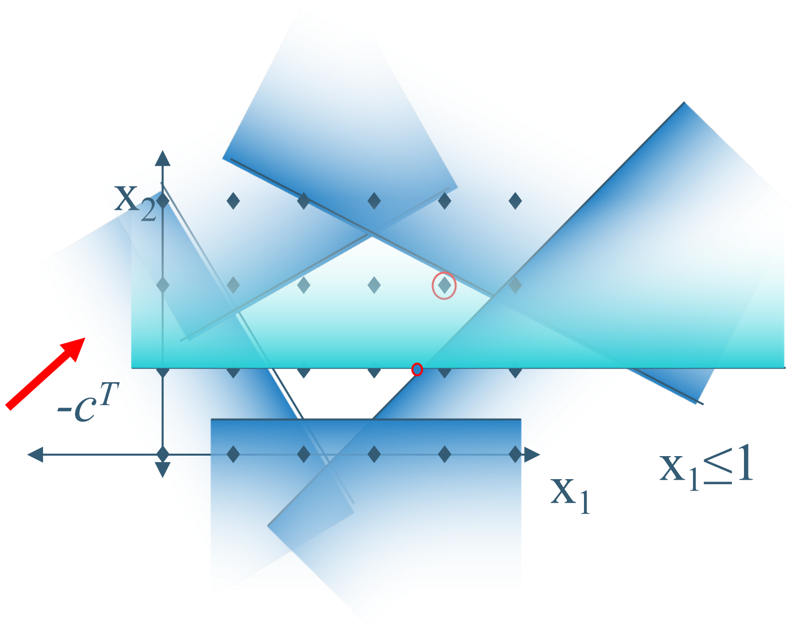
- Garantie de trouver une solution réalisable entière.

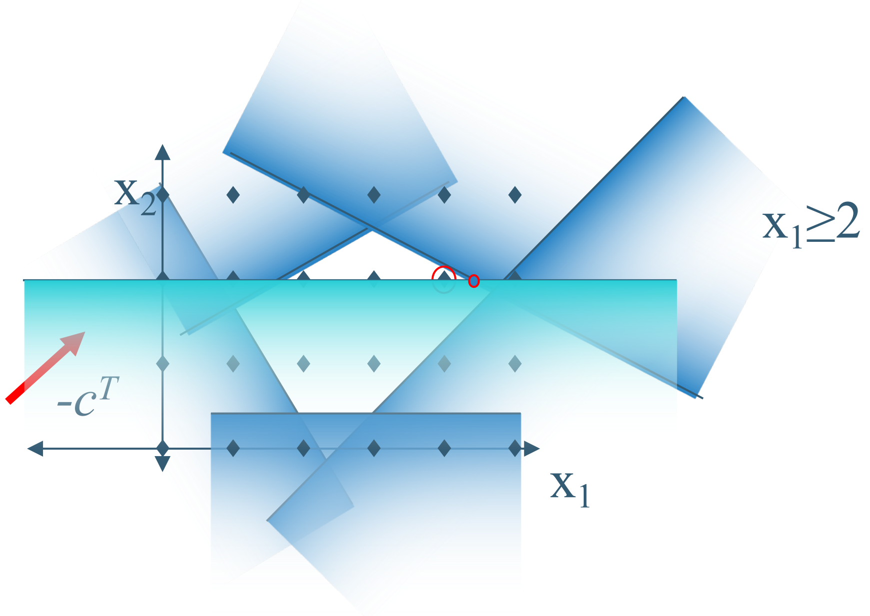
- Mais le temps de calcul croît exponentiellement avec la taille.

Approche combinée pour PLNE

On peut combiner les deux approches

- Résoudre le PL pour obtenir une solution.
- Créer deux sous-problèmes en ajoutant des contraintes.

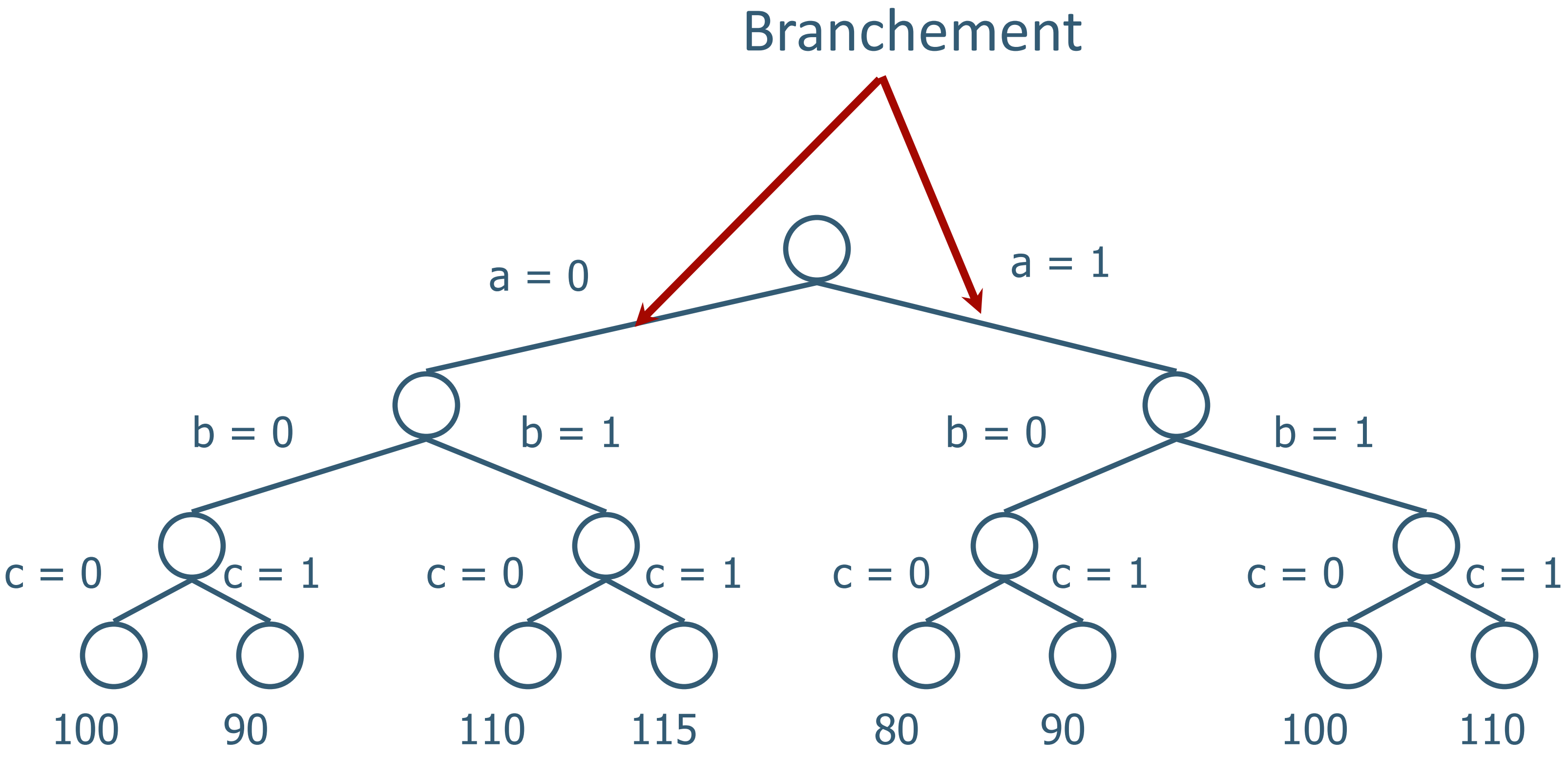




POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

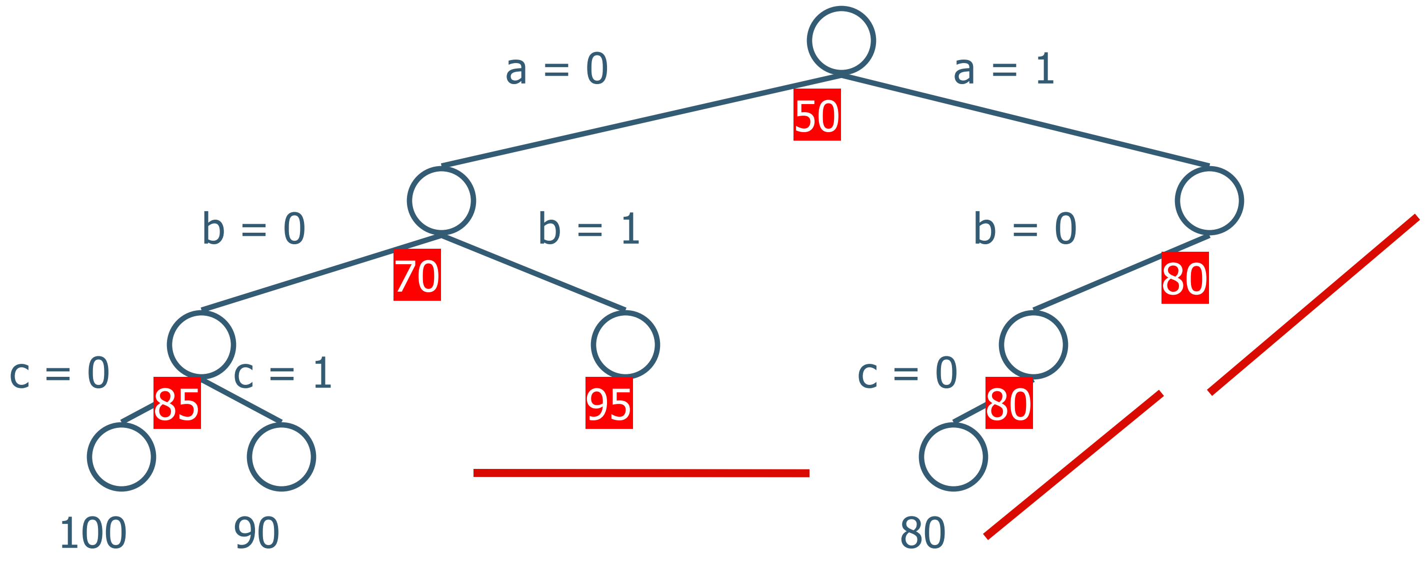
SÉP: le branchement

Imaginez un problème avec 3 variables: a, b, c ϵ {0, 1}



SEP: utilisation des bornes inférieures

Si nous pouvions calculer une borne sur le coût minimal d’un noeud.



Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

Programmation en nombres entiers

- Introduction
- Résolution

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Séparation et évaluation progressive

Mieux connu sous le nom anglais “*branch and bound*”

- **Séparation** (branch): assigne heuristiquement une valeur à une variable
  - Crée deux sous problèmes

- **Évaluation (borne)**: comparer la borne inférieure à la meilleure solution connue
  - Ça ne vaut pas la peine d’explorer le sous-arbre si
    - Minimisation: si BorneInf $\geq$ MeilleureSolution,
    - Maximisation: si BorneSup $\leq$ MeilleureSolution,

SÉP pour résoudre des PLNE

Généralement la borne inférieure = la relaxation linéaire.

- On l'obtient en « relaxant » les contraintes d'intégrité.

On choisit une variable non entière et on la force soit à :

- être plus grande ou égale à l'entier supérieur ou
- être plus petite ou égale à l'entier inférieur.

Branch and Bound:

un exemple

$$
\begin{aligned}
&\max \ \ z = 10x_1 + 50x_2 \\
&\text{s.c.} \\
&-x_1 + 2x_2 \ \ \leq 5 \\
&\ \ x_1 + 2x_2 \ \ \leq 14 \\
&\ \ x_1 \qquad\qquad \leq 8 \\
&\ \ x_1, \mathrm{x}_2 \qquad \geq 0 \\
&\ \ x_1, x_2. \qquad \text{entiers}
\end{aligned}
$$

Relaxation linéaire (ou continue)

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Branch and Bound

un exemple

Premier noeud

(solution optimale de la relaxation linéaire)

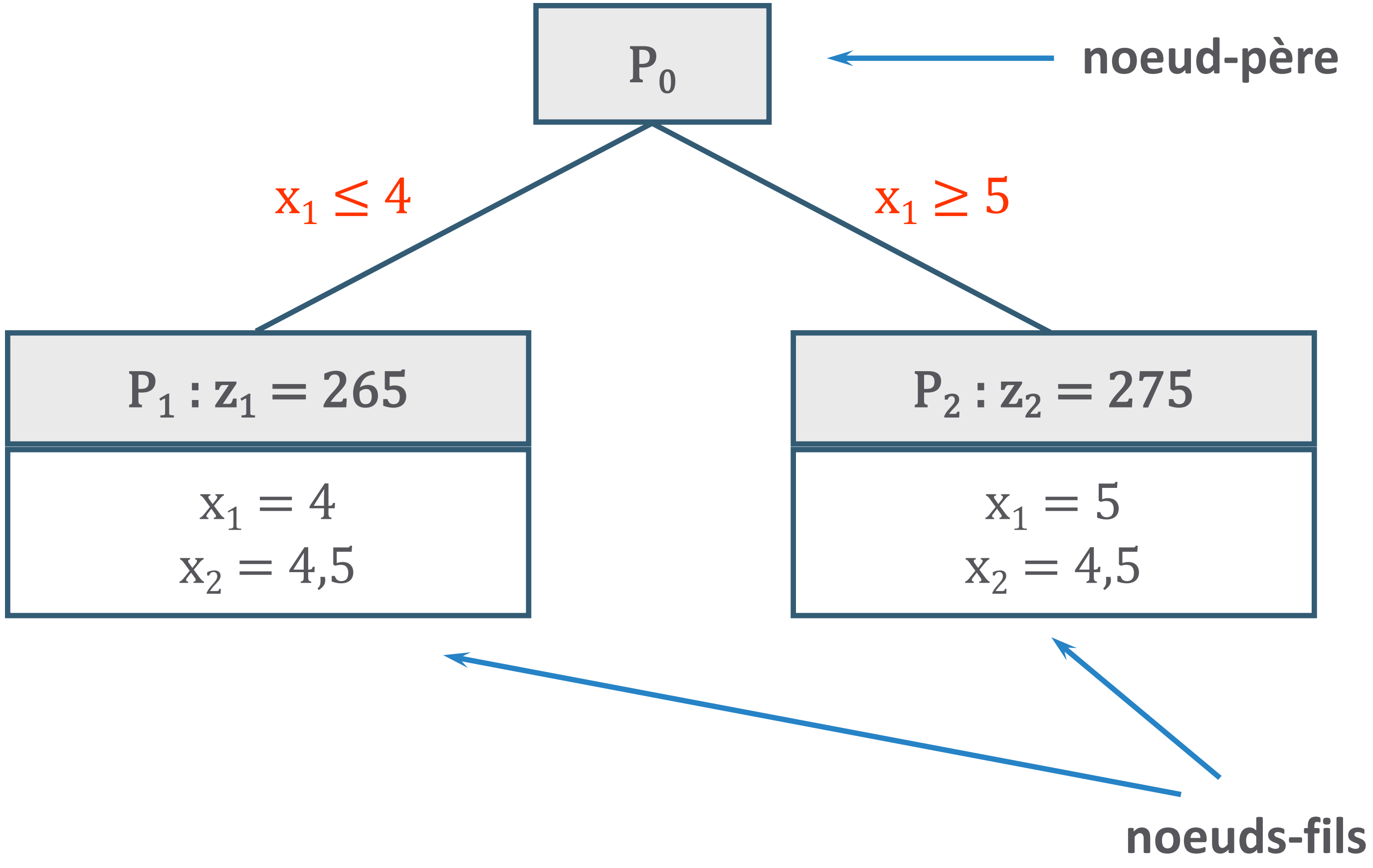
$P_0 : z_0 = 282{,}5$
$x_1 = 4{,}5$ $x_2 = 4{,}75$

Valeur optimale

Variables non nulles

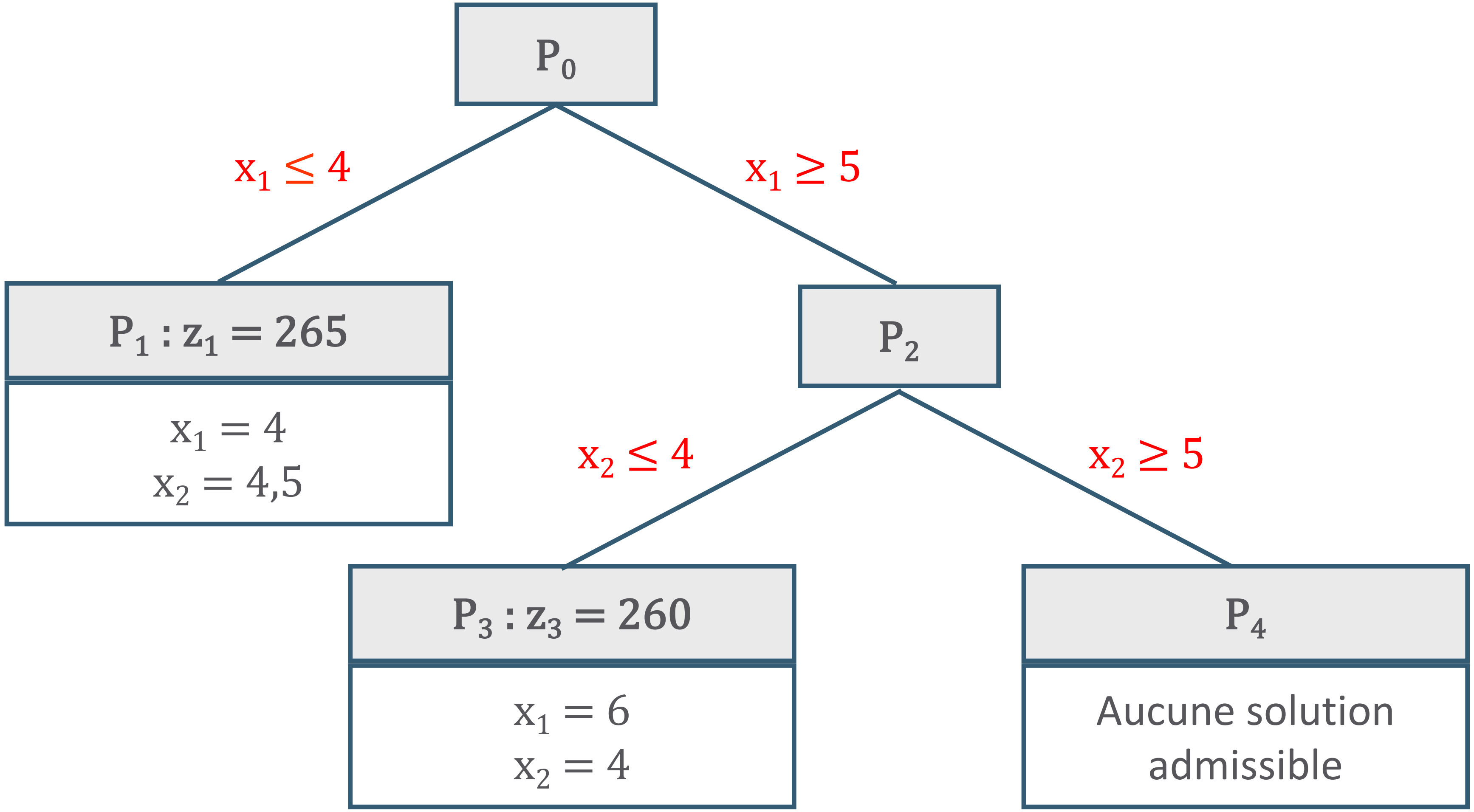
Branch and Bound

un exemple



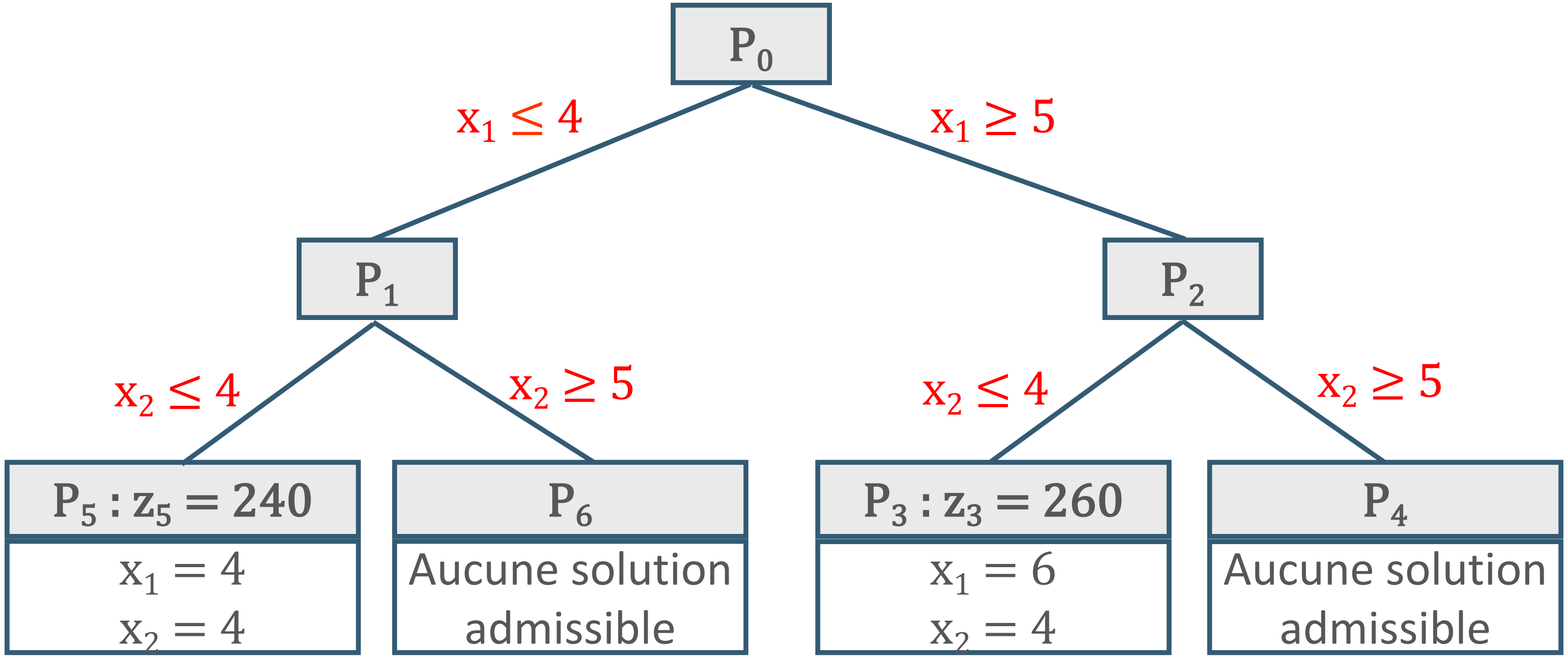
Branch and Bound

un exemple



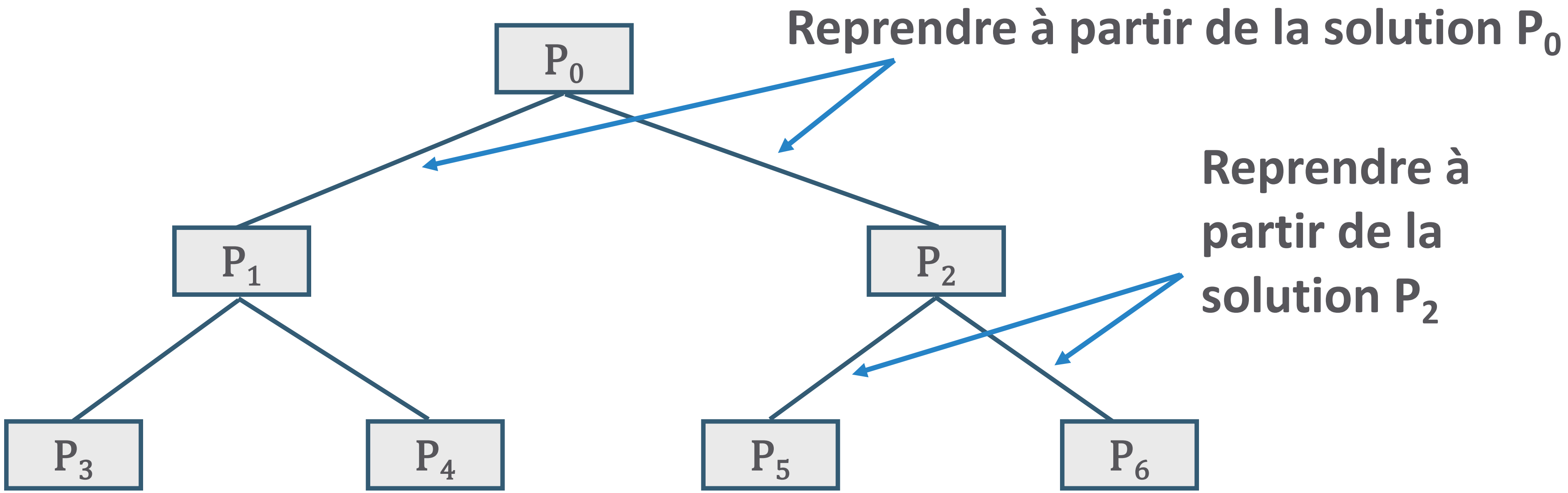
Branch and Bound

Finalement



Calculs incrémentaux

En règle générale, pour calculer une solution optimale d'un nœud-fils, il sera plus rapide de modifier le tableau optimal du nœud père plutôt que de reprendre les calculs de l'algorithme du simplexe à partir de leur début.



Algorithme (problème de minimisation)

Les notations suivantes sont utilisées :

L : ensemble des sous-problèmes actifs;

z_U : la borne supérieure sur la valeur optimale de *MIP* ;

z^i_{LP} : la valeur optimale du problème linéaire *i* ;

$\underline{z}^j_{LP}$: la borne inférieure sur la valeur optimale du sous-problème *j* ;

X^* : La meilleure solution réalisable.

L'algorithme comprend 6 étapes :

- **Étape 1 : Initialisation**

  L = {relaxation initiale}, $z_U = \infty$.

- **Étape 2 : Test d'optimalité**

  Si $L = \varnothing$, x^* est la solution optimale.

- **Étape 3**

  Choisir un sous-problème i et l'éliminer de la liste L.

- **Étape 4**

  Résoudre la relaxation linéaire de i. Si elle n'est pas réalisable, allez à l'étape 3

  Sinon, poser z^i_{LP} et x^i la valeur et la solution optimales obtenues.

- **Étape 5**

  Si $z^i_{LP} \geq z_U$, aller à l'étape 2. Si x^i n'est pas entière, aller à l'étape 6.

  Sinon $z_U = z^i_{LP}$, $x^* = x^i$.

  Éliminer de L tous les sous-problèmes j tels que $z^j_{LP} \geq z_U$ et aller à l'étape 2.

- **Étape 6**

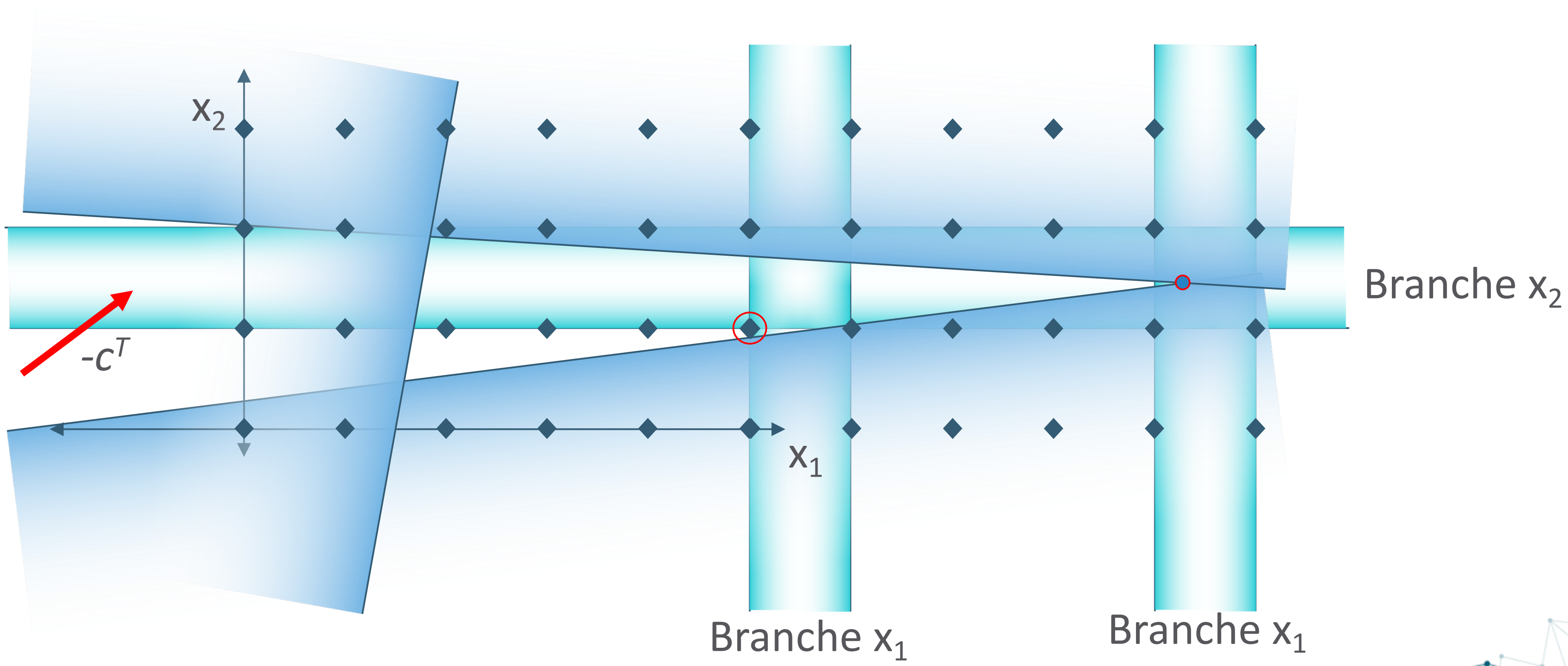
  Choisir une variable binaire ayant une valeur fractionnaire dans la solution x^i et subdiviser le problème *i* à partir de cette variable. Ajouter les nouveaux problèmes à L.

Algorithme (remarque)

Pour que l'algorithme soit complètement défini, on doit fixer:

- à l'étape 3, la sélection du sous-problème à résoudre et
- à l'étape 6, la règle de séparation du nœud courant.

Ces deux règles (choix de nœuds et choix de variables) sont cruciales quant à l'efficacité de l'approche de séparation et d'évaluation progressive.



POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

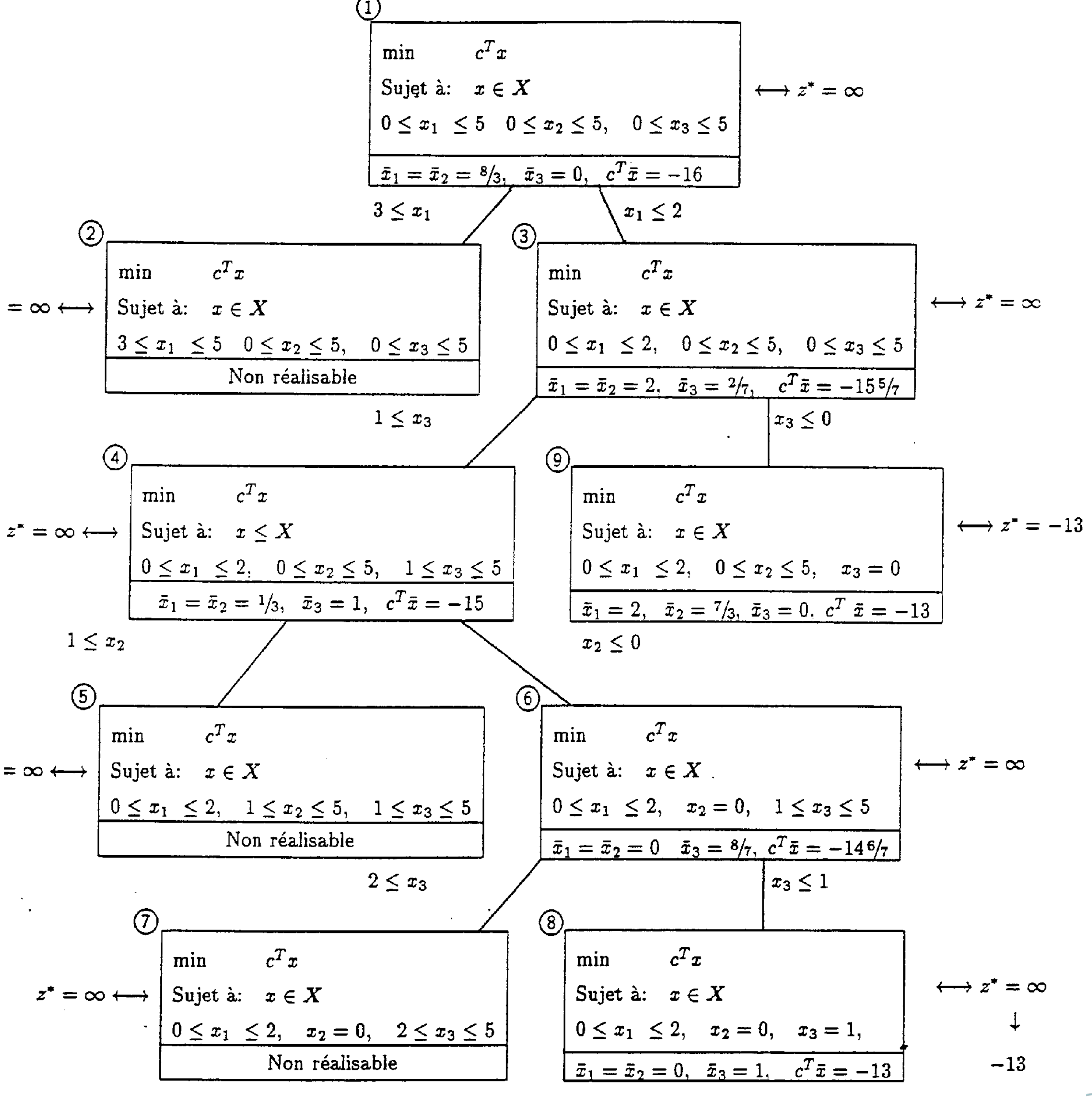
Un autre exemple

Soit le problème de PLNE suivant:

$$
\begin{aligned}
(P):\quad \min \quad & z = -3x_1 - 3x_2 - 13x_3 \\
\text{sujet à :} \quad & \\
& -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8 \\
& 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8 \\
& x_1 \leq 5 \\
& x_2 \leq 5 \\
& x_3 \leq 5 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \text{ et entières.}
\end{aligned}
$$

Et la notation $X = \{x \in I^3 : -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8,\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8\}$

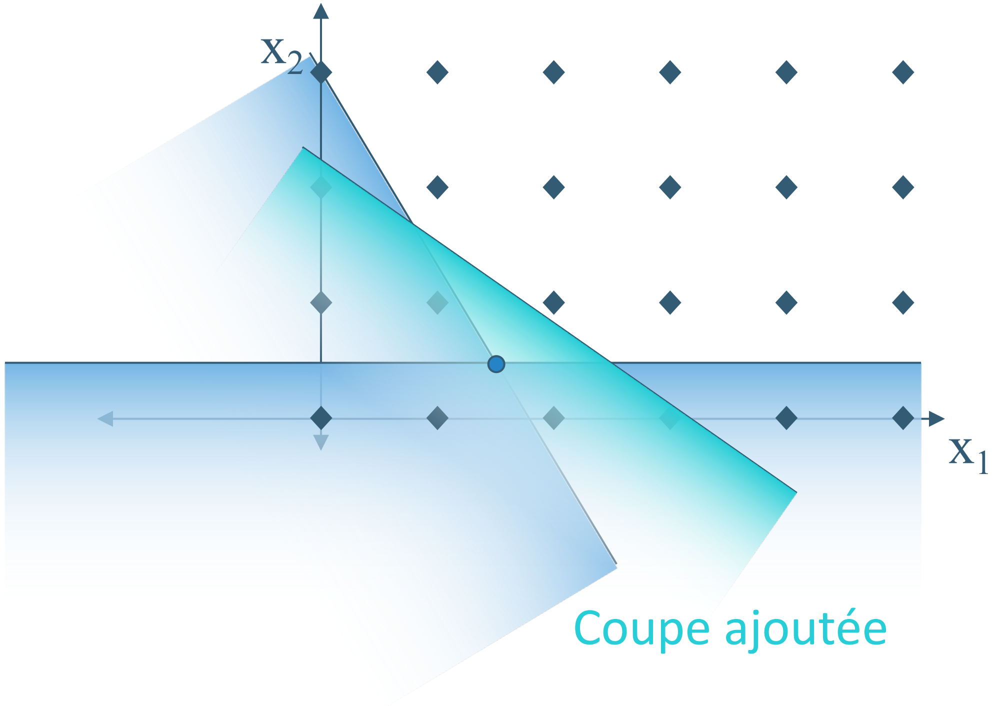
$$z = c^T x = -3x_1 - 3x_2 - 13x_3$$



Solution optimale $x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad c^T x = -13$

Ajout de plans coupants (branch and cut)

L'idée est d'ajouter des coupes au PL pour améliorer la qualité de la borne.



- Toutes les solutions entières sont préservées
- La solution actuelle du PL devient non réalisable.