DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MTH2210A-CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
EXAMEN FINAL

30 avril 2023

Directives : *Vous avez deux heures et trente minutes pour compléter cet examen. Vous n'avez droit à aucune documentation. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP peuvent être utilisées. Utilisez l'aide-mémoire et le cahier qui sont distribués avec le questionnaire.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

($\frac{2}{20}$) (a) On considère la fonction

$$f(x) = xe^x - 1.$$

Faire 2 itérations de la méthode de la bissection en partant de l'intervalle $[0{,}5\,;\,0{,}7]$ et estimer le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue.

($\frac{1,5}{20}$) (b) On donne dans la table suivante des valeurs d'une fonction $h(x)$.

x	0,0	0,1	0,2	0,5	0,8	0,9	1,0
$h(x)$	30	29	24	19	18	15	0

En vous servant de toutes les données du tableau, calculer une approximation de $\int_0^1 h(x)dx$ qui donne la plus grande précision possible.
Note : Les abscisses ne sont pas également distancées.

($\frac{1}{20}$) (c) Un polynôme $p(x)$ de degré 2 est tel que

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 7 \quad \text{et} \quad p(2) = 17.$$

Calculer la valeur exacte de $p'(1)$ sans calculer $p(x)$. **Justifier votre réponse.**

($\frac{1,5}{20}$) (d) On considère une formule aux différences permettant de faire l'approximation de $f^{(4)}(x)$. On peut montrer à l'aide de développements de Taylor que le terme d'erreur lié à cette formule aux différences est donné par

$$-\frac{h^2}{6}f^{(6)}(x) - \frac{h^4}{80}f^{(8)}(x) + \mathcal{O}(h^6).$$

Quel serait l'ordre de l'approximation que l'on obtiendrait en utilisant l'extrapolation de Richardson avec 2 approximations de $f^{(4)}(x)$ calculées à l'aide de cette formule aux différences ? **Justifier brièvement votre réponse.**

2. Soit $g(t)$ une fonction continue définie sur l'intervalle $[-1\,,1]$. Pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$, la formule de quadrature suivante est considérée :

$$I(g) = \omega_1\, g(-1) + \omega_2\, g(1).$$

($\frac{2}{20}$) (a) Trouver les poids d'intégration ω_1 et ω_2 tels que la formule de quadrature soit de degré de précision le plus élevé possible. Donner ce degré de précision.

($\frac{1}{20}$) (b) Réécrire la formule de quadrature obtenue en (a) sur l'intervalle $[a\,,\,b]$ pour intégrer une fonction continue $f(x)$ définie sur cet intervalle. Identifier la formule d'intégration numérique de Newton-Cotes qui est obtenue.

3. Soit la fonction $f(x) = e^{x-2} + x^2 - 3x + 1$ qui possède une racine $r = 2$.

(a) On se propose d'utiliser l'algorithme de points fixes

$$x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - e^{x_n - 2}}$$

pour calculer la racine $r = 2$.

($\frac{2}{20}$) i) Quel est l'ordre de convergence exact (théorique) de cette méthode de points fixes ?

($\frac{1{,}5}{20}$) ii) En partant de l'approximation initiale $x_0 = 1{,}75$, nous avons utilisé l'algorithme de points fixes pour obtenir les résultats du tableau suivant :

n	$\lvert e_n \rvert$	$\left\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n} \right\rvert$	$\left\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \right\rvert$
0	$2{,}500 \times 10^{-1}$	$5{,}802 \times 10^{-2}$	0,232 090
1	$1{,}451 \times 10^{-2}$	$3{,}009 \times 10^{-3}$	0,248 020
2	$5{,}235 \times 10^{-5}$	$1{,}309 \times 10^{-5}$	0,249 996
3	$6{,}851 \times 10^{-10}$	—	—
4	0,000	—	—

où $e_n = x_n - r$ est l'erreur à l'étape n.

Interpréter ces résultats numériques de manière à confirmer les résultats théoriques obtenus en (i) et donner la valeur exacte vers laquelle le quotient $\left\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \right\rvert$ devrait converger.

($\frac{1}{20}$) (b) On désire utiliser la méthode de Newton pour obtenir la racine $r = 2$.
Est-ce que la convergence pourrait être linéaire si l'approximation initiale x_0 était choisie dans le bassin d'attraction du point fixe $r = 2$?
Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0.

4. On considère le système non linéaire

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 = 3, \\ \\ -x_1 + x_2^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

($\frac{2}{20}$) (a) Faire une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $[x_1^0 \quad x_2^0]^T = [1 \quad 1]^T$.

($\frac{1}{20}$) (b) Donner l'ordre de convergence de la méthode de Newton pour la solution exacte $\vec{x} = [2 \quad 1]^T$? **Justifier votre réponse.**

5. Questions indépendantes

$(\frac{1,5}{20})$ (a) On considère le problème de valeur initiale suivant :

$$k\frac{du}{dt} = u - u^2 - u\int_0^t u(x)\,dx, \quad u(0) = u_0, \tag{1}$$

où $k = 0{,}5$ et $u_0 = 0{,}1$.

En utilisant le changement de variable $v(t) = \ln(u(t))$, on peut réécrire l'équation (1) sous la forme :

$$k\frac{dv}{dt} = 1 - e^v - \int_0^t e^{v(x)}\,dx. \tag{2}$$

Ensuite, en dérivant l'équation (2) par rapport à t, on obtient l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$k\frac{d^2v}{dt^2} = -v'e^v - e^v. \tag{3}$$

Transformer l'équation différentielle (3) en un système d'ordre 1 dont les inconnues sont $v_1(t) = u(t) = e^{v(t)}$ et $v_2(t) = v'(t)$. Identifier les conditions initiales applicables au système.

$(\frac{2}{20})$ (b) On considère le problème de valeurs initiales

$$\begin{cases} y_1'(t) &= -4y_1(t) - 2y_2(t) + e^t \quad y_1(0) = 0 \\ \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) + y_2(t)) \quad y_2(0) = -1 \end{cases}$$

En prenant un pas $h = 0{,}1$, faire une itération de la méthode d'Euler modifiée.

Les professeurs du cours MTH2210A