DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MTH2210A-CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
CONTRÔLE PÉRIODIQUE

le 11 mars 2023

Directives: *Vous avez deux heures pour compléter ce contrôle. Vous n'avez droit à aucune documentation. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP peuvent être utilisées. Utilisez l'aide-mémoire et le cahier qui sont distribués avec le questionnaire.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

$(\frac{1,5}{20})$ (a) La quantité $S = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ est une approximation de $\sqrt{2}$. En utilisant la valeur de $\sqrt{2}$ donnée par votre calculatrice, donner le nombre de chiffres significatifs de l'approximation S.

$(\frac{2}{20})$ (b) La loi de Fourier pour le refroidissement d'un corps s'écrit:

$$T'(t) = -k\,(T(t) - T_\infty)\,, \tag{1}$$

où T_∞ est la température du milieu ambiant, $k = 0{,}1\,\text{min}^{-1}$ est la diffusivité thermique. Une bille métallique initialement chauffée à une température de $T(0) = 90\,°\text{C}$ est plongée dans de l'eau à $T_\infty = 20\,°\text{C}$.
Déterminer une approximation d'ordre 2 de la température T au temps $t = 0{,}1$ min.
On ne demande pas de résoudre l'équation différentielle (1).

$(\frac{1,5}{20})$ (c) Soient A, E et U trois matrices de dimensions 6×6 définies par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De plus, ces matrices sont telles que $A = (2I - E)U$, où I est la matrice identité de dimensions 6×6.
Calculer $\det(A)$ de la façon qui nécessite le moins de calcul possible.

$(\frac{1}{20})$ (d) Soit C une matrice inveersible de dimensions $n \times n$. Sachant que le nombre d'opérations à effectuer pour calculer les matrices L et U est environ $\frac{n^3}{3}$ et que celui des résolutions $L\vec{y} = \vec{b}$ puis $U\vec{x} = \vec{y}$ est environ n^2, quel est le coût du calcul de la matrice C^{-1} en utilisant la méthode présentée en classe?

$(\frac{2}{20})$ (e) Soit la fonction

$$S(x) = \begin{cases} p_1(x) = 1 + x & \text{pour} \quad 1 \le x \le 2; \\ p_2(x) = 1 + x & \text{pour} \quad 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Indiquer si la fonction $S(x)$ peut représenter une spline cubique passant par les points de coordonnées $(1, 2)$, $(2, 3)$ et $(3, 4)$. **Justifier votre réponse.**

2. Soit la fonction

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt.$$

On désire obtenir le développement de Taylor de la fonction $f(x)$ dont l'erreur ne dépassera pas 10^{-3} pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

$(\frac{2,5}{20})$ (a) Sachant que pour x proche de $x_0 = 0$ on a,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

obtenir le développement de Taylor de degré $2n+1$ de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$. Préciser l'ordre précision du polynôme obtenu.

$(\frac{1}{20})$ (b) Donner une borne supérieure de la valeur absolue de l'expression analytique du terme d'erreur du développement de Taylor de degré $2n+1$ de la fonction $f(x)$ pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

$(\frac{1}{20})$ (c) Déterminer le degré minimal $m = 2n+1$ du polynôme de Taylor de la fonction $f(x)$ dont l'erreur ne dépassera pas 10^{-3} pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

3. On considère la table de différences divisées suivante:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$
0,15	0,1761			
		2,715		
0,17	0,2304		-7,3750	
		2,420		18,750
0,19	0,2788		-6,250	
		2,170		22,917
0,21	0,3222		-4,8750	
		1,975		12,500
0,23	0,3617		-4,1250	
		1,810		
0,25	0,3979			

$(\frac{2}{20})$ (a) En vous servant de la table de différences divisées, calculer une approximation de $f(0{,}185)$ en utilisant le polynôme de Newton passant par les 5 premiers points.

$(\frac{1}{20})$ (b) Sachant que $f(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$, calculer une borne supérieure de la valeur absolue de l'expression analytique du terme d'erreur associé à l'approximation de $f(0{,}185)$ trouvée en (a).
On ne demande pas de calculer la valeur exacte ou une approximation de l'erreur.

$(\frac{1}{20})$ (c) On désire calculer une approximation de $f(0{,}185)$. On peut choisir l'approximation obtenue en (a) ou celle obtenue avec le polynôme de Lagrange passant par les 5 points utilisés en (a), mais en classant les points par distance croissante par rapport à l'abscisse $x = 0{,}185$. Laquelle des deux approximations serait la plus précise? **Justifier votre réponse.**

4. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{et le vecteur} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

Le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ a pour solution exacte $\vec{x} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$.
Si nous perturbons la matrice en la remplaçant par

$$A + E = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8{,}1 & 7{,}2 \\ 7{,}08 & 5{,}04 & 6 & 5 \\ 8 & 5{,}98 & 9{,}89 & 9 \\ 6{,}99 & 4{,}99 & 9 & 9{,}98 \end{bmatrix},$$

nous obtenons la solution

$$\vec{x}^* = [-81 \quad 137 \quad -34 \quad 22]^T.$$

$(\frac{1,5}{20})$ (a) Calculer les quantités $\frac{\|E\|_\infty}{\|A\|_\infty}$ et $\frac{\|\vec{x}-\vec{x}^*\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$.

$(\frac{2}{20})$ (b) Sachant que $\|A^{-1}\|_\infty = 136$, commenter et expliquer avec preuve à l'appui les résultats obtenus en (a).

Les professeurs du cours MTH2210A