DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MTH2210A-CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
CONTRÔLE PÉRIODIQUE

le 28 octobre 2023

Directives: *Vous avez deux heures pour compléter ce contrôle. Vous n'avez droit à aucune documentation. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP peuvent être utilisées. Utilisez l'aide-mémoire et le cahier qui sont distribués avec le questionnaire.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

($\frac{2}{20}$) (a) Soit une calculatrice travaillant en arithmétique flottante à 3 chiffres dans la mantisse et utilisant l'arrondi. Faire les différentes étapes suivies par cette calculatrice pour évaluer l'expression suivante:

$$A \times (B - C) \quad \text{avec} \quad A = 0{,}333\,79,\ B = 2{,}71828 \text{ et } C = \frac{1}{9}.$$

($\frac{2}{20}$) (b) La formule de récurrence suivante permet d'évaluer les fonctions de Bessel J_n au point $x = 1$. En partant de $J_0 = 0{,}7651976865$ et $J_1 = 0{,}4400505857$, on a pour $n \geq 2$:

$$J_n = 2(n-1)J_{n-1} - J_{n-2}.$$

On a conçu un programme MATLAB qui évalue les valeurs de J_n pour $n = 2, 3, \cdots, 10$ et on a obtenu les résultats suivants:

n	J_n (calculée)	Valeur exacte de J_n	$2(n-1)J_{n-1}$ (calculée)	J_{n-2} (calculée)
2	$1{,}149034 \times 10^{-1}$	$1{,}149034 \times 10^{-1}$	$8{,}801 \times 10^{-1}$	$7{,}651 \times 10^{-1}$
3	$1{,}956335 \times 10^{-2}$	$1{,}956335 \times 10^{-2}$	$4{,}596 \times 10^{-1}$	$4{,}400 \times 10^{-1}$
4	$2{,}476638 \times 10^{-3}$	$2{,}476638 \times 10^{-3}$	$1{,}173 \times 10^{-1}$	$1{,}149 \times 10^{-1}$
5	$2{,}497540 \times 10^{-4}$	$2{,}497577 \times 10^{-4}$	$1{,}981 \times 10^{-2}$	$1{,}956 \times 10^{-2}$
6	$2{,}090249 \times 10^{-5}$	$2{,}093833 \times 10^{-5}$	$2{,}497 \times 10^{-3}$	$2{,}476 \times 10^{-3}$
7	$1{,}075898 \times 10^{-6}$	$1{,}502325 \times 10^{-6}$	$2{,}508 \times 10^{-4}$	$2{,}497 \times 10^{-4}$
8	$-5{,}839926 \times 10^{-6}$	$9{,}422344 \times 10^{-8}$	$1{,}506 \times 10^{-5}$	$2{,}090 \times 10^{-5}$
9	$-9{,}451472 \times 10^{-5}$	$5{,}249250 \times 10^{-9}$	$-9{,}343 \times 10^{-5}$	$1{,}075 \times 10^{-6}$
10	$-1{,}695425 \times 10^{-3}$	$2{,}630616 \times 10^{-10}$	$-1{,}701 \times 10^{-3}$	$-5{,}839 \times 10^{-6}$

En comparant la valeur de J_n obtenue à l'aide de la formule de récurrence et la valeur exacte que remarquez-vous d'anormal? En vous servant des données du tableau expliquer ces résultats anormaux.

$(\frac{3}{20})$ 2. (a) Soit la fonction

$$g(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2}\, dt.$$

Calculer de la façon qui nécessite le moins de calcul possible, les 3 premiers termes non nuls du développement de Taylor de la fonction $g(x)$ autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré et l'ordre du polynôme obtenu.

$(\frac{2}{20})$ (b) Donner une approximation de $g(\frac{1}{3})$ en utilisant le polynôme de Taylor obtenu en (a) et donner le nombre de chiffres significatifs de cette approximation.

3. Questions indépendantes

$(\frac{1,5}{20})$ (a) Soit la matrice **définie positive**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Identifier parmi les méthodes de factorisation matricielle présentées en classe, la méthode de factorisation LU la plus appropriée pour la matrice A.
On ne demande pas de la calculer.
Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0.

$(\frac{1,5}{20})$ (b) Les 3 matrices de dimensions 5×5

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont telles que $B = CD$.
Résoudre, de la façon qui nécessite le moins de calculs possible, le système linéaire $B\vec{x} = \vec{b}$ où $\vec{b} = (2 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 3)^T$. **Donner le détail des calculs.**

$(\frac{2}{20})$ (c) Une factorisation matricielle est utilisée pour résoudre un système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, où A est de dimensions 2×2, sur un ordinateur pour lequel *la précision machine* est de l'ordre de 10^{-16}. Sachant que $\|A\|_\infty \simeq 10^4$, $\|A^{-1}\|_\infty \simeq 10^6$ et que

$$\vec{x}^\star = \begin{pmatrix} 1,234\,568 \\ 0,000\,012\,345\,679 \end{pmatrix},$$

combien de chiffres significatifs pouvons-nous nous attendre à obtenir pour chaque composante de cette approximation?

4. Questions indépendantes

$(\frac{2,5}{20})$ (a) La courbe des puissances classées d'un service d'électricité, comme Hydro-Québec, représente la proportion de l'année où la demande d'électricité atteint ou dépasse un niveau de puissance donné. Plus la puissance est grande, plus petite est la proportion de l'année où la demande dépasse cette valeur. **Cette courbe est donc par définition décroissante**.

Pour une année donnée, on dispose des données et de la table de différences divisées suivantes:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0,0	30,0		
			-10,0	
1	0,1	29,0		-200,0
			-50,0	
2	0,2	24,0		83,33
			-16,67	
3	0,5	19,0		22,22
			-3,33	
4	0,8	18,0		-41,67
			-20,0	
5	0,9	16,0		-700,0
			-160,0	
6	1,0	0,0		

Donner une approximation de $f(0{,}3)$ à l'aide du *polynôme d'interpolation de Newton* passant par les 4 premiers points. Est-ce que cette approximation vous semble acceptable? **Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0.**

$(\frac{1}{20})$ (b) On peut montrer que les fonctions polynomiales

$$p_3(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21 \text{ et } p_4(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 3$$

passent par les 4 points de coordonnées $(1\,,\,2)$, $(2\,,\,1)$, $(3\,,\,6)$ et $(4\,,\,47)$. Expliquer brièvement pourquoi ce fait ne contredit pas le résultat sur l'unicité du polynôme d'interpolation qui passe par les 4 points.

$(\frac{2{,}5}{20})$ (c) Soit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ des points également distancés , c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que $x_i - x_{i-1} = h$ pour $i = 1, 2, 3$. On Considère la fonction définie par morceaux

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) &= -(x - x_0)^3 & \text{pour} \quad x \in [x_0\,,\,x_1]; \\ P_2(x) &= P_1(x) + (x - x_1)^3 & \text{pour} \quad x \in [x_1\,,\,x_2]; \\ P_3(x) &= P_2(x) + (x - x_2)^3 & \text{pour} \quad x \in [x_2\,,\,x_3]. \end{cases}$$

i. Vérifier que la fonction $S(x)$ satisfait à toutes les propriétés d'une spline cubique qui passe par les points de coordonnées $(x_0, 0)$, $(x_1, P_1(x_1))$, $(x_2, P_2(x_2))$ et $(x_3, P_3(x_3))$.

ii. Est-ce une spline naturelle? **Justifier votre réponse.**

Les professeurs des cours MTH2210A