

A network diagram with white and blue nodes connected by white lines on a dark teal background.

DUALITÉ

**Outils de Recherche
Opérationnelle en Génie - MTH 8414**

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-
Martin.Rousseau@polymtl.ca



Soit un modèle linéaire

$$\text{Max } x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

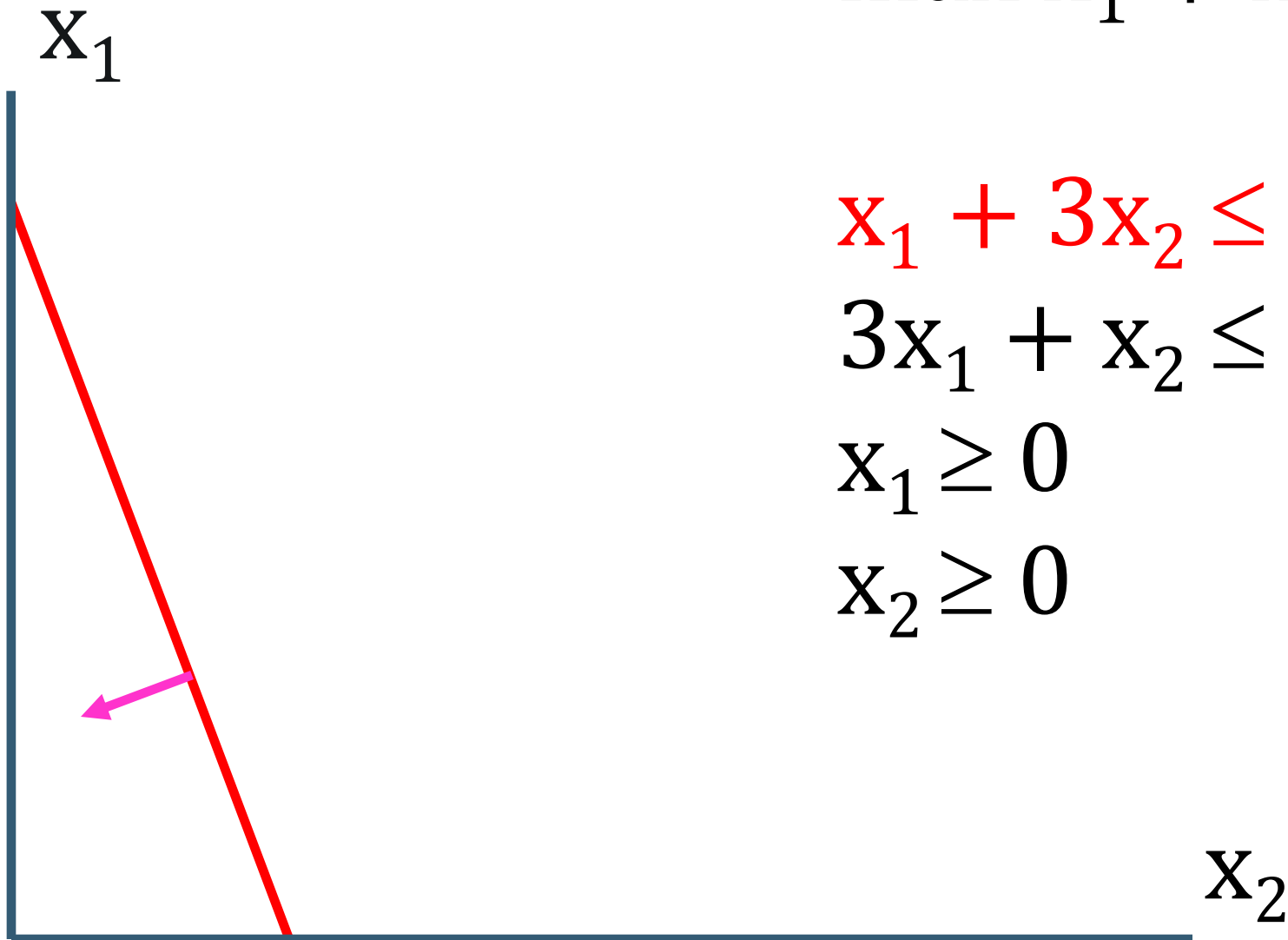

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



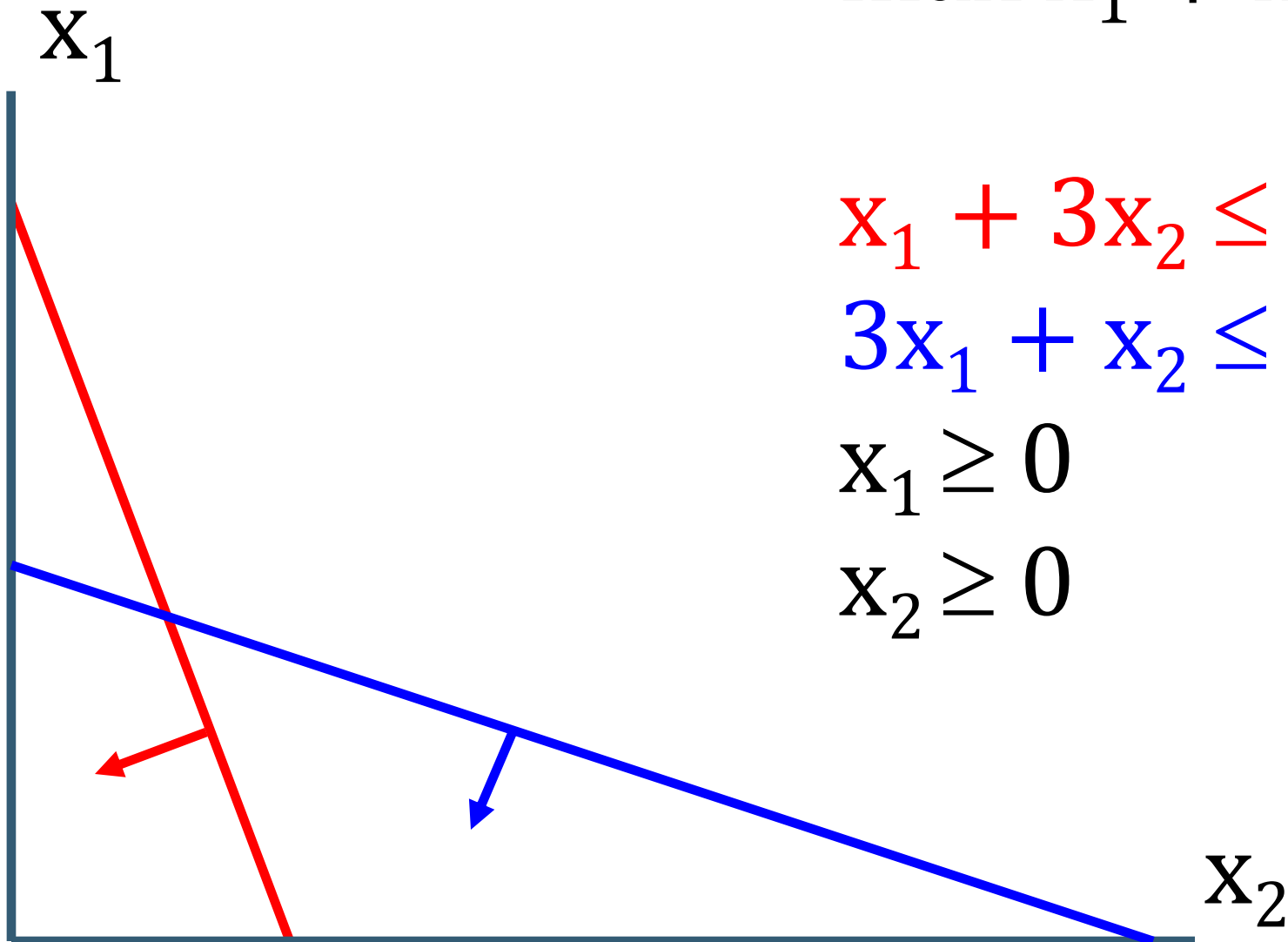
$$\max x_1 + x_2$$

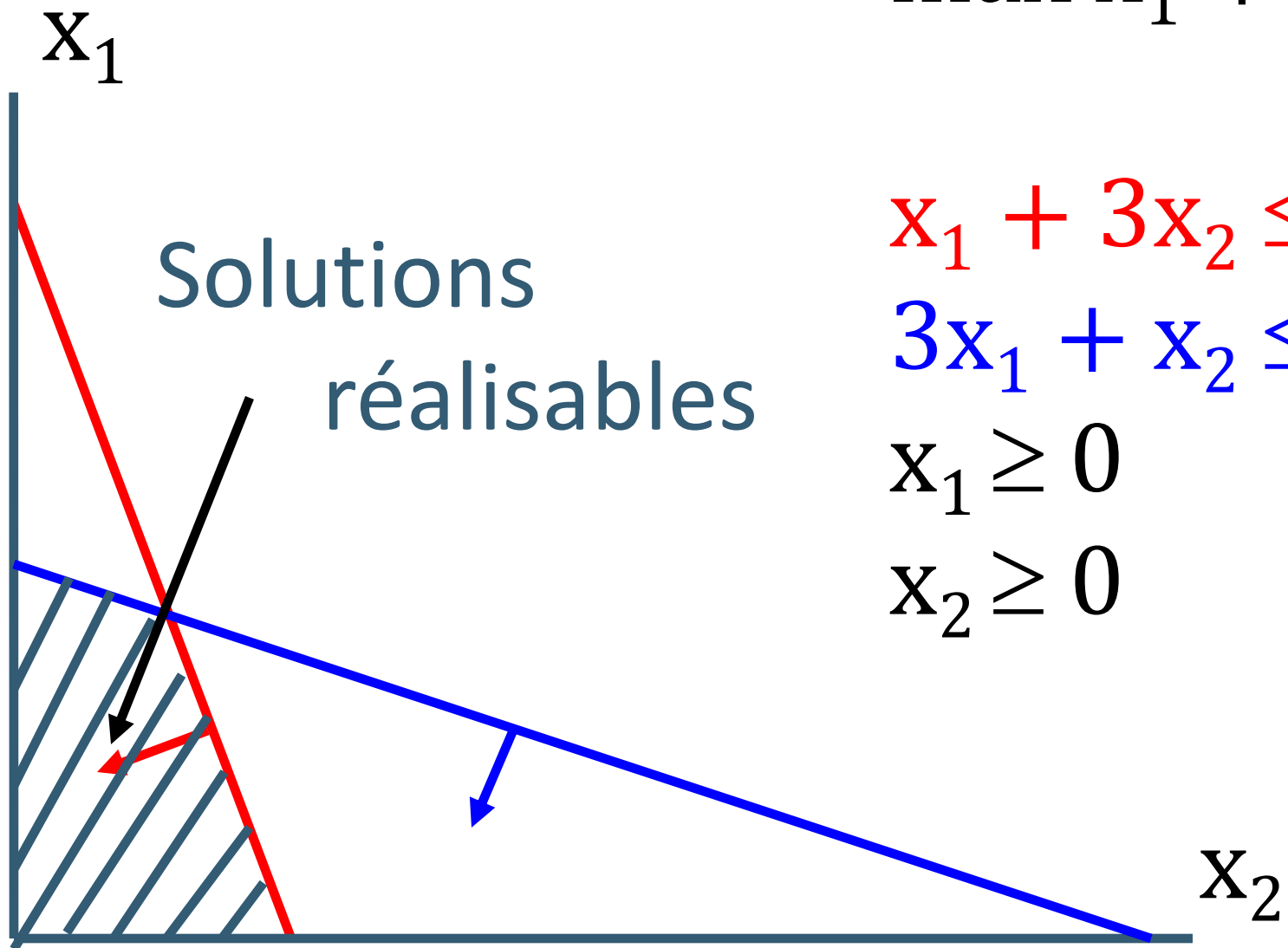
$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$





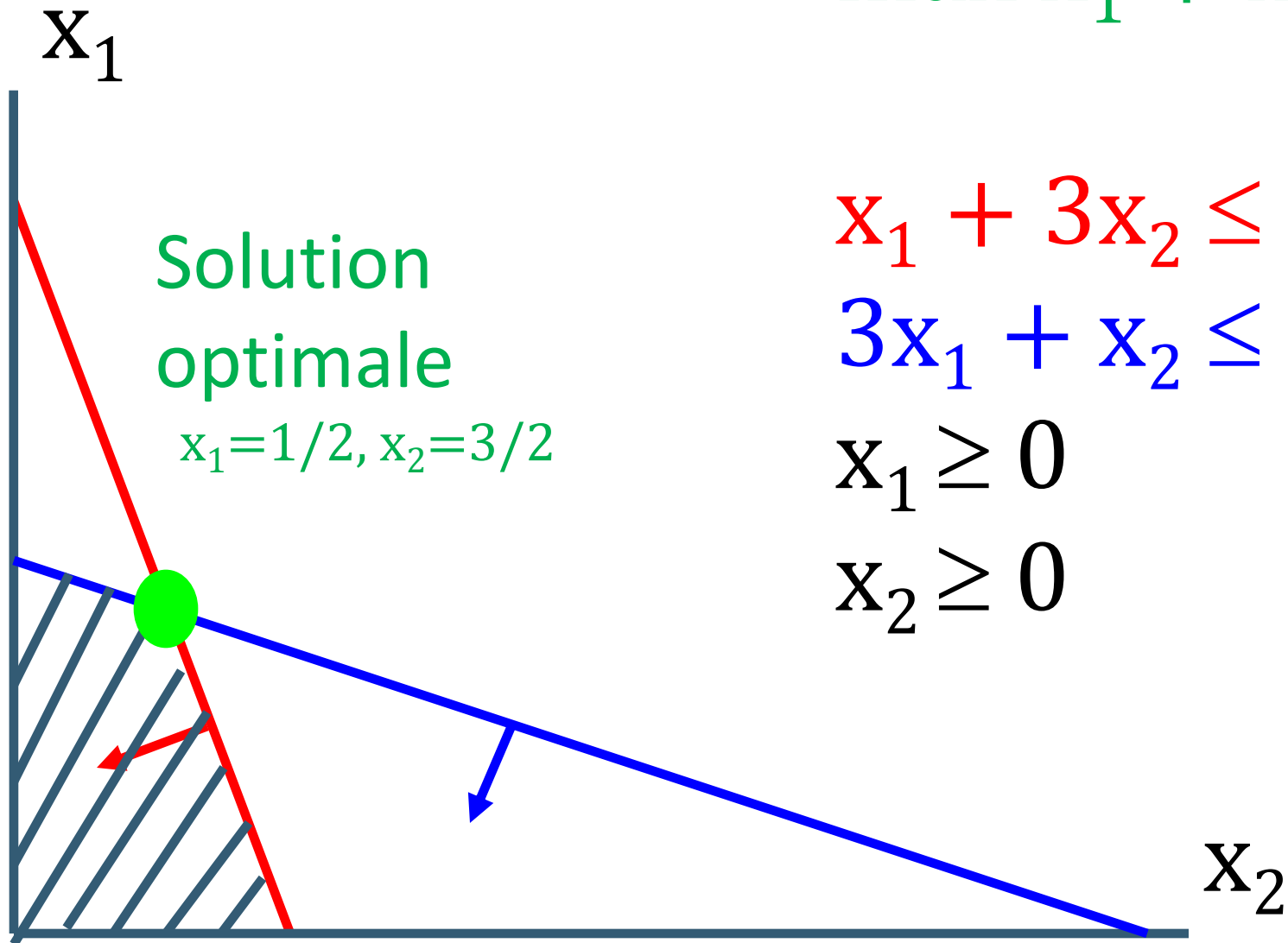
$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Pouvez-vous prouver l'optimalité ?

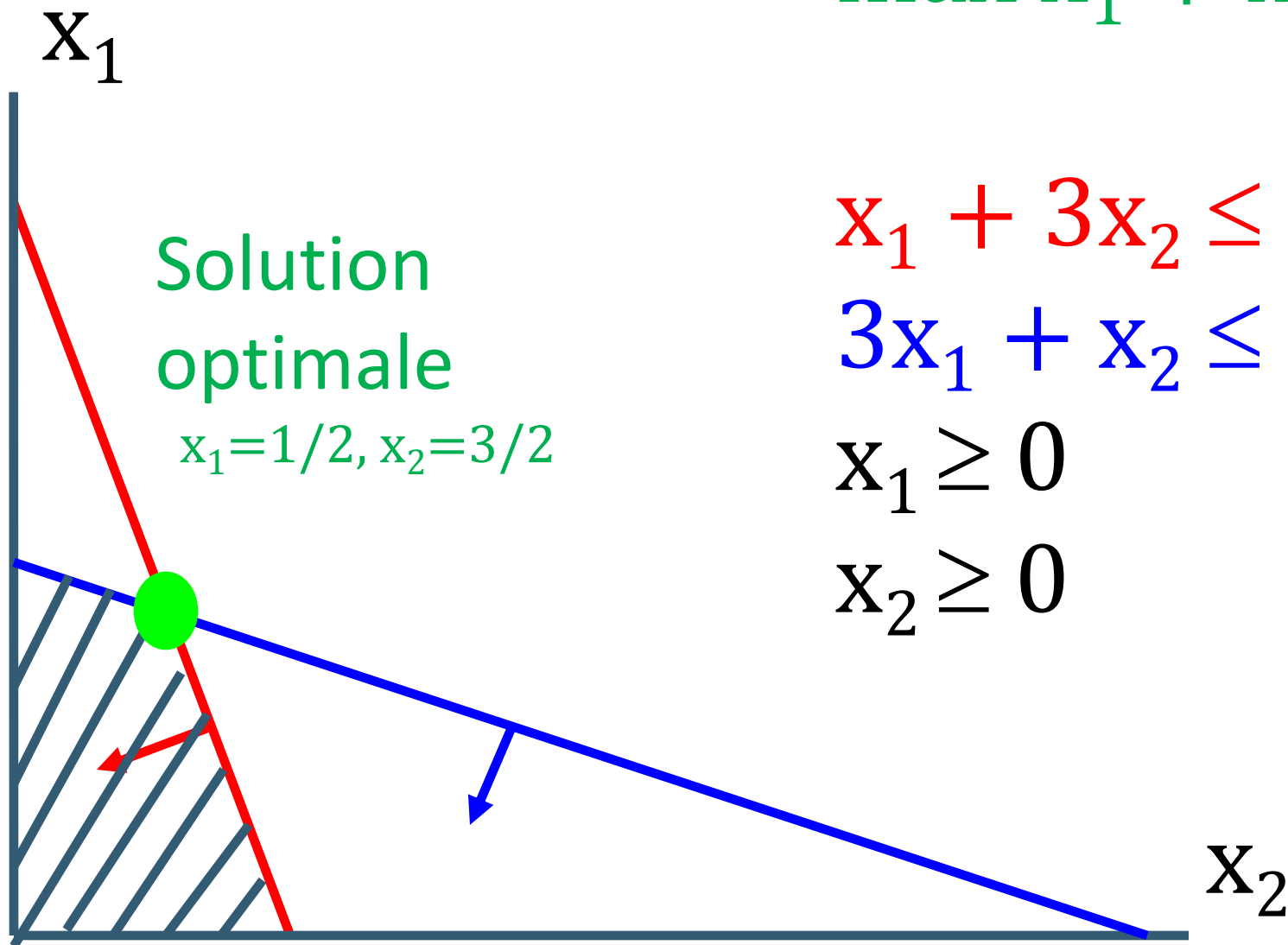
$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

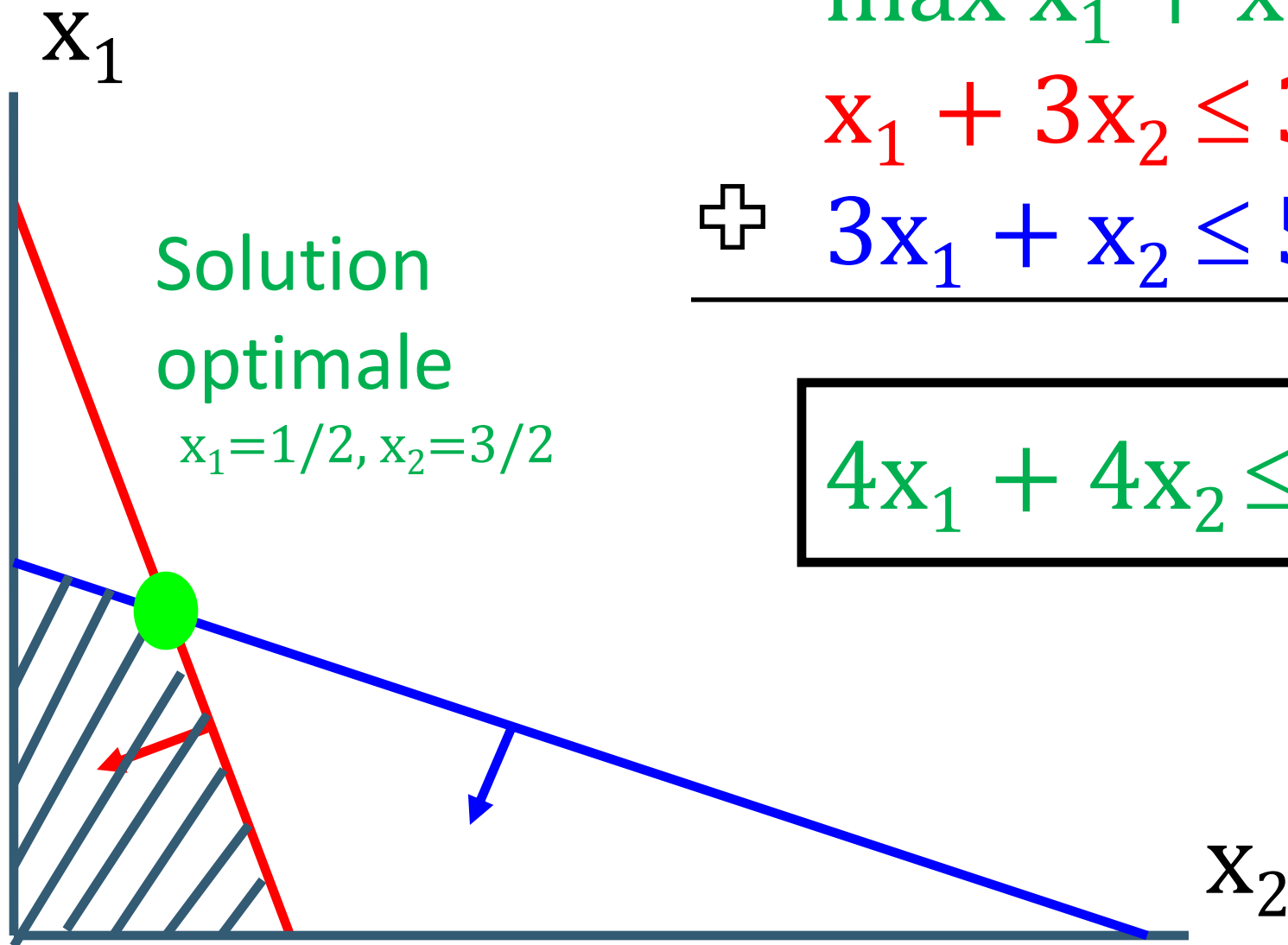
$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Pouvez-vous prouver l'optimalité ?



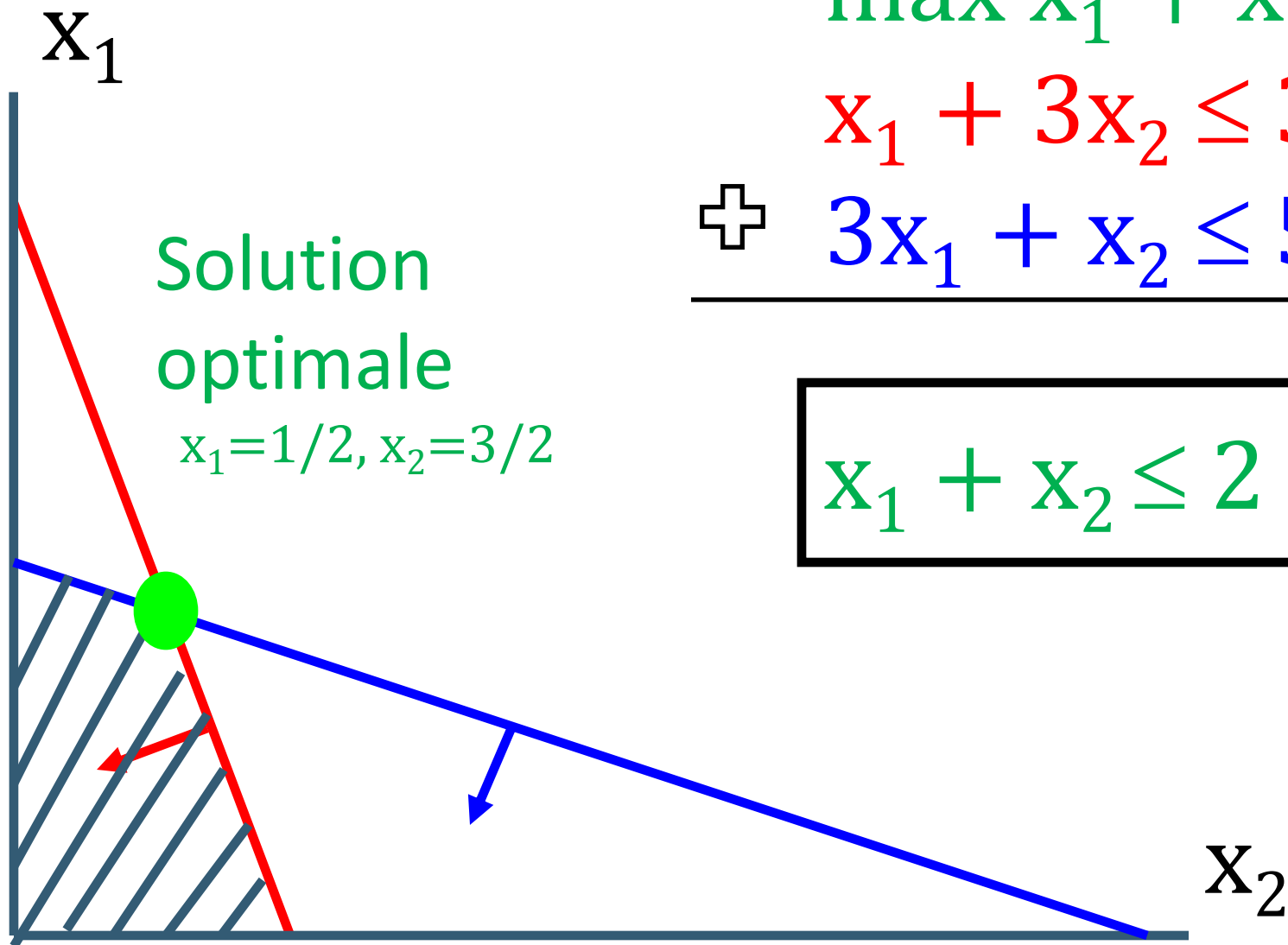
$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$+ \quad 3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 8$$

Pouvez-vous prouver l'optimalité ?



$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$+ \quad 3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$



Un autre programme linéaire

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1=1, x_2=1, \quad \text{Optimale ?}$$





Un autre programme linéaire

$$\max x_1 + x_2$$

$$(x_1 + 2x_2 \leq 3) \quad *3$$

$$(4x_1 + x_2 \leq 5) \quad *1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} \hline 7x_1 + 7x_2 \leq 14 \\ \hline x_1 + x_2 \leq 2 \end{array} \quad \equiv$$

$$x_1=1, x_2=1,$$

Optimale !





Un autre programme linéaire

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$


$$x_2 \geq 0$$

$$\leq 7x_1 + 7x_2 \leq 14$$

La “preuve” est une borne supérieure sur l’objectif.

On veut donc construire une équation qui, tout en étant minimale, est toujours plus grande que n’importe quelle solution réalisable.

Si la borne = la solution obtenue alors celle si est optimale.





Recherche de la preuve d'optimalité

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad * y_1$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5 \quad * y_2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

On cherche la plus petite borne supérieure pour ce problème

On introduit des multiplicateurs pour chaque contrainte du problème





Recherche de la preuve d'optimalité

$$\max x_1 + x_2$$

On cherche la plus petite borne supérieure pour ce problème

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad * y_1$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5 \quad * y_2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

On définit leur signe: elles doivent être positives pour ne pas changer le sens des inégalités.





Recherche de la preuve d'optimalité

$$\max x_1 + x_2$$

On cherche la plus petite borne supérieure pour ce problème

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 \leq 5 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$* y_1$$

$$* y_2$$


$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

Les coefficients de l'expression doivent être plus grands que ceux de l'objectif pour garantir une valeur toujours supérieure à celle de la fonction objectif



Recherche de la preuve d'optimalité

$$\max x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 \leq 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} * y_1 \\ * y_2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad y_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$$

On cherche la plus petite borne supérieure pour ce problème

On minimise la valeur de la borne.

$$\min 3y_1 + 5y_2$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$



L'un est le dual de l'autre

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Primal



$$\min 3y_1 + 5y_2$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

Dual





La dualité faible (solutions réalisables)

$$\max x_1 + x_2 \leq \min 3y_1 + 5y_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Primal

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

Dual





La dualité forte (solution optimale)

$$\max x_1 + x_2 \quad = \quad \min 3y_1 + 5y_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Primal

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

Dual



Soit le problème PRIMAL

$$\text{Max } z = c^t x$$

$$\text{s.c. } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Alors son DUAL est

$$\text{Min } z' = b^t y$$

$$\text{s.c. } A^t y \geq c$$

$$y \geq 0$$



Théorème 1 (dualité faible)

- Soient E l'ensemble des solutions réalisables du primal et E' l'ensemble des solutions réalisables du dual.
Alors:

$$\forall x \in E \text{ et } \forall y \in E'$$

$$\text{On a } c^t x \leq b^t y$$

$$\text{(i.e. } z \leq z')$$

Corollaire du théorème 1

- Si un P.L. n'admet pas de solution optimale finie (il est non borné), alors son dual n'admet aucune solution réalisable (la réciproque est fausse).





Théorème 2 (dualité forte)

- S'il existe une solution x^* du primal et une solution y^* du dual telles que $c^t x^* = b^t y^*$ alors ces solutions sont optimales pour leurs problèmes respectifs.

Théorème de dualité forte

- Si le problème primal et son dual admettent chacun au moins une solution réalisable, soit z la valeur de l'objectif du primal et z' la valeur de l'objectif du dual, alors :
 - a) z et z' ont une valeur optimale finie
 - b) $\max z = \min z'$




Exemple

Primal

$$\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow$$

s.c.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$


Dual

$$\text{Min } z' = 3y_1 + 8y_2 + 4y_3$$

s.c.

$$y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 2$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$


Exemple (suite)

Si on regarde la forme matricielle

Primal

1	1	3
-1	1	8
2	1	4
2	3	

Dual

1	-1	2	2
1	1	1	3
3	8	4	



Exemple

Primal

$$\text{Max } 2400x_1 + 4000x_2$$

S.C.

$$10x_1 + 40x_2 \leq 4000$$

$$20x_1 + 20x_2 \leq 2600$$

$$30x_1 + 10x_2 \leq 2700$$



Dual

$$\text{Min } 4000y_1 + 2600y_2 + 2700y_3$$

S.C.

$$10y_1 + 20y_2 + 30y_3 \geq 2400$$

$$40y_1 + 20y_2 + 10y_3 \geq 4000$$





Résultats

Primal

Dual

	Valeur	Coût réduit		Valeur	Coût réduit
X_1	40	0	Y_1	53.3	0
X_2	90	0	Y_2	93.3	0
Contrainte	Écart	Coût Marg.	Y_3	0	600
1	0	53.3	Contrainte	Écart	Coût Marg.
2	0	93.3	1	0	-40
3	600	0	2	0	-90

Que remarquez-vous ? Le dual du dual = ...





La Dualité

- Le concept de la dualité est FONDAMENTAL en PL
- Il permet entre autres:
 - de réduire le nombre de contraintes;
 - l'obtention d'une structure plus efficace pour la résolution du problème;
 - de concevoir des méthodes de décomposition performantes.
- Il fournit essentiellement l'information sur la sensibilité de la solution optimale par rapport aux changements dans:
 - l'objectif,
 - les coefficients des contraintes,
 - les constantes du terme de droite,
 - l'addition de nouvelles variables,
 - l'addition de nouvelles contraintes.





Variables duales et coûts réduits

Le **prix (ou variable) dual** pour chaque contrainte:

- indique l'effet sur l'objectif si on augmente d'une unité le côté droit de la contrainte.
- est aussi appelé coût marginal (shadow price) pour indiquer le montant que l'on serait prêt à payer pour une unité additionnelle de la ressource correspondante.
- équivaut à la valeur optimale donnée à la variable associée à cette contrainte dans le problème dual.

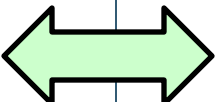
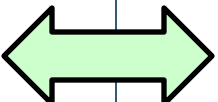
Le **coût réduit** pour chaque variable.

- indique de combien on devrait augmenter le coefficient d'une variable pour qu'il devienne profitable de rendre cette variable positive.
- indique la pénalité (par unité) à payer pour forcer la variable dans la solution.
- équivaux à l'écart de la contrainte dual associée à cette variable.

Les coûts réduits ne sont valables que dans un intervalle spécifié dans l'analyse de sensibilité (range analysis).



Transformation

Primal		Dual	
Min $c^T x$ s.t.: $Ax \geq b$ $x \geq 0$		Max $b^T \lambda$ s.t.: $A^T \lambda \leq c$ $\lambda \geq 0$	
Min $c^T x$ s.t.: $Ax = b$ $x \geq 0$		Max $b^T \lambda$ s.t.: $A^T \lambda \leq c$ λ (libre)	



Transformation

Résumé

max	min
i^{th} contrainte =	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \in \mathbb{R}$	j^{th} contrainte =
$x_j \geq 0$	j^{th} contrainte \geq
$x_j \leq 0$	j^{th} contrainte \leq
i^{th} contrainte \leq	$y_i \geq 0$
i^{th} contrainte \geq	$y_i \leq 0$

