DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MTH2210A-CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
EXAMEN FINAL

9 décembre 2023

Directives : *Vous avez deux heures et trente minutes pour compléter cet examen. Vous n'avez droit à aucune documentation. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP peuvent être utilisées. Utilisez l'aide-mémoire et le cahier qui sont distribués avec le questionnaire.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Le tableau suivant présente la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique

t (s)	$v(t)$ (m/s)
0	2,00
10	1,89
20	1,72
30	1,44
35	1,21
40	1,01

Note : Les abscisses ne sont pas également distancées.

($\frac{2}{20}$) (a) En vous servant au besoin plusieurs fois d'une formule aux différences appropriée, obtenir une approximation de l'accélération $a(t)$ (en m/s^2) en $t = 15s$ qui soit d'ordre 4.

(b) La vitesse moyenne de l'eau en écoulement dans la conduite cylindrique peut être calculée par la relation suivante :

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{40}\int_0^{40} v(t)\,dt.$$

($\frac{2}{20}$) i) En vous servant de toutes les données du tableau, calculer une approximation d'ordre 2 de la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau.

($\frac{1}{20}$) ii) En vous servant de toutes les données du tableau, expliquer brièvement comment on pourrait calculer la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau avec un *maximum* de précision (au moins d'ordre 4). **Ne pas calculer cette approximation.**

2. Questions indépendantes sur les équations non linéaires

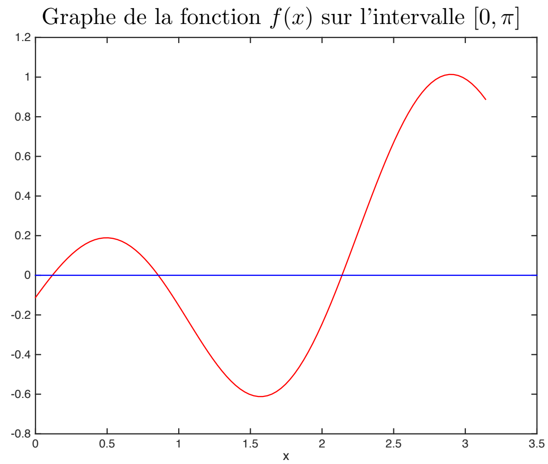
(a) La fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ possède une racine réelle r dans l'intervalle $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$. Pour trouver une approximation de cette racine, on se propose d'utiliser une méthode de points fixes avec la fonction

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

($\frac{0,5}{20}$) i) Vérifier que la racine r est un point fixe de la fonction $g(x)$.

($\frac{2}{20}$) ii) En estimant $g'(x)$ sur un sous-intervalle approprié de $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$, en déduire que le point fixe r est attractif et que la convergence est linéaire.

$(\frac{2}{20})$ (b) Soit la fonction dont le graphe est illustré à la figure ci-dessous.



Combien d'itérations de l'algorithme de la bissection seraient nécessaires pour assurer une précision avec au moins 4 chiffres significatifs si l'intervalle de départ est $[0\,,\,\pi]$?

$(\frac{1}{20})$ (c) On veut calculer une approximation de $r = \ln a$ pour $a > 0$ donné. Pour ce faire, on considère le problème équivalent $f(x) = e^x - a = 0$. On suggère d'utiliser une méthode de points fixes et on propose une variante de la méthode de Newton avec l'algorithme suivant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(r)} = x_n - \frac{e^{x_n} - a}{a}.$$

Donner une interprétation géométrique de cette méthode de points fixes.

3. On considère la quadrature de Gauss-Legendre à 2 points

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \simeq w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2). \tag{1}$$

$(\frac{3}{20})$ (a) Pour déterminer les constantes w_1, w_2, t_1 et t_2, il faut résoudre le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ w_1 t_1 + w_2 t_2 = 0 \\ w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 = \frac{2}{3} \\ w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Faire une itération de la méthode de Newton pour ce système en partant du vecteur initial $(w_1^0 \quad w_2^0 \quad t_1^0 \quad t_2^0)^T = (1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)^T$. **Donner le détail des calculs.**
Note :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

($\frac{2}{20}$) (b) Sachant que $w_1 = w_2 = 1$, $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, calculer

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

à l'aide de la formule de Gauss-Legendre à 2 points et déterminer le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue.

4. Questions indépendantes sur les équations différentielles

($\frac{2}{20}$) (a) Le problème de valeurs initiales de Fehlberg est constitué du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} c''(t) = -\pi^2 t^2 c(t) - \pi \dfrac{s(t)}{\sqrt{(c(t))^2 + (s(t))^2}}; \\ \\ s''(t) = -\pi^2 t^2 s(t) + \pi \dfrac{c(t)}{\sqrt{(c(t))^2 + (s(t))^2}}, \end{cases}$$

et des conditions initiales

$$\begin{cases} c(2\sqrt{3}) = 1; \\ c'(2\sqrt{3}) = 0; \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} s(2\sqrt{3}) = 0; \\ s'(2\sqrt{3}) = 2\pi\sqrt{3}. \end{cases}$$

Transformer ce système d'équations différentielles en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre 1 et donner les conditions initiales associées au système.

($\frac{2,5}{20}$) (b) Soit le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1'(t) &= e^{-t} y_2(t); \\ \\ y_2'(t) &= -4t^2 y_1(t) - 2y_2(t), \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = 0$ et $y_2(0) = 1$.
En prenant un pas $h = 0{,}1$, faire une itération de la méthode d'Euler modifiée.

Les professeurs du cours MTH2210A