DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
LABORATOIRE II

Directives : *Cette séance de laboratoire vous permettra d'observer, à l'aide du logiciel* MATLAB, *les conséquences pratiques reliées à l'utilisation d'un système de représentation binaire et de l'arithmétique flottante en calcul scientifique. Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction* `publish` *de* MATLAB. *Voir le fichier* `DocdeTravailLab2.m`

Les effets de l'arithmétique flottante

1. On désire estimer $e \simeq 2{,}718\,28$ à l'aide de la relation

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

   (a) Écrire une fonction MATLAB dont le seul argument en entrée sera n et qui calculera l'expression $(1 + \frac{1}{n})^n$.

   (b) En utilisant la fonction développée en (a), représenter graphiquement, sur deux graphes distincts, la fonction $(1 + \frac{1}{n})^n$:
   - en partant de $n = 10^5$ jusqu'à $n = 10^7$, par incréments de 2×10^5 ;
   - en partant de $n = 10^{15}$ jusqu'à $n = 10^{17}$, par incréments de 2×10^{15}.

   Observer les résultats obtenus et expliquer toute anomalie.

   Le rapport doit contenir : le fichier de la fonction MATLAB *à la question (a). Le programme* MATLAB *et les graphes produits par ce programme à la question (b). Finalement les commentaires de la question (b).*

2. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{(3 - 2x^2)\arcsin(x) - 3x\sqrt{1 - x^2}}{x^5}.$$

   On désire évaluer l'expression

$$f(\alpha) = \frac{(3 - 2\alpha^2)\arcsin(\alpha) - 3\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^5} \tag{1}$$

   où $\alpha^2 = 0{,}006\,694\,380\,022\,903\,415\,749\,574\,948\,586$.

   (a) Calculer les valeurs des expressions

$$(3 - 2\alpha^2)\arcsin(\alpha) \quad \text{et} \quad 3\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}$$

   et vérifier que les deux nombres obtenus sont voisins.

   (b) En vous servant de l'expression (1), calculer une approximation de $f(\alpha)$ et en déduire le nombre de chiffres significatifs.
   Note : On admettra que $f(\alpha) = 0{,}267\,819\,636\,411\,523\,324\,998\,687\,379\,451$.

(c) En se servant du développement de Taylor de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$, on peut montrer que

$$f(\alpha) \simeq P_n(\alpha^2) = \frac{4}{15} + \frac{6}{35}(\alpha^2) + \frac{5}{42}(\alpha^2)^2 + \frac{35}{396}(\alpha^2)^3 + \cdots + \frac{(2n+1)!\,(\alpha^2)^n}{(2n+3)(2n+5)(n!)^2\,2^{2n-2}}.$$

Télécharger la fonction `hhorner.m`. Pour une valeur de n (degré du polynôme de Taylor) donnée, cette fonction permet d'évaluer $P_n(\alpha^2)$ à l'aide de l'algorithme de Horner, décrit aux pages 26–27 du manuel du cours.

En vous servant de la fonction `hhorner.m`, écrire un programme MATLAB qui permet de déterminer numériquement le plus petit degré n nécessaire pour que le polynôme de Taylor de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$ fournisse une approximation de $f(\alpha)$ avec 15 chiffres significatifs.

(d) Expliquer pourquoi l'approximation de $f(\alpha)$ obtenue avec le polynôme de Taylor et l'algorithme de Horner est plus précise que celle obtenue avec l'expression (1).

Le rapport doit contenir : Les valeurs des expressions et la justification de la question (a). L'approximation et le nombre de chiffres significatifs à la question (b), le programme MATLAB, *la valeur de n obtenue à la question (c) et finalement la discussion en (d).*

Propagation d'erreurs

3. On définit la suite I_n pour $n = 1, 2, 3, \cdots$ par l'expression :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{10 + x}\,dx.$$

Il est facile de vérifier que chaque terme de la suite est positif et que la suite I_n est décroissante, c.-à-d. $I_n > I_{n+1}$. Enfin en intégrant par parties à deux reprises, cela revient à déterminer I_n par récurrence avec

$$\begin{cases} I_1 & = & \ln\left(\frac{11}{10}\right); \\ I_{n+1} & = & \frac{1}{n} - 10 I_n. \end{cases}$$

Soient ΔI_n et ΔI_{n+1} les erreurs absolues sur I_n et I_{n+1}. En négligeant l'erreur d'arrondi sur $\frac{1}{n}$, on peut montrer analytiquement que

$$\Delta I_{n+1} \simeq 10 \Delta I_n.$$

(a) Écrire un programme MATLAB qui calculera les 20 premières valeurs de I_n en partant de $I_1 \simeq 0{,}095310$ (l'arrondi de I_1 à 5 chiffres). Les résultats doivent être présentés dans un tableau comportant deux colonnes : (n, I_n). Observer les résultats obtenus et expliquer toutes anomalies.

(b) Reprendre la question précédente en utilisant cette fois la valeur de I_1 donnée par MATLAB . Commenter les résultats obtenus.

Le rapport doit contenir pour les questions (a) et (b) : Le programme MATLAB, *le tableau produit par ce programme et finalement la discussion.*