# Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

**TSP – Méthode de plans coupants**

**VRP – Génération de colonnes**

- VRP Intro
- Intuition
- Problème maître
- Sous-Problème
- Branch and Price
- Les défis

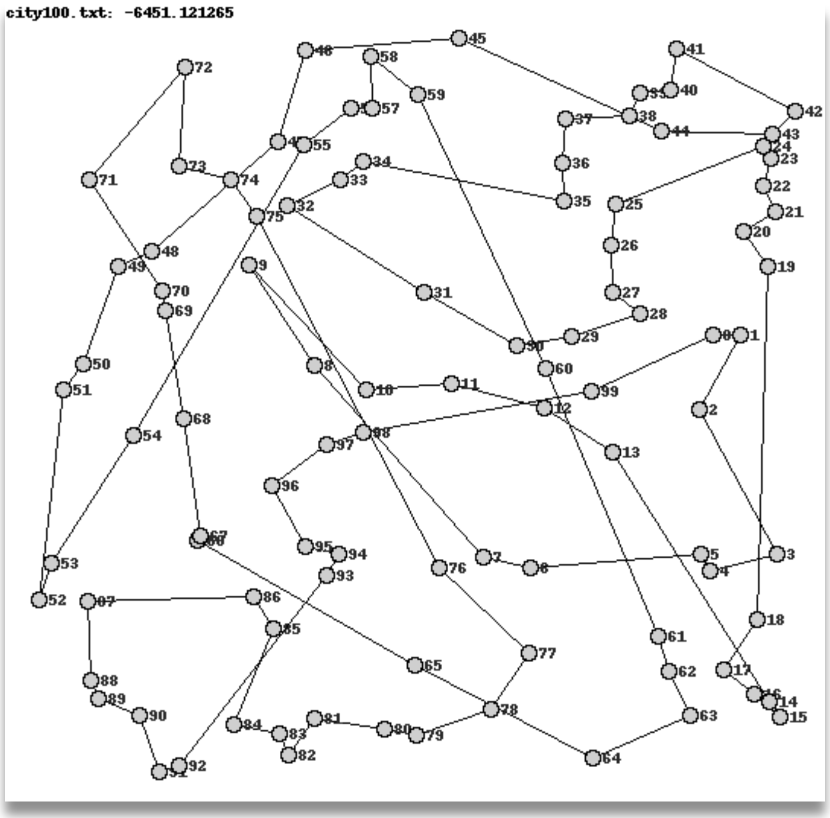
**Louis-Martin Rousseau**

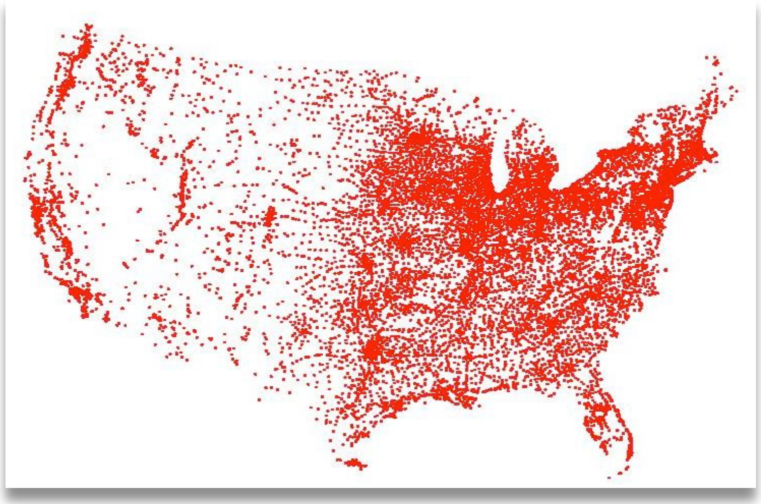
Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

# Le problème du voyageur de commerce

C’est le problème le plus connu en recherche opérationnelle, celui qui a reçu le plus d’attention et probablement le plus prestigieux ;

Étant donné un nombre de points (villes) à visiter et une matrice donnant la distance entre chacune d’elles, donner la tournée qui visite toutes les villes en parcourant la plus petite distance.



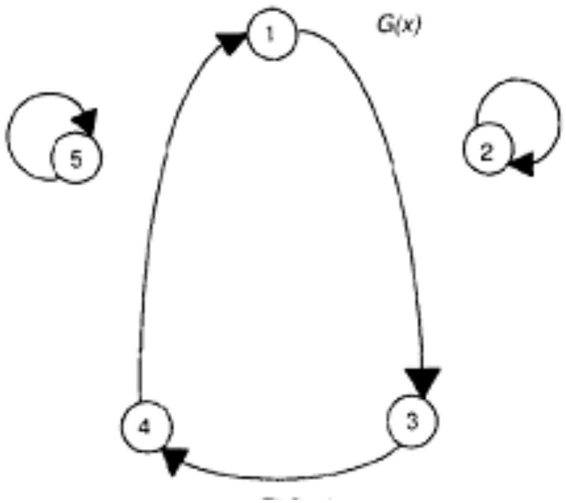
# TSP: la structure

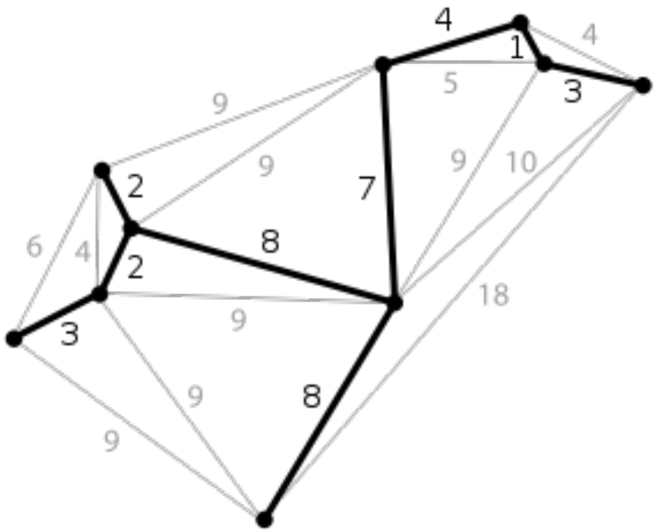
Le problème du voyageur de commerce (ou Traveling Salesman Problem) est un problème combinatoire NP-difficile

- C'est-à-dire qu’il n’existe pas de solution dont le temps de calcul est une fonction polynomiale du nombre de points à visiter.

Le TSP combine deux structures qui elles sont «faciles».

- Le problème d’affectation (le degré de chaque noeud = 2)
- Le problème d’arbre de recouvrement minimum (connectivité)



# TSP: Modèle mathématique

Soit:

- $x_{ij}$ une variable binaire qui indique si la route passe directement du point i au point j

  ( 1 si oui, 0 sinon )
- $C_{ij}$ le coût d'aller directement de i à j.
- $S$ un sous-ensemble non vide des points à visiter.

Les deux modèles suivants sont corrects et équivalents.

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i,j \in N} C_{ij} x_{ij} & & \\
\text{sujet à} \sum_{j \in N} x_{ij} &= 1 \ \forall i \in N \\
\sum_{i \in N} x_{ij} &= 1 \ \forall j \in N \\
\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} &\geq 1 \ \forall S \subset N \\
x_{ij} &\in \{0,1\}, \ \forall i,j \in N
\end{aligned}
$$

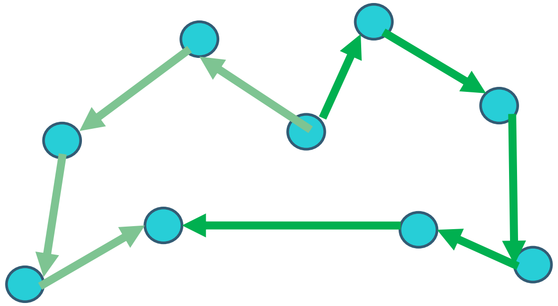
$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i,j \in N} C_{ij} x_{ij} & & \\
\text{sujet à} \sum_{j \in N} x_{ij} &= 1 \ \forall i \in N \\
\sum_{i \in N} x_{ij} &= 1 \ \forall j \in N \\
\sum_{i,j \in S} x_{ij} &\leq |S| - 1 \ \forall S \subset N \\
x_{ij} &\in \{0,1\}, \ \forall i,j \in N
\end{aligned}
$$

Contraintes de degré

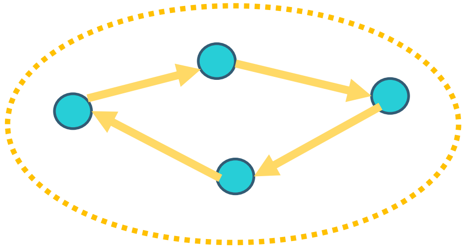
Contraintes de connectivité

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# TSP: Modèle mathématique



Les contraintes de connectivité sont violés pour cet ensemble S



$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i,j\in N} C_{ij}x_{ij} & \\
\text{sujet à} \sum_{j\in N} x_{ij} &= 1 \ \forall i \in N \\
\sum_{i\in N} x_{ij} &= 1 \ \forall j \in N \\
\sum_{i\in S, j\notin S} x_{ij} &\geq 1 \ \forall S \subset N \\
x_{ij} &\in \{0,1\}, \ \forall i,j \in N
\end{aligned}
$$

Contraintes de degré

Contraintes de connectivité

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i,j\in N} C_{ij}x_{ij} & \\
\text{sujet à} \sum_{j\in N} x_{ij} &= 1 \ \forall i \in N \\
\sum_{i\in N} x_{ij} &= 1 \ \forall j \in N \\
\sum_{i,j\in S} x_{ij} &\leq |S|-1 \ \forall S \subset N \\
x_{ij} &\in \{0,1\}, \ \forall i,j \in N
\end{aligned}
$$

# TSP: les difficultés

Le problème avec les formulations précédentes est le nombre de contraintes de connectivité.

- Il y en a une pour chaque sous-ensemble possible des points à visiter... donc environ $2^{|N|}$

Par contre, celles-ci ne sont peut-être pas toutes utiles. On peut donc les ignorer pour commencer et les ajouter par la suite.

C'est ce qu'on appelle une approche par plans coupants (Cutting Plane Method)

1. On résout d'abord le problème sans ces contraintes
2. On vérifie la solution
   - si celle-ci satisfait toutes les contraintes ignorées, alors elle est optimale. ON ARRÊTE.
   - sinon, on ajoute les contraintes qui sont violées (c'est ce qu'on appelle la séparation)
3. ON RETOURNE à 1

# Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

TSP – Méthode de plans coupants

VRP – Génération de colonnes

- VRP Intro
- Intuition
- Problème maître
- Sous-Problème
- Branch and Price
- Les défis

**Louis-Martin Rousseau**

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

# Problème de tournées de véhicules

Clients

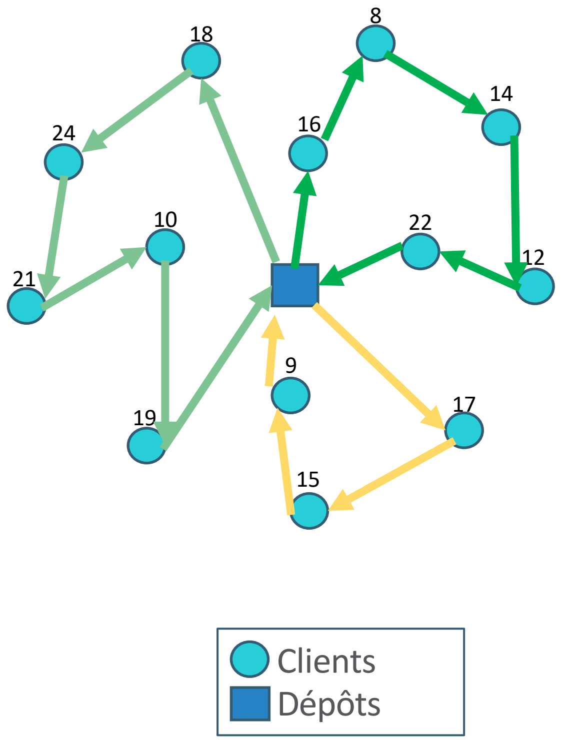
- Contraintes de demande

Véhicules

- Contraintes de capacité
- Contraintes de conservation du flux

Objectif :

- Trouver des routes qui minimisent la distance totale



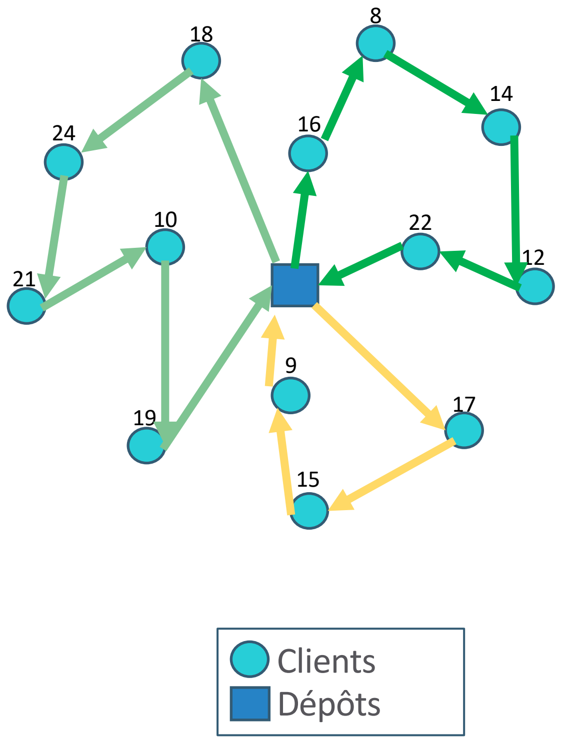
# Problème de tournées de véhicules

Formulation PLNE :

- Problèmes de scalabilité
- Symétrie
- Plus de contraintes complexes ajoutent encore plus de complexité
- Certaines contraintes mènent à de mauvaises relaxations linéaires

Énumérer toutes les routes possibles

- Formulation plus simple
- Les contraintes de véhicule doivent implicitement considérées par les routes énumérées
- Meilleure relaxation linéaire



# Problème de tournées de véhicules

Énumérer toutes les routes possibles

$$\text{Minimize} \quad \sum_{p\in\Omega} c_p x_p$$

$$\text{subject to :} \quad \sum_{p\in\Omega} v_{ip} x_p = 1 \quad \forall i \in \mathrm{N}$$

$$x_p \in \{0,1\} \quad \forall p \in \Omega$$

# Problème de tournées de véhicules

Énumérer toutes les routes possibles

$$\text{Minimize} \quad \sum_{p \in \Omega} c_p x_p$$

Ensemble des clients

$$\text{subject to :} \quad \sum_{p \in \Omega} v_{ip} x_p = 1 \quad \forall i \in \boxed{\mathrm{N}}$$

$$x_p \in \{0,1\} \quad \forall p \in \boxed{\Omega}$$

Ensemble des routes

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Problème de tournées de véhicules

Énumérer toutes les routes possibles

$$\text{Minimize} \quad \sum_{p \in \Omega} c_p x_p$$

$$\text{subject to :} \quad \sum_{p \in \Omega} v_{ip} x_p = 1 \quad \forall i \in \mathrm{N}$$

$$\boxed{x_p} \in \{0,1\} \quad \forall p \in \Omega$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si la route } p \text{ est prise} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

# Problème de tournées de véhicules

Énumérer toutes les routes possibles

Coût de la route $p$

$$\text{Minimize} \quad \sum_{p\in\Omega} \boxed{c_p} x_p$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si la route } p \text{ passe par le client } i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{subject to :} \quad \sum_{p\in\Omega} \boxed{v_{ip}} x_p = 1 \quad \forall i \in \mathrm{N}$$

$$\boxed{x_p} \in \{0,1\} \quad \forall p \in \Omega$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si la route } p \text{ est prise} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

# Problème de tournées de véhicules

Énumérer toutes les routes possibles

Coût de la route $p$

$$\text{Minimize} \quad \sum_{p \in \Omega} \boxed{c_p} x_p$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si la route } p \text{ passe par le client } i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{subject to :} \quad \sum_{p \in \Omega} \boxed{v_{ip}} x_p = 1 \quad \forall i \in \mathrm{N}$$

Une énorme quantité de routes

$$\boxed{x_p} \in \{0,1\} \quad \forall p \in \Omega$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si la route } p \text{ est prise} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

# Problème de tournées de véhicules

Énumérer toutes les routes possibles

Coût de la route $p$

$$\text{Minimize} \quad \sum_{p\in\Omega} \boxed{c_p} x_p$$

$$\text{subject to :} \quad \sum_{p\in\Omega} \boxed{v_{ip}} x_p = 1 \quad \forall i \in \mathrm{N}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si la route } p \text{ passe par le client } i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{x_p} \in \{0,1\} \quad \forall p \in \Omega$$

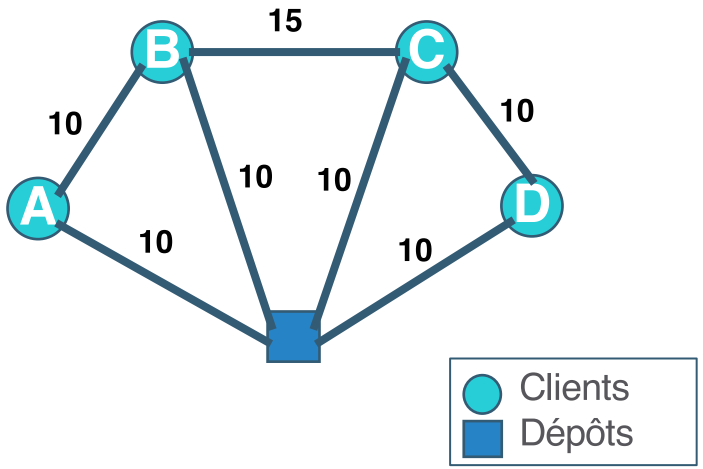
$$= \begin{cases} 1, & \text{si la route } p \text{ est prise} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Une énorme quantité de routes

mais seul un petit nombre d'entre elles nous intéresse

# Problème de tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)




$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{Min} & 20\,x_1 & +20\,x_2 & +20\,x_3 & +20\,x_4 & +30\,x_5 & +30\,x_6 & +35\,x_7 & \\
\text{A :} & x_1 & & & & +x_5 & & & = 1 \\
\text{B :} & & +x_2 & & & +x_5 & & +x_7 & = 1 \\
\text{C :} & & & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & = 1 \\
\text{D :} & & & & +x_4 & & +x_6 & & = 1
\end{array}
$$

# Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

TSP – Méthode de plans coupants

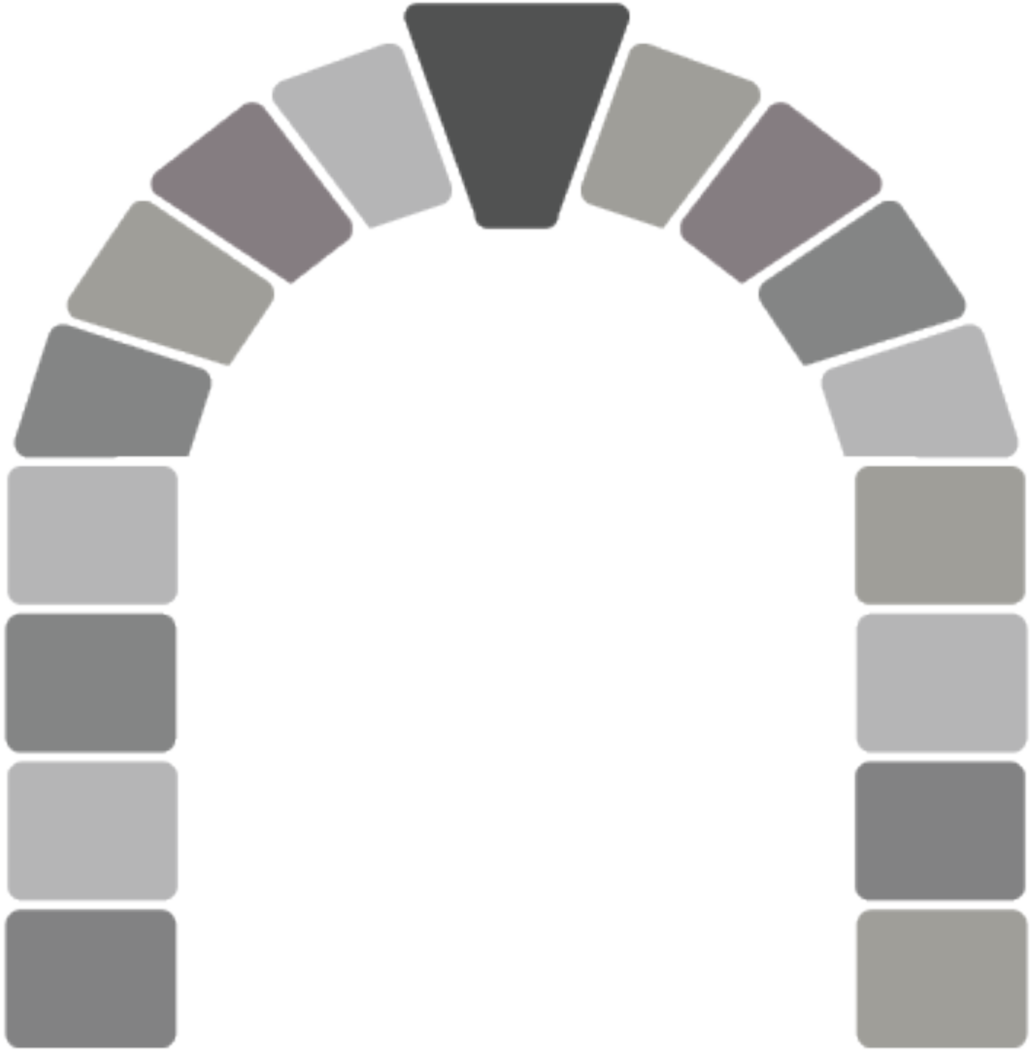
VRP – Génération de colonnes

- VRP Intro
- Intuition
- Problème maître
- Sous-Problème
- Branch and Price
- Les défis

**Louis-Martin Rousseau**

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

# Une approche intuitive de la génération de colonnes



POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

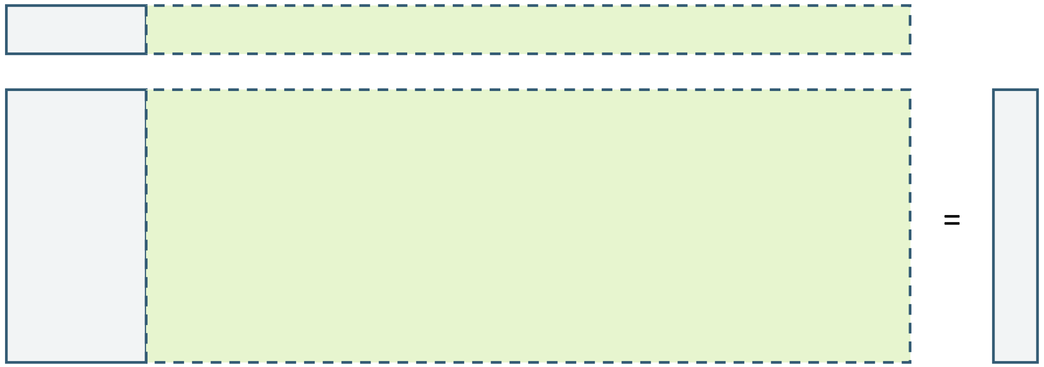
# Génération de colonnes

Résoudre un programme linéaire avec beaucoup de variables

# Génération de colonnes

Résoudre un programme linéaire avec beaucoup de variables

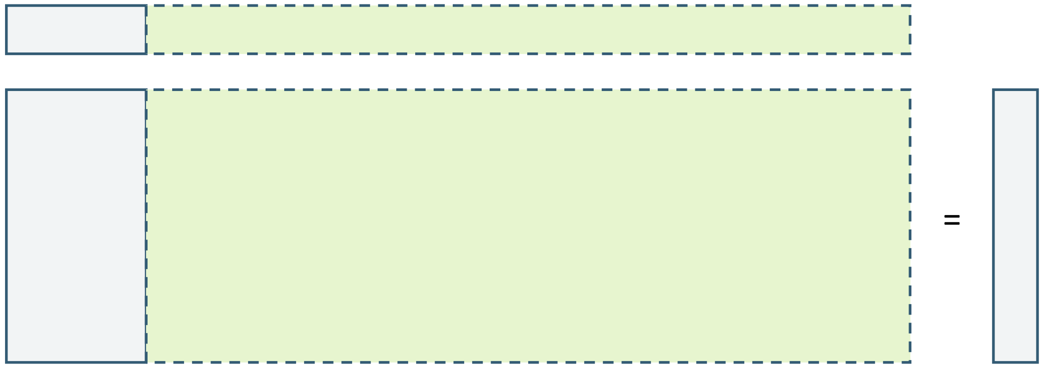
- résoudre avec un sous-ensemble de variables



# Génération de colonnes

Résoudre un programme linéaire avec beaucoup de variables

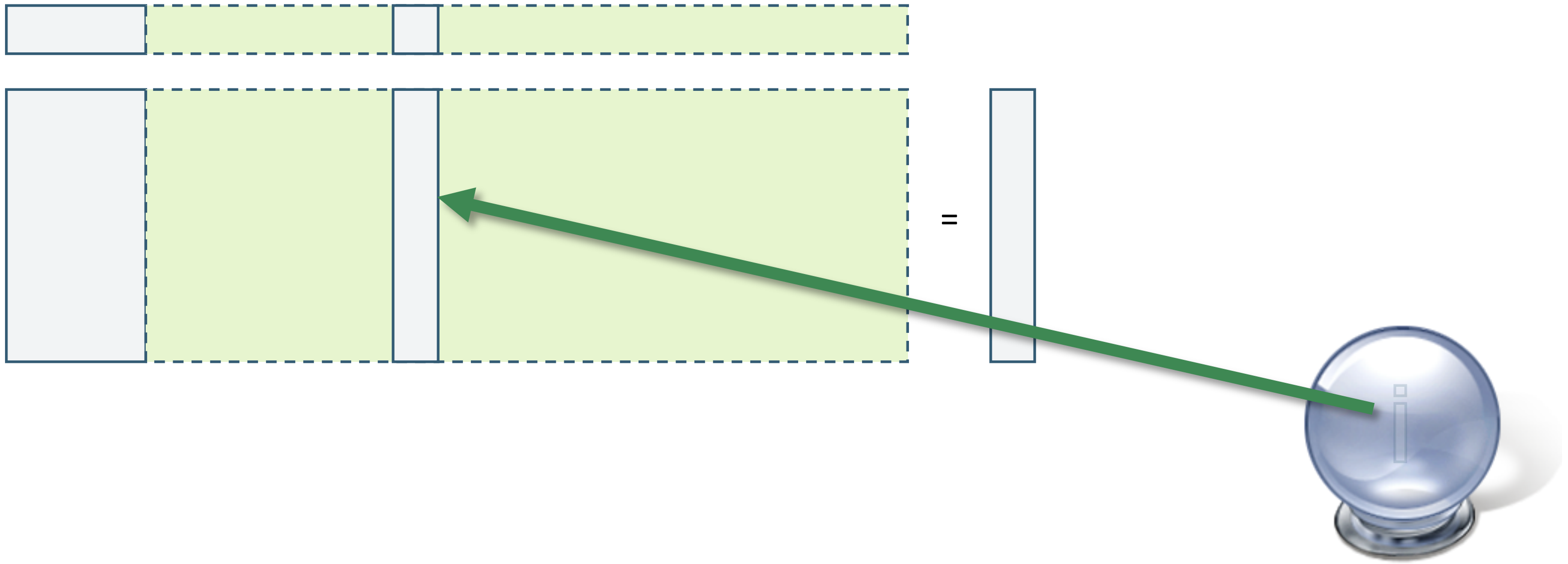
- résoudre avec un sous-ensemble de variables




# Génération de colonnes

Résoudre un programme linéaire avec beaucoup de variables

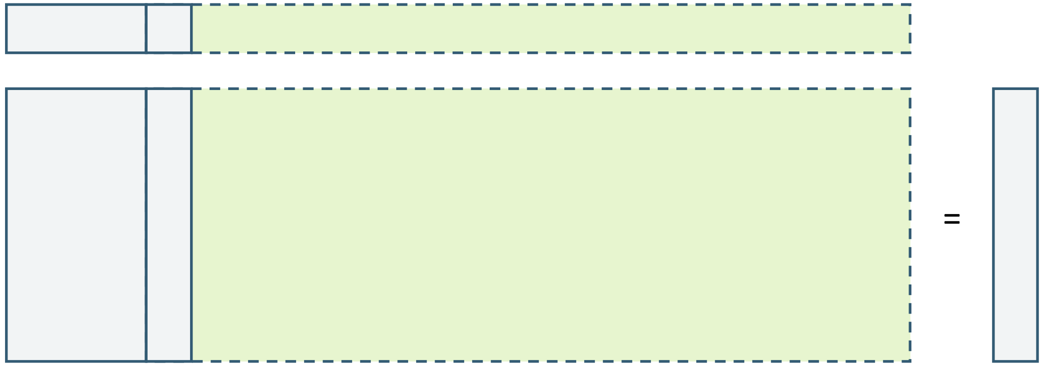
- résoudre avec un sous-ensemble de variables



# Génération de colonnes

Résoudre un programme linéaire avec beaucoup de variables

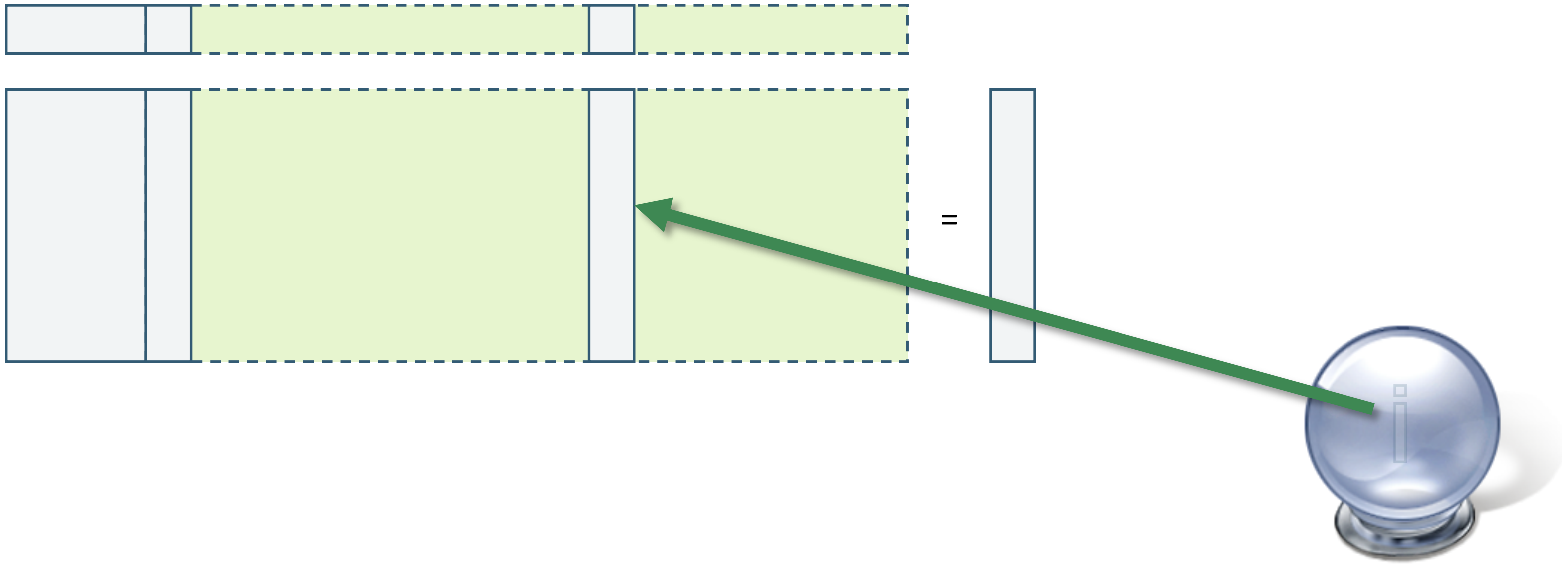
- résoudre avec un sous-ensemble de variables




# Génération de colonnes

Résoudre un programme linéaire avec beaucoup de variables

- résoudre avec un sous-ensemble de variables

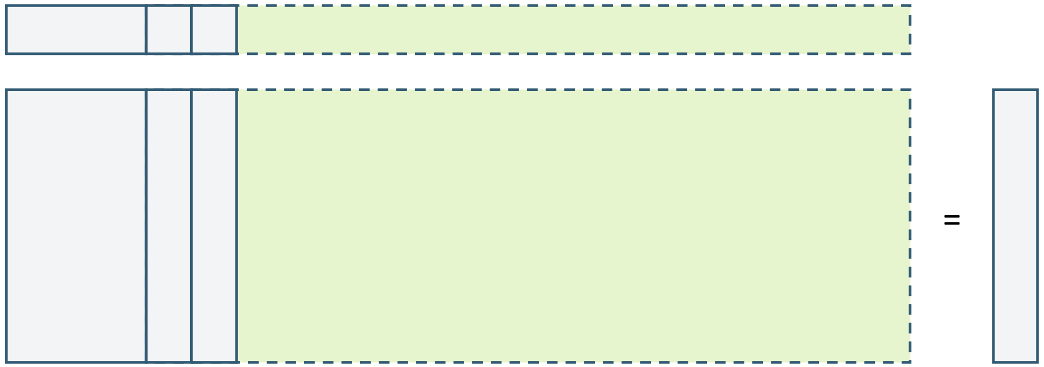



POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Génération de colonnes

Résoudre un programme linéaire avec beaucoup de variables

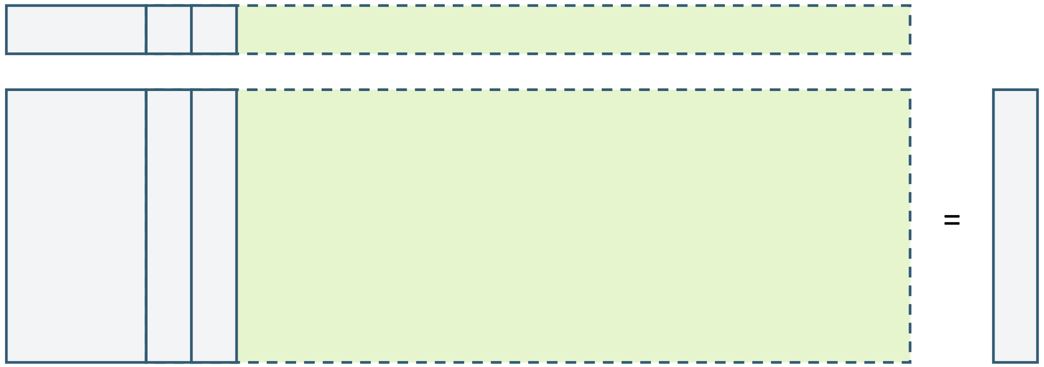
- résoudre avec un sous-ensemble de variables




# Génération de colonnes

Résoudre un programme linéaire avec beaucoup de variables

- résoudre avec un sous-ensemble de variables

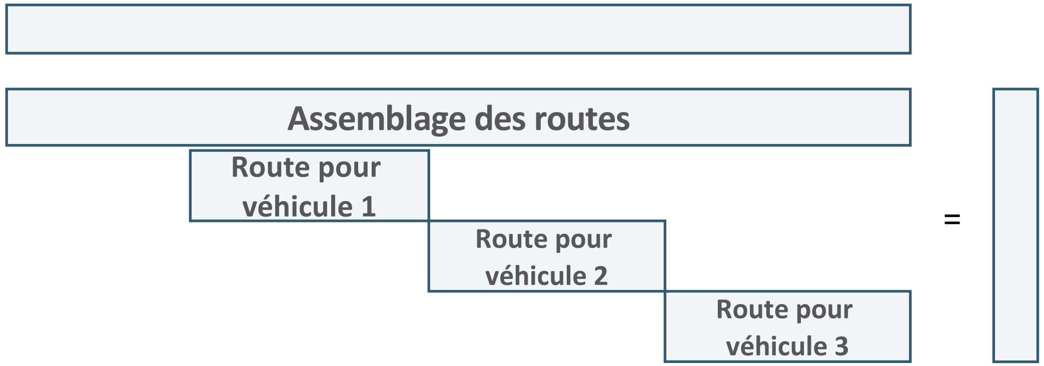



# Génération de colonnes

Quand utiliser la génération de colonnes ?

# Génération de colonnes

Quand utiliser la génération de colonnes ?

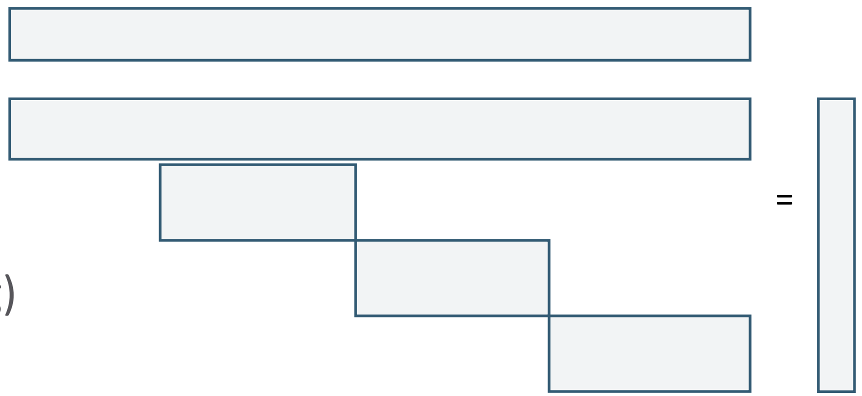


# Génération de colonnes

Quand utiliser la génération de colonnes ?

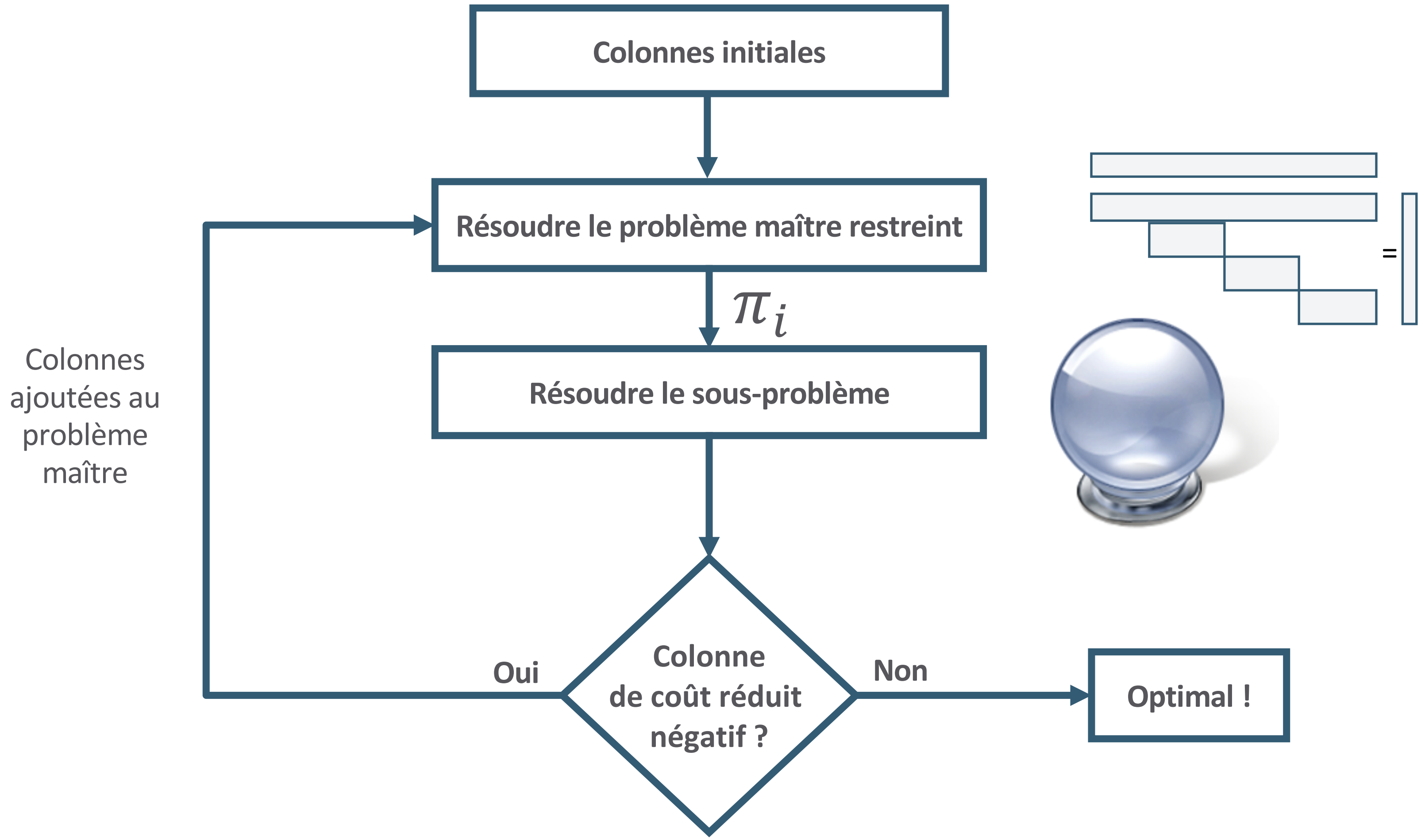
Cela marche généralement bien avec :

- Tournée de véhicules
- Planning aérien
- Rotations horaires
- Ordonnancement de tâches (Jobshop Scheduling)
- …




Fonctionne au mieux quand le problème possède une structure sous-jacente : graphe, hypergraphe, sac-à-dos, etc…

# Génération de colonnes



# Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

TSP – Méthode de plans coupants

VRP – Génération de colonnes

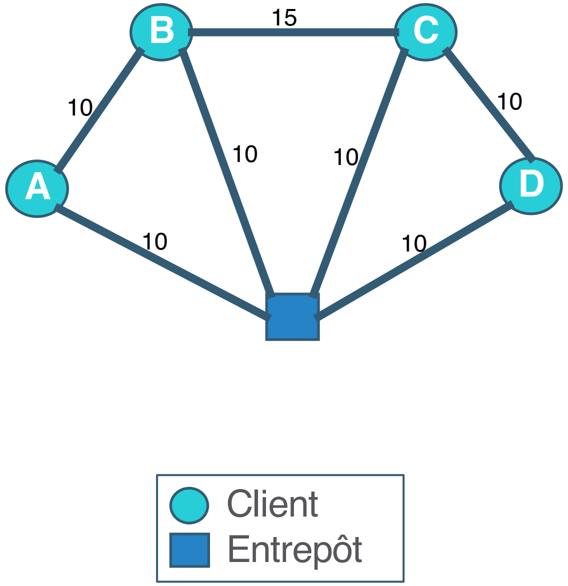
- VRP Intro
- Intuition
- Problème maître
- Sous-Problème
- Branch and Price
- Les défis

**Louis-Martin Rousseau**

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

# Tournées de véhicules

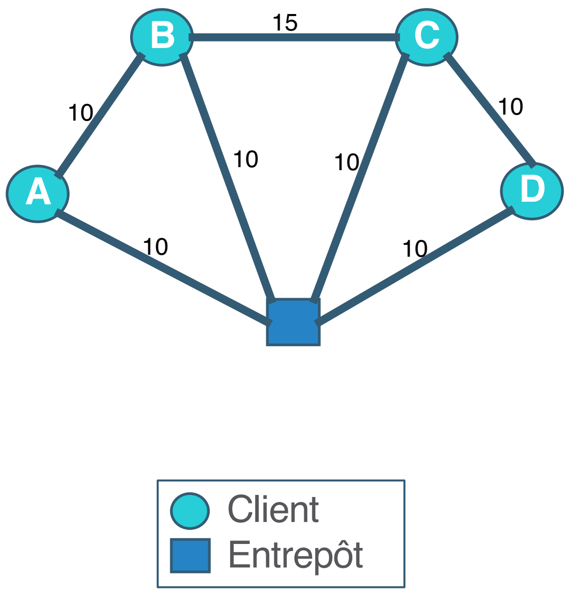
Un exemple (max 2 clients)



# Tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)

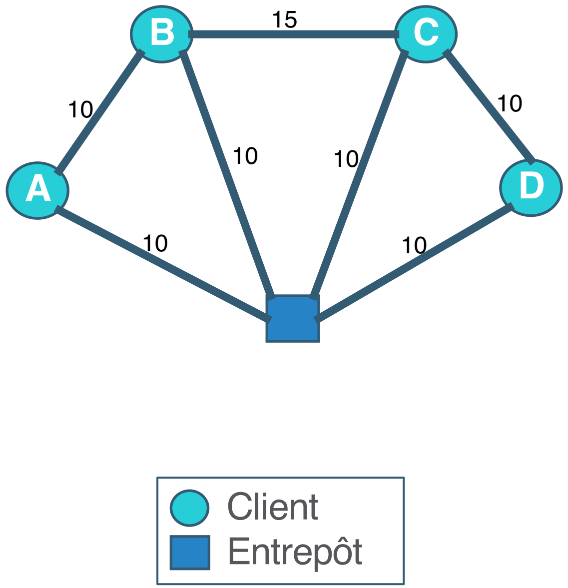
$$
\begin{array}{llllll}
\text{Min} & 20\,x_1 & +20\,x_2 & +20\,x_3 & +20\,x_4 & \\
\text{A :} & x_1 & & & & = 1 \\
\text{B :} & & x_2 & & & = 1 \\
\text{C :} & & & x_3 & & = 1 \\
\text{D :} & & & & x_4 & = 1
\end{array}
$$



# Tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)

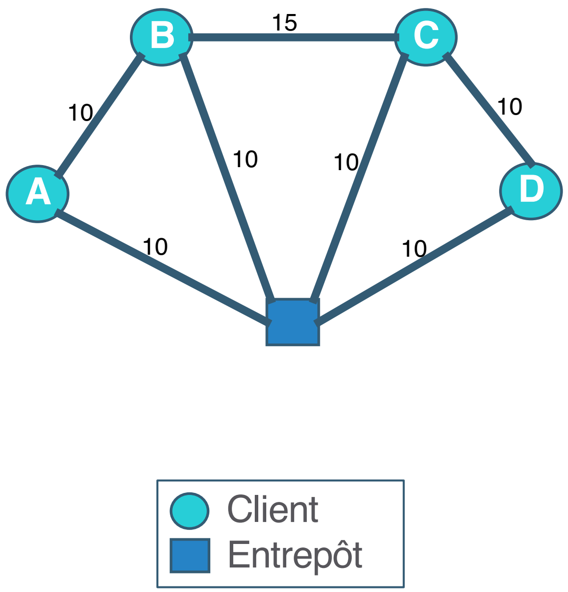
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Min | 20 | 20 | 20 | 20 | |
| A : | 1 | | | | = 1 |
| B : | | 1 | | | = 1 |
| C : | | | 1 | | = 1 |
| D : | | | | 1 | = 1 |



# Tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | = 1 | 20 |
| B : | | 1 | | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | = 1 | 20 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{80}$ | |

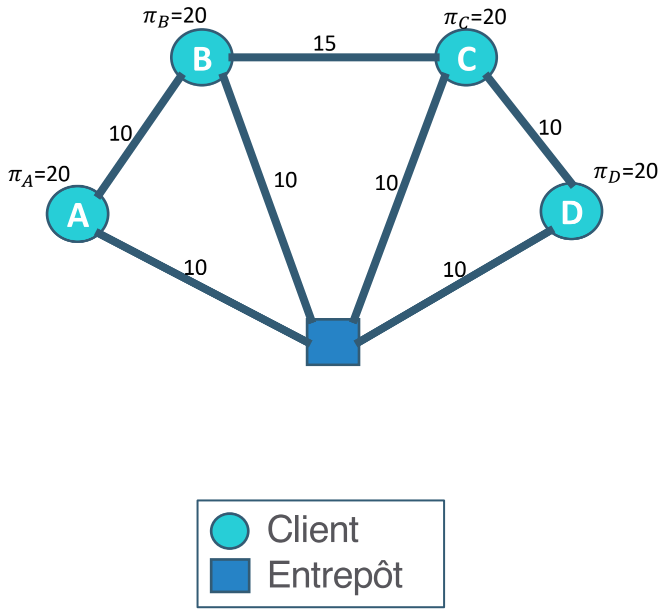


# Tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | = 1 | 20 |
| B : | | 1 | | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | = 1 | 20 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{80}$ | |

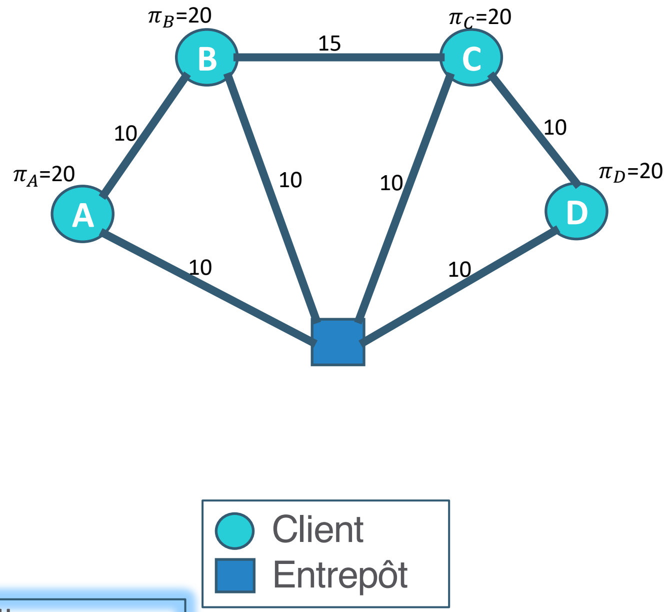
$\pi_i$ : coût marginal de la visite du client *I*



# Tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | = 1 | 20 |
| B : | | 1 | | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | = 1 | 20 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{80}$ | |




$\pi_i$ : coût marginal de la visite du client *I*

Peut-on trouver une route telle que :

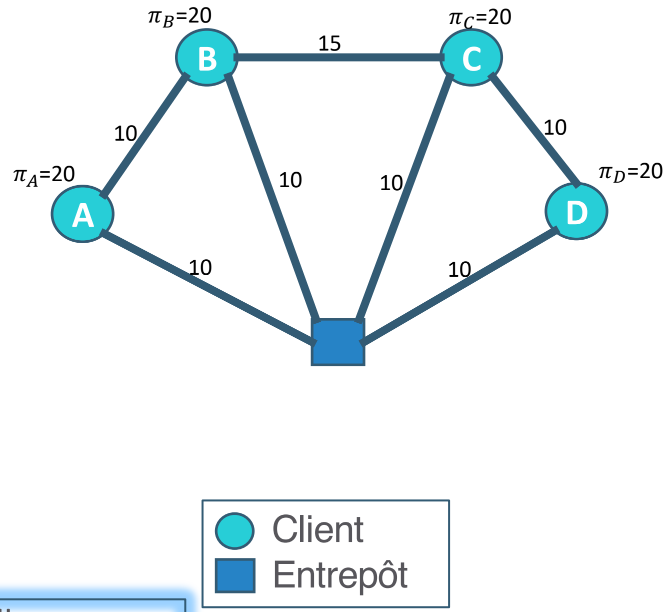
$$c < \sum \pi_i$$

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Tournées de véhicules

## Un exemple (max 2 clients)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | = 1 | 20 |
| B : | | 1 | | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | = 1 | 20 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{80}$ | |




$\pi_i$ : coût marginal de la visite du client *I*

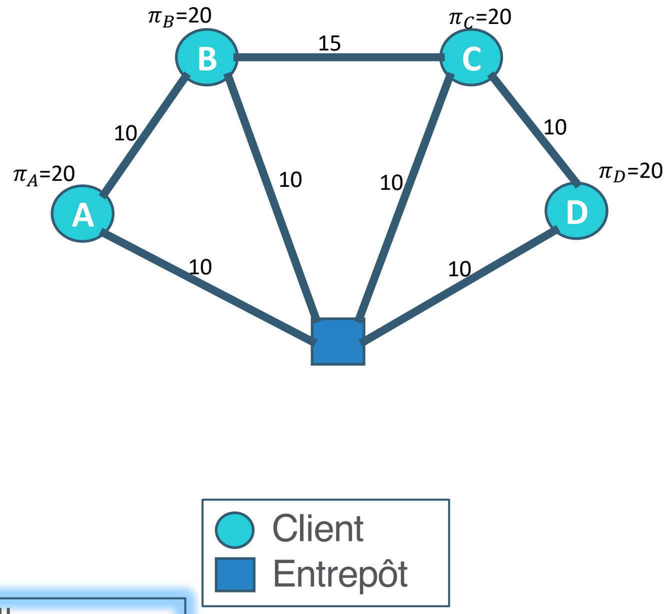
Peut-on trouver une route telle que :

$$c - \sum \pi_i < 0$$

# Tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | = 1 | 20 |
| B : | | 1 | | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | = 1 | 20 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{80}$ | |




$\pi_i$ : coût marginal de la visite du client *I*

Peut-on trouver une route telle que :

$$c - \sum \pi_i < 0$$

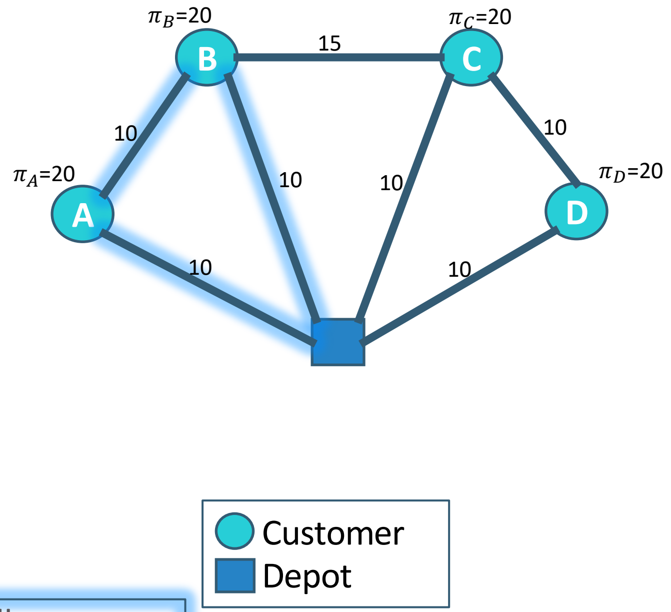
**Coût réduit !**

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | = 1 | 20 |
| B : | | 1 | | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | = 1 | 20 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{80}$ | |




$\pi_i$ : coût marginal de la visite du client *I*

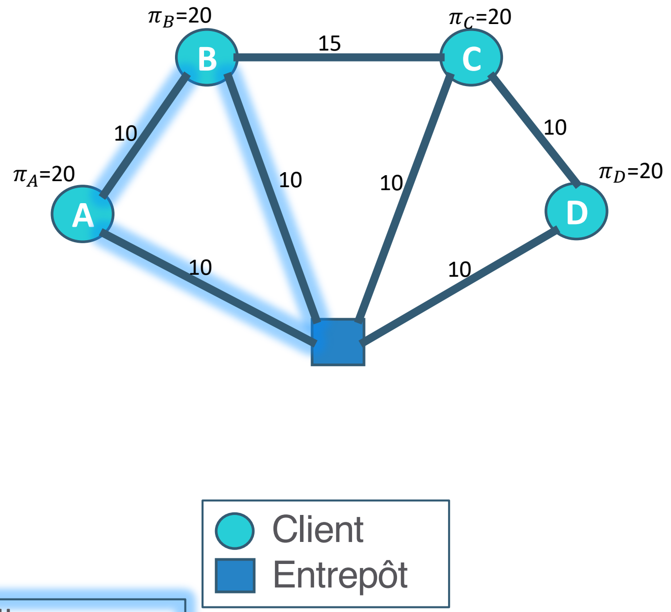
Peut-on trouver une route telle que :

$$c - \sum \pi_i < 0$$

# Tournées de véhicules

## Un exemple (max 2 clients)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 0 | 0 | 0 | 0 | -10 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | = 1 | 20 |
| B : | | 1 | | | 1 | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | | = 1 | 20 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | | $\boxed{80}$ | |




$\pi_i$ : coût marginal de la visite du client *I*

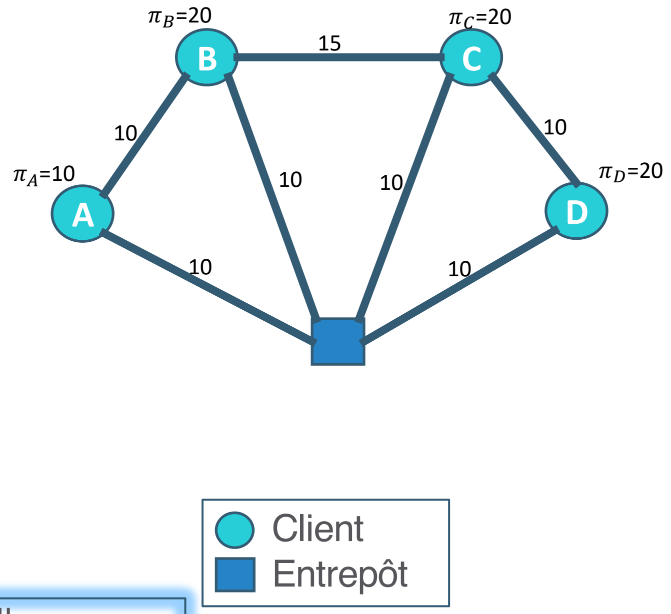
Peut-on trouver une route telle que :

$$c - \sum \pi_i < 0$$

# Tournées de véhicules

Un exemple (max 2 clients)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | = 1 | 10 |
| B : | | 1 | | | 1 | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | | = 1 | 20 |
| | | 0 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{70}$ | |




$\pi_i$ : coût marginal de la visite du client $I$

Peut-on trouver une route telle que :

$$c - \sum \pi_i < 0$$

# Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

TSP – Méthode de plans coupants

VRP – Génération de colonnes

- VRP Intro
- Intuition
- Problème maître
- Sous-Problème
- Branch and Price
- Les défis

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

# Sous-problème général

Représentation implicite de toutes les variables

- Toute solution possible au sous-problème est une variable

Objectif :

→ **trouver une variable de coût réduit (le plus) négatif**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si le client } j \text{ est visité juste après } i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Min } \hat{c} = c - \sum_i a_i \pi_i \qquad a_i = \begin{cases} 1, & \text{Si le client } i \text{ est visité} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$c = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \qquad c_{ij} = \text{coût pour aller de } i \text{ à } j$$

# Sous-problème général

Représentation implicite de toutes les variables

- Toute solution possible au sous-problème est une variable

Objectif :

→ **trouver une variable de coût réduit (le plus) négatif**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{si le client } j \textit{ est visité juste après } i \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Min } \hat{c} = c - \sum_i a_i \pi_i$$

$$a_i = \begin{cases} 1, & \textit{Si le client } i \textit{ est visité} \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{c} = \sum_{ij} (c_{ij} - \pi_i)\, x_{ij}$$

$$c_{ij} = \textit{coût pour aller de } i \textit{ à } j$$

# Sous-problème

Représentation implicite de toutes les variables

- Toute solution possible au sous-problème est une variable

Objectif :

→ **trouver une variable de coût réduit (le plus) négatif**

$$\text{Min } \hat{c} = \sum_{ij}(c_{ij} - \pi_i)x_{ij}$$

Sujet à : Contraintes de capacité

Contraintes de conservation du flux

**Problème de plus court chemin avec contraintes de ressources :**
**PLNE, Programmation dynamique, ou PC**

# Sous-problème – PC

**Modèle ”Arc Flow”**

**Objectif :**

- Minimiser : $\sum_{(i|V_i = true)}(ReducedCost(i, S_i))$

**Variables :**

- $S_i \in N$ — Successeur du nœud i
- $V_i \in \{False, True\}$ — Noeud i desservi par le chemin courant
- $l_i \in [0..Capacité]$ — Chargement après la visite du nœud i

**Contraintes :**

- $S_i = i \Leftrightarrow V_i = False$ — Cohérence S-V
- AllDiff(S) — Conservation du flux
- Circuit(S) — Contraintes d’élimination de sous-circuit
- $S_i = j \rightarrow l_i + D_j = l_j$ — Contraintes de capacité

+ Contrainte redondante du travail sur le TSP(TW)

# Sous-problème – PC

**Modèle ”positionnel”**

**Objectif** :

- Minimiser : $\sum_k (\text{CoutReduits}(P_k, P_{k+1}))$

**Variables** :

- $P_k \in N$ — Noeud visité à la position k
- $L_k \in [0..\text{Capacité}]$ — Chargement après avoir desservi la position k

**Contraintes** :

- AllDiff(P) — Chemin élémentaire
- $L_{k+1} = L_k + D_{Pk}$ — Contraintes de capacité
- $P_k = \text{dépôt} \rightarrow P_{k+1} = \text{dépôt}$ — Fin du chemin

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

TSP – Méthode de plans coupants

VRP – Génération de colonnes

- VRP Intro
- Intuition
- Problème maître
- Sous-Problème
- Branch and Price
- Les défis

**Louis-Martin Rousseau**

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

# Branch-and-price

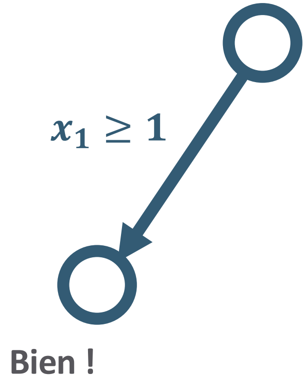
Génération de colonnes + PLNE : Branch-and-price

- Comment obtenir des solutions entières ?
  - Branch-and-bound -> résoudre la relaxation linéaire à chaque nœud
  - Branch-and-price -> génération de colonne pour résoudre la relaxation linéaire à chaque nœud

# Branch-and-price

Possibilité de branchement

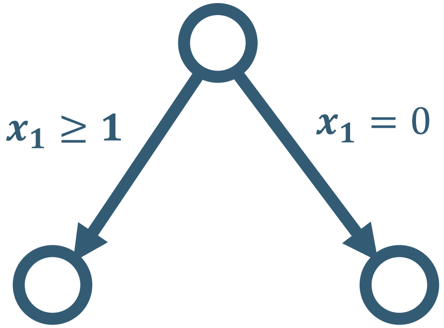
- Brancher sur les variables maîtres



# Branch-and-price

Possibilité de branchement

- Brancher sur les variables maîtres



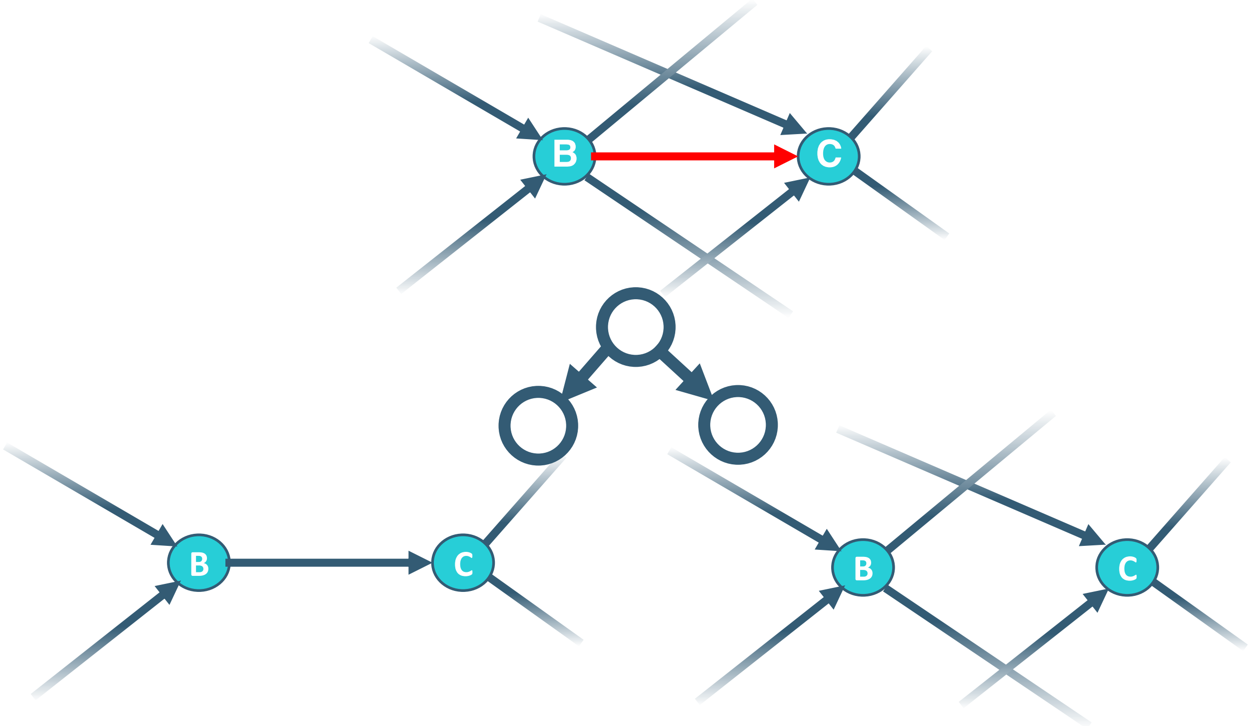

**Bien !**

**Le sous-problème génère $x_1$ à nouveau avec un nouveau nom**

# Branch-and-price

Possibilité de branchement

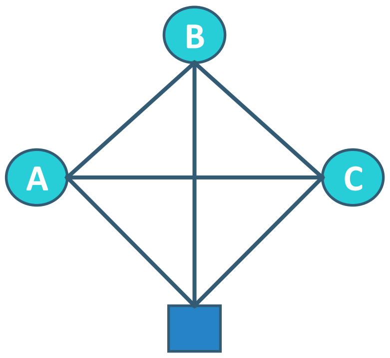
- Brancher sur les variables maîtres… Non !
- Brancher sur les variables du sous-problème



# Branch-and-price

Tournée de véhicule

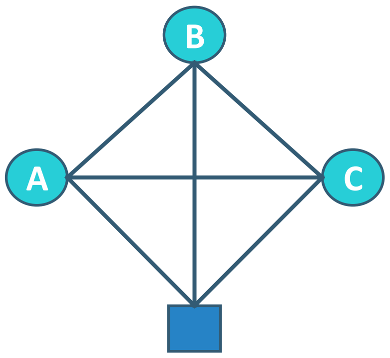
- Max 2 clients
- Coût de tous les arcs : 1



# Branch-and-price

Tournée de véhicule

- Max 2 clients
- Coût de tous les arcs : 1

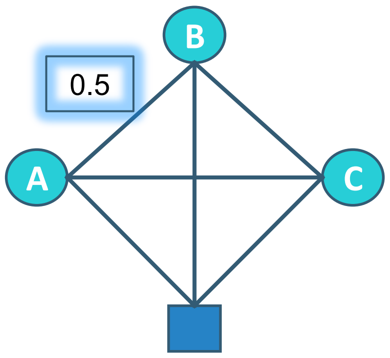



| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |
| **OptSol**: | 0.5 | 0.5 | 0.5 | $\boxed{4.5}$ |

# Branch-and-price

Tournée de véhicule

- Max 2 clients
- Coût de tous les arcs : 1

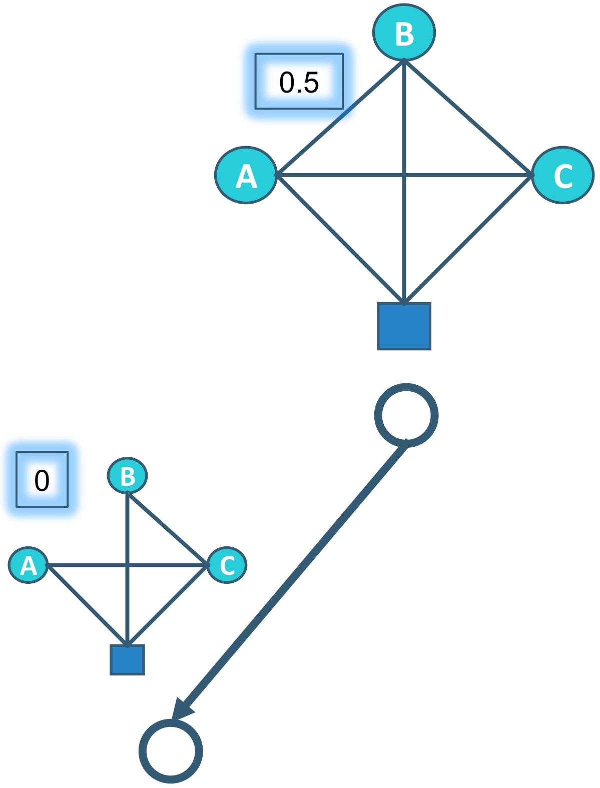



| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |
| **OptSol**: | 0.5 | 0.5 | 0.5 | $\boxed{4.5}$ |

# Branch-and-price

Tournée de véhicule

- Max 2 clients
- Coût de tous les arcs : 1



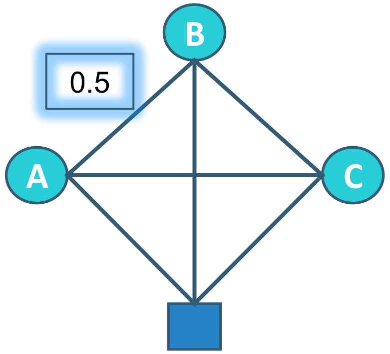

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |
| **OptSol**: | 0.5 | 0.5 | 0.5 | $\boxed{4.5}$ |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |

# Branch-and-price

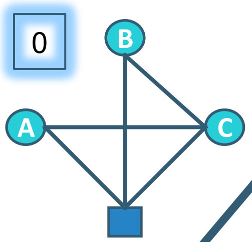
Tournée de véhicule

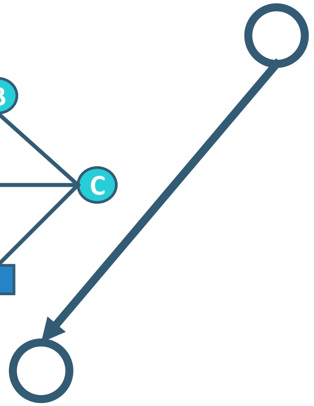
- Max 2 clients
- Coût de tous les arcs : 1




| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |
| **OptSol**: | 0.5 | 0.5 | 0.5 | $\boxed{4.5}$ |

| | $x_4$ |
|---|---|
| | 2 |
| A : | 1 |
| B : | |
| C : | |



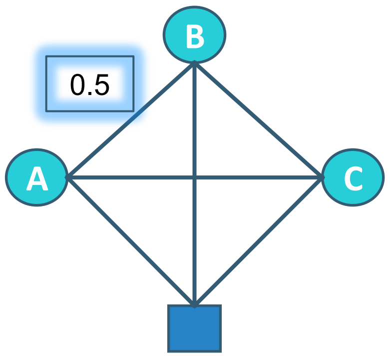
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Branch-and-price

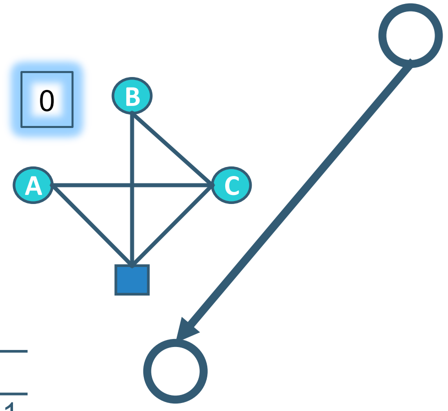
Tournée de véhicule

- Max 2 clients
- Coût de tous les arcs : 1




| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |
| **OptSol**: | 0.5 | 0.5 | 0.5 | $\boxed{4.5}$ |

| | $x_4$ |
|---|---|
| | 2 |
| A : | 1 |
| B : | |
| C : | |

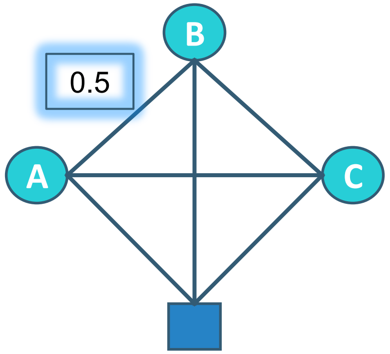



| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | 2 | |
| A : | 1 | 1 | | 1 | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | | = 1 |
| **OptSol**: | | | 1 | 1 | $\boxed{5}$ |

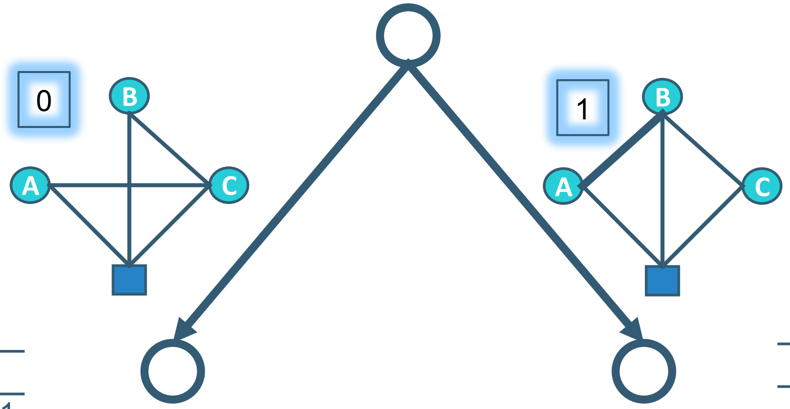
# Branch-and-price

Tournée de véhicule

- Max 2 clients
- Coût de tous les arcs : 1




| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |
| **OptSol**: | 0.5 | 0.5 | 0.5 | $\boxed{4.5}$ |




| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | 2 | |
| A : | 1 | 1 | | 1 | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | | = 1 |
| **OptSol**: | | | 1 | 1 | $\boxed{5}$ |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |

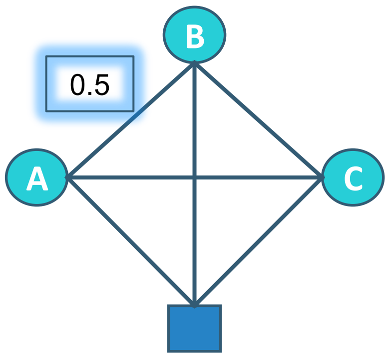
POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Branch-and-price

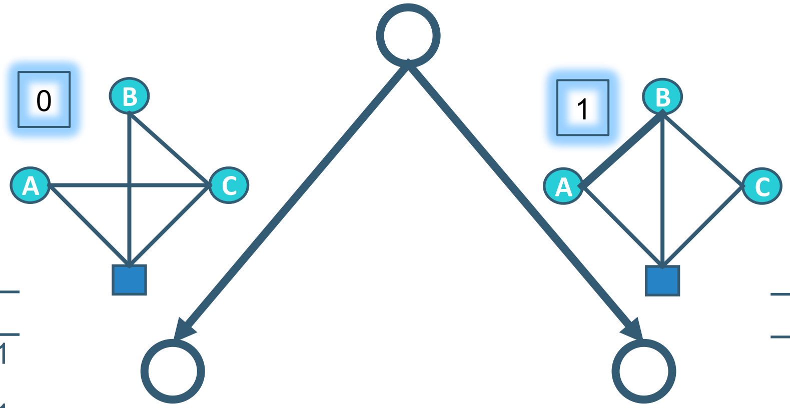
Tournée de véhicule

- Max 2 clients
- Coût de tous les arcs : 1

Pourquoi brancher sur toutes les variables de flux ?




| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | |
| A : | 1 | 1 | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | = 1 |
| **OptSol**: | 0.5 | 0.5 | 0.5 | $\boxed{4.5}$ |




| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | 2 | |
| A : | 1 | 1 | | 1 | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | | = 1 |
| **OptSol**: | | | 1 | 1 | $\boxed{5}$ |

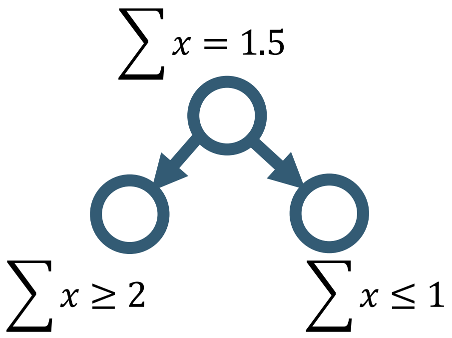
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Min | 3 | 3 | 3 | 2 | |
| A : | 1 | 1 | | | = 1 |
| B : | 1 | | 1 | | = 1 |
| C : | | 1 | 1 | 1 | = 1 |
| **OptSol**: | 1 | | | 1 | $\boxed{5}$ |

# Branch-and-price

Possibilité de branchement

- Brancher sur les variables maîtres… Non !
- Brancher sur les variables du sous-problème
- Brancher sur les contraintes du problème maître
  - **MAIS** ajouter une contrainte c **demande** que sa valeur duale $\pi_c$ soit prise en compte dans les sous-problèmes
  - Exemple : brancher sur le total de véhicules utilisé

**Meilleur branchement lorsque x n'est pas binaire**



# Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

TSP – Méthode de plans coupants

VRP – Génération de colonnes

- VRP Intro
- Intuition
- Problème maître
- Sous-Problème
- Branch and Price
- Les défis

**Louis-Martin Rousseau**

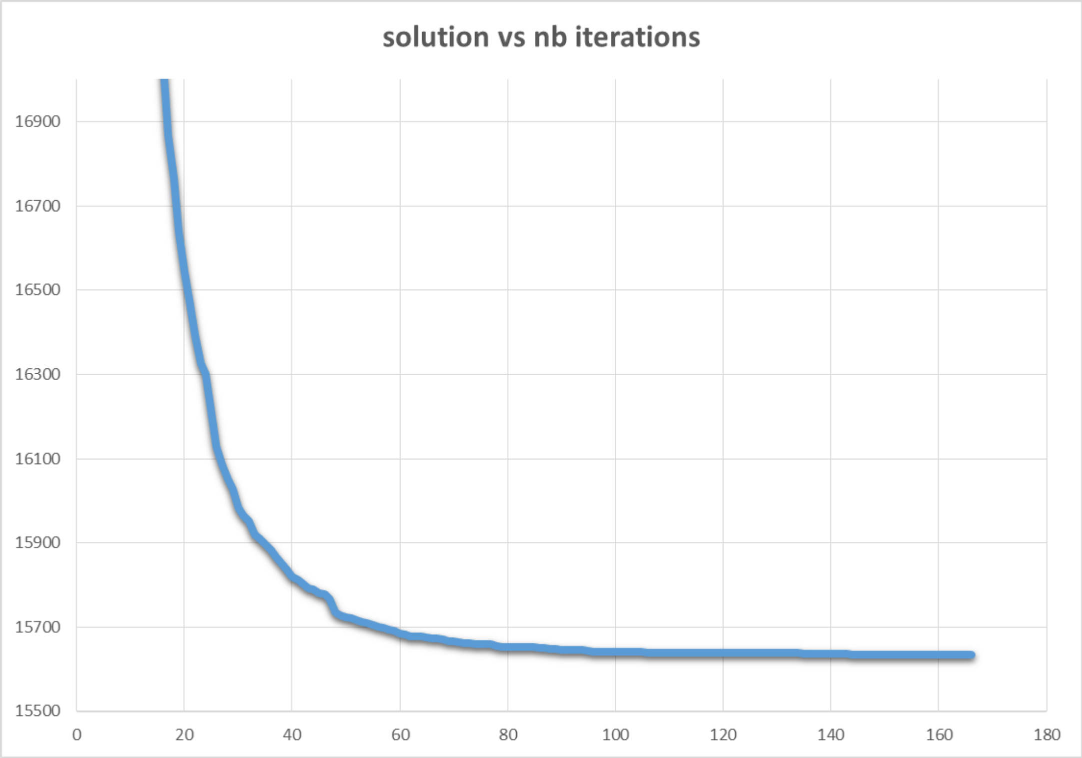
Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

# Application de la génération de colonnes

# Application de la génération de colonnes

Évolution des coûts

- Convergence longue

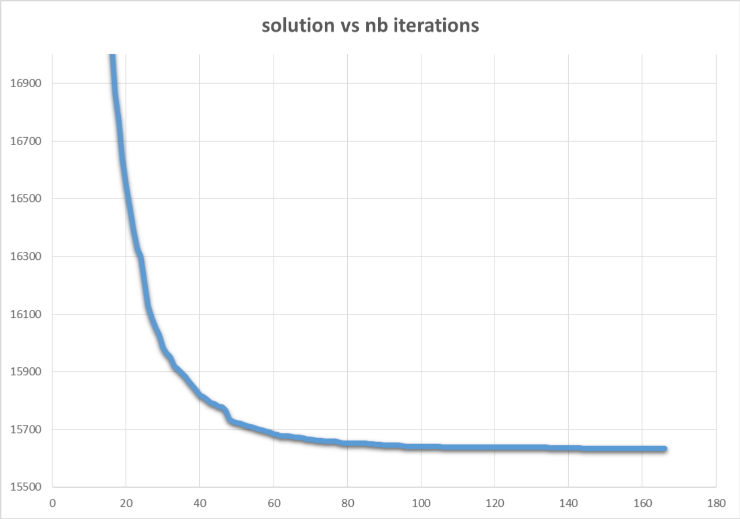



POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Application de la génération de colonnes

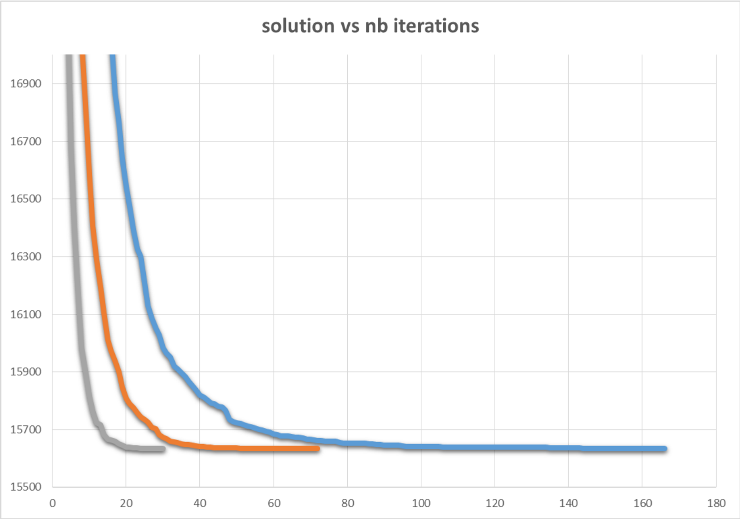
Évolution des coûts

- Convergence longue




Techniques d'accélération

- Passer plus de temps à générer des colonnes
- Supprimer des variables dans le problème maître



# Application de la génération de colonnes

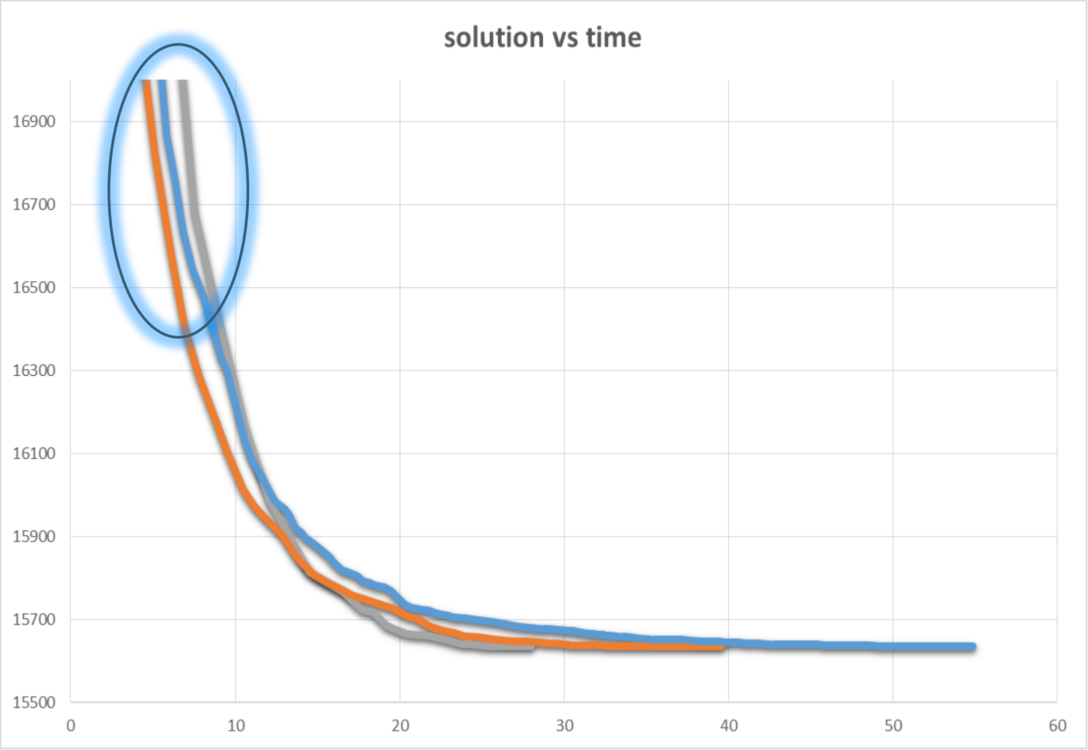
Évolution des coûts

- Convergence longue

Techniques d'accélération

- Passer plus de temps à générer des colonnes
- Supprimer des variables dans le problème maître

Équilibre entre sous-problèmes et problème maître

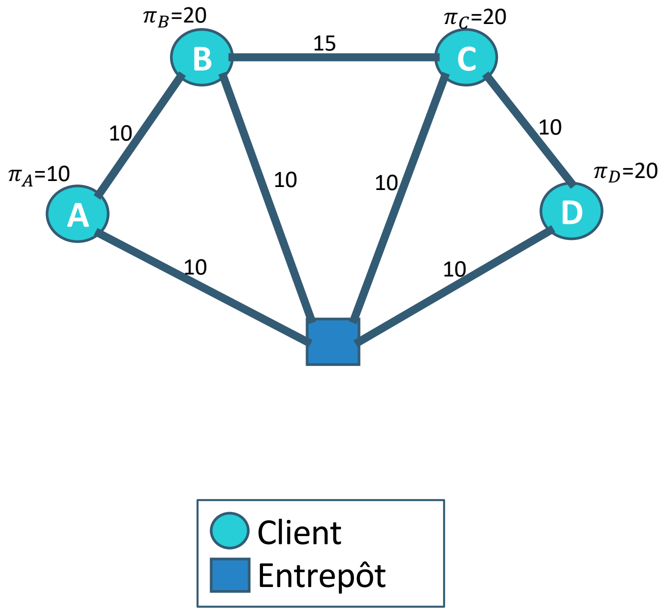


# Introduction aux problèmes de stabilisation

# Génération de colonnes

## Stabilisation

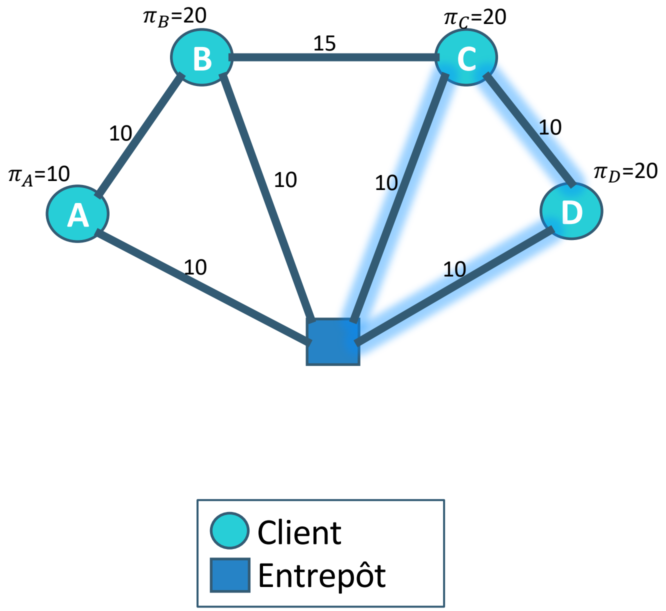
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{c}$ | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | = 1 | 10 |
| B : | | 1 | | | 1 | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | | = 1 | 20 |
| | | 0 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{70}$ | |



# Génération de colonnes

## Stabilisation

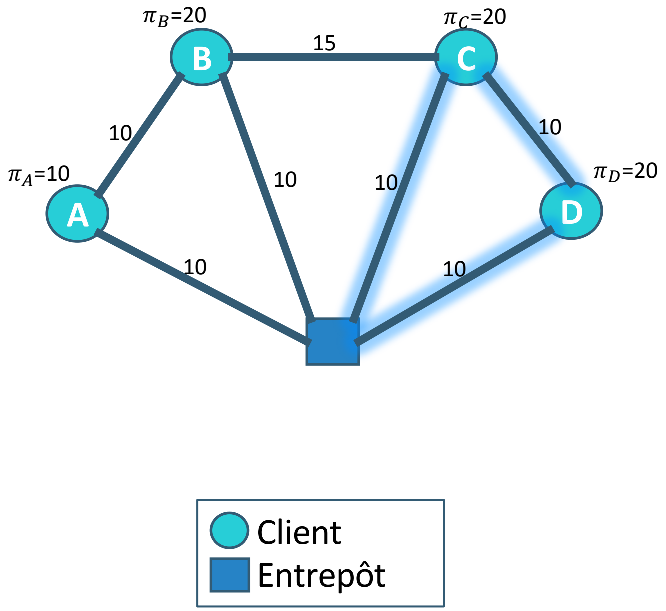
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | = 1 | 10 |
| B : | | 1 | | | 1 | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | | = 1 | 20 |
| | | 0 | 1 | 1 | 1 | $\boxed{70}$ | |



# Génération de colonnes

## Stabilisation

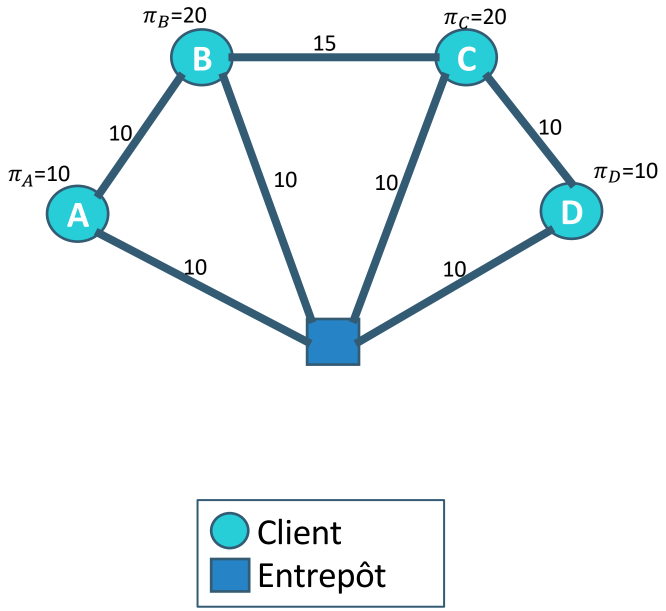
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | -10 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | | = 1 | 10 |
| B : | | 1 | | | 1 | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | | 1 | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | | 1 | = 1 | 20 |
| | | 0 | 1 | 1 | 1 | | $\boxed{70}$ | |



# Génération de colonnes

## Stabilisation

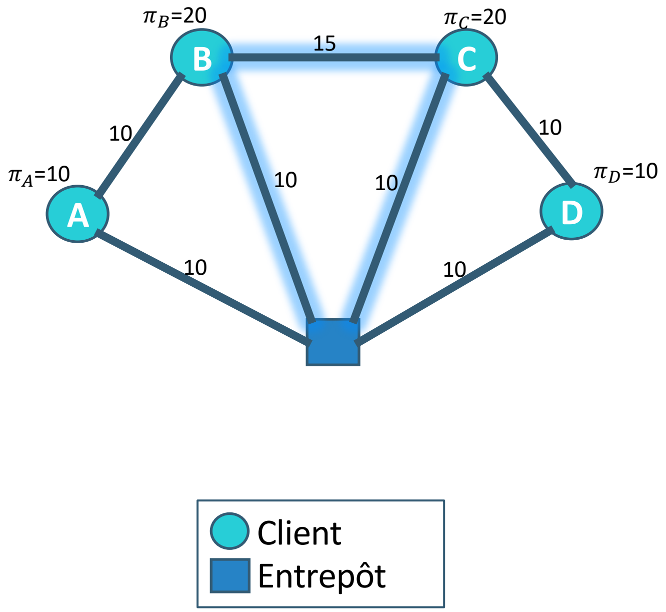
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 10 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | | = 1 | 10 |
| B : | | 1 | | | 1 | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | | 1 | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | | 1 | = 1 | 10 |
| | | 0 | 0 | | 1 | 1 | $\boxed{60}$ | |



# Génération de colonnes

## Stabilisation

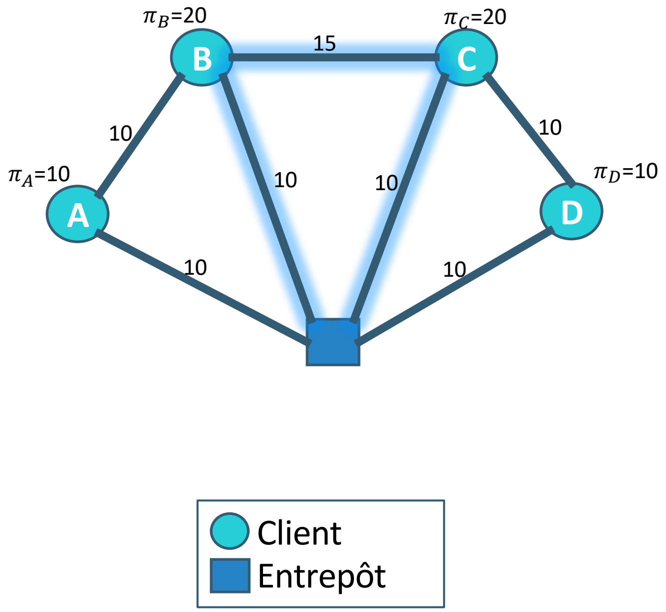
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 10 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | | = 1 | 10 |
| B : | | 1 | | | 1 | | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | | 1 | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | | 1 | = 1 | 10 |
| | | 0 | 0 | | 1 | 1 | $\boxed{60}$ | |



# Génération de colonnes

## Stabilisation

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 10 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | -5 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | | | = 1 | 10 |
| B : | | 1 | | | 1 | | 1 | = 1 | 20 |
| C : | | | 1 | | | 1 | 1 | = 1 | 20 |
| D : | | | | 1 | | 1 | | = 1 | 10 |
| | | 0 | 0 | | 1 | 1 | | $\boxed{60}$ | |

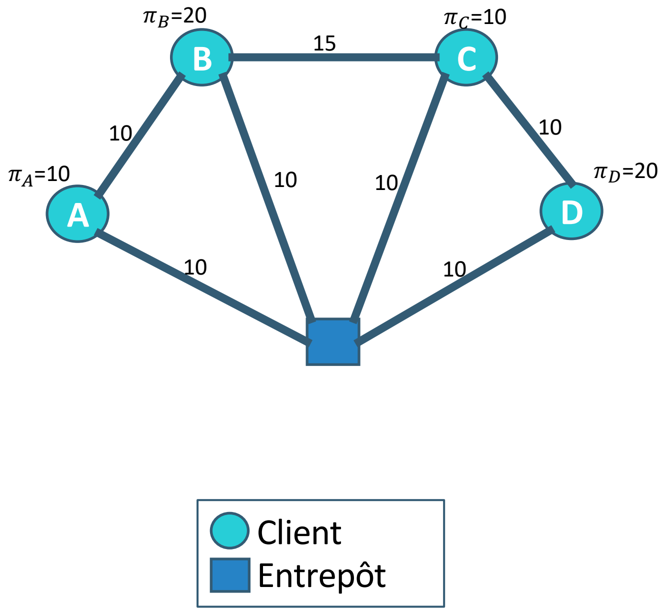


# Génération de colonnes

## Stabilisation

Mais cette colonne est inutile

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ĉ | 10 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 5 | | $\pi_i$ |
| A : | 1 | | | | 1 | | | = 1 | 15 |
| B : | | 1 | | | 1 | | 1 | = 1 | 15 |
| C : | | | 1 | | | 1 | 1 | = 1 | 15 |
| D : | | | | 1 | | 1 | | = 1 | 15 |
| | | 0 | | 0 | 1 | 1 | | $\boxed{60}$ | |



# Génération de colonnes

Stabilisation !

- Technique courante
  - Banc de pénalité
  - *Interior point stabilization*
    - Ajouter une variable au primal est equivalent à ajouter une coupe au dual
    - Trouve plusieurs points extremes
      - Faire une combinaison linéaire
  - Idée simple : algorithme barrière sans croisement