Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

Programmation Linéaire :
Astuces de modélisation

Résumé

- Les problèmes ne se présentent pas toujours sous une forme qui soit naturellement linéaire.
- Toutefois comme la PL est une technique très efficace, il est souvent avantageux de « reformuler » un problème de manière à ce qu’il soit linéaire.
- On présente donc ici quelques trucs et astuces en vrac…
- À noter que leur efficacité dépend de chaque solveur et de leur capacité à effectuer un prétraitement sur les modèles.
- Cette section est tirée du chapitre 6 du livre AIMMS-modeling.

Valeur absolue: un exemple

- La valeur absolue représente souvent une *déviation* (un écart positif ou négatif) par rapport à une cible souhaitée.
- Prenons l'exemple d'une régression linéaire:
  - On veut déterminer la droite qui permet le mieux possible d'expliquer un ensemble de points (v_j, w_j)
  - Les coefficients de la droite sont donnés par a et b de sorte que $w = av + b$ (a est la pente de la droite et b est l'ordonnée à l'origine).
  - Le problème de la régression linéaire est posé comme suit :

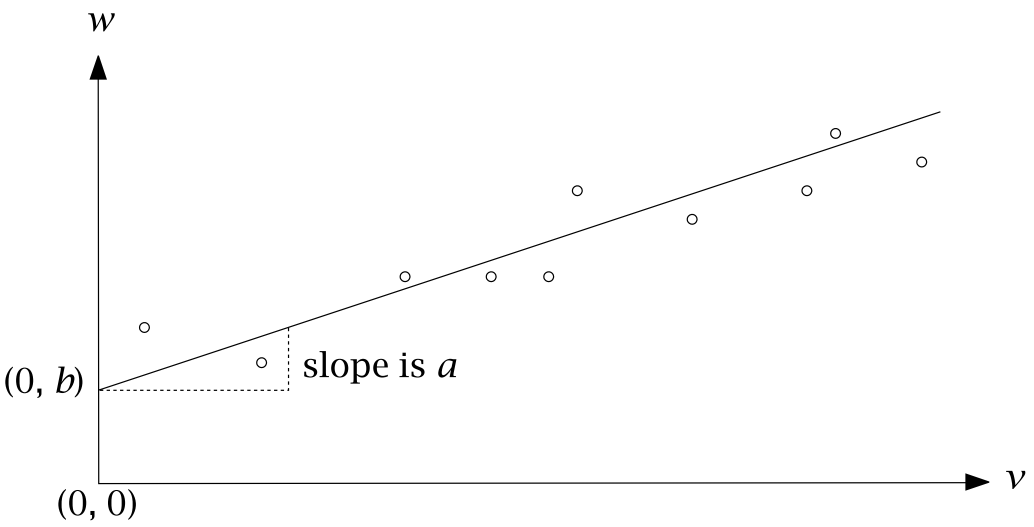
Minimize: $$f(z)$$

Subject to:

$$w_j = av_j + b - z_j \qquad \forall j \in J$$

Valeur absolue: un exemple

- Dans ce modèle z_j représente la différence entre $av_j + b$ (la prédiction de la droite) et w_j (l'observation réelle). C'est en quelque sorte l'erreur d'approximation par une droite.



- On minimise $f(z)$, une fonction de l'erreur qui peut être :
  - La somme des carrés $f(z) = \sum_{j \in J} z_j^2$
  - La somme des valeurs absolues $f(z) = \sum_{j \in J} |z_j|$
  - L'erreur maximale $f(z) = \max_{j \in J} |z_j|$

Minimize: $f(z)$

Subject to:

$$w_j = av_j + b - z_j \qquad \forall j \in J$$

Valeur absolue

Soit le problème linéaire suivant (le signe $\lesseqgtr$ signifie $\leq$ ou $\geq$) :

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in J} c_j \, |x_j| \qquad\qquad c_j > 0$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j \in J} a_{ij} \, x_j \lesseqgtr b_j \qquad\qquad \forall i \in I$$

$$x_j \ \text{libre}$$

- La valeur absolue n'étant pas une fonction linéaire, il faut trouver une manière de s'en débarrasser…

Valeur absolue

- Pour ce faire on va remplacer chaque variable x_j par deux autres variables x_j^+ et x_j^- qui représentent les parties positives et négatives de chaque variable.

- Pour ce faire on applique la substitution suivante :

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$
$$|x_j| = x_j^+ + x_j^-$$
$$x_j^+, x_j^- \geq 0$$

- Ce qui nous donne le modèle suivant :

Minimize: $\sum_{j \in J} c_j (x_j^+ + x_j^-) \qquad c_j > 0$

Subject to:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} (x_j^+ - x_j^-) \gtrless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j^+, x_j^- \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

Valeur absolue

- La valeur de ces deux modèles est optimale si pour chaque j au moins une des deux valeurs de x_j^+ et x_j^- est 0
- Dans ce cas $x_j^+ = x_j$ si $x_j \geq 0$, et $-x_j^+ = x_j$ si $x_j \leq 0$.
- Dans le cas ou x_j^+ et $x_j^- > 0$ pour un certain j,
  - Définissons $d = \min\left(x_j^+, x_j^-\right)$, d est donc > 0.
  - Soustrayons d de x_j^+et x_j^-.
  - Ceci ne change en rien la valeur de $x_j = x_j^+ - x_j^-$
  - Mais la valeur de $\left|x_j\right| = x_j^+ + x_j^-$ est réduite de $2d$.
  - Ceci contredit le fait que la solution était optimale, puisqu'il est possible de la réduire de $2d$.

- *Sous quelle condition la technique précédente est-elle valide* ?

Objectif minimax

Considérons le modèle suivant (le signe $\lesseqgtr$ signifie $\leq$ ou $\geq$):

$$\min \quad \max_{k\in K} \sum_{j\in J} c_{kj} x_j$$

subject to

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \gtreqless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

- Si par exemple on a $K = \{1,2,3\}$ et $J = \{1,2\}$ alors l'objectif sera :
  - Minimiser $\max(c_{11}x_1 + c_{12}x_2,\ c_{12}x_2 + c_{22}x_2, c_{31}x_1 + c_{32}x_2)$

- On retrouve ce type de problème lorsqu'on veut réduire le pire cas, comme l'erreur maximum, la violation maximale, etc.

Objectif minimax

- Encore une fois, on peut linéariser cet objectif en ajoutant une nouvelle variable: la valeur du coût maximum:

$$z = \max_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} x_j$$

- Toutefois l'opération *max* doit disparaitre, on doit donc plutôt introduire cette variable à travers des contraintes liantes nécessaires:

$$\begin{aligned}
&\min && z \\
&\mathit{subject\ to.} && \\
& && \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \gtrless b_i && \forall i \in I \\
& && \sum_{j \in J} c_{kj} x_j \leq z && \forall k \in K \\
& && x_j \geq 0 && \forall j \in J
\end{aligned}$$

- En minimisant z, on s'assure de minimiser les |K| objectifs. De plus, on garantit que *z* est égal au maximum des coûts (pourquoi ?).

Objectif fractionnaire

Considérons le modèle suivant :

$$\min \quad \left(\sum_{j\in J} c_j x_j + \alpha\right) \Big/ \left(\sum_{j\in J} d_j x_j + \beta\right)$$

subject to.

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \lesseqgtr b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

- Ici nous avons un ratio de deux termes linéaires, et tout le reste du modèle est linéaire. Il faut donc transformer l'objectif.

- On retrouve ce genre de modèle lorsqu'on traite des données financières par exemple (taux de rendement).

Objectif fractionnaire

- Encore une fois, nous introduirons des variables supplémentaires afin de linéariser le modèle.
  - Supposons sans perte de généralité que le dénominateur soit positif (sinon il faut inverser les inégalités)
  - Nous utiliserons les variables t et y_i définies comme suit : $y_j = tx_j$
- On substitue l'inégalité ci-dessous dans le modèle originel.

$$t = 1 \Big/ \left(\sum_{j \in J} d_j x_j + \beta \right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{j \in J} c_j x_j t + \alpha t & \\
\text{subject to.} & & \\
& \displaystyle\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \lesseqgtr b_i & \forall i \in I \\
& \displaystyle\sum_{j \in J} d_j x_j t + \beta t = 1 & \\
& x_j \geq 0 & \forall j \in J
\end{array}$$

Objectif fractionnaire

- Ensuite on multiplie chaque côté des contraintes originelles par t $(t \geq 0)$ et on réécrit le modèle en terme de y_j et t (où $y_j = tx_j$).

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in J} c_j y_j + \alpha t \\
\text{subject to.} \quad & \\
& \sum_{j \in J} a_{ij} y_j \lesseqgtr b_i t && \forall i \in I \\
& \sum_{j \in J} d_j y_j + \beta t = 1 \\
& t > 0 \\
& x_j \geq 0 && \forall j \in J
\end{aligned}
$$

- Finalement on permet à t d'être ≥ 0 plutôt que > 0 afin d'obtenir un programme linéaire.
- Les valeurs de x_j peuvent être obtenues de la solution optimale en divisant y_j par t.