Recueil d’exercices

Exercices pour les cours de calcul scientifique pour ingénieurs MTH2210A

Édition du 19 novembre 2018

Donatien N’Dri & Steven Dufour
École Polytechnique de Montréal

Avant-propos

Ce recueil d'exercices d'analyse numérique est un outil complémentaire aux exercices du manuel de référence du cours, pour aider les étudiants des différentes versions du cours *Calcul scientifique pour ingénieurs* (MTH2210x) de l'École Polytechnique de Montréal à se préparer à réussir les examens. Il est conseillé de d'abord faire (et comprendre) tous les exercices suggérés du manuel de référence *Analyse numérique pour ingénieurs* par André Fortin (cf. contenu du cours disponible sur le site Internet du cours). Ceci devrait être suffisant pour bien faire aux examens. Ensuite, si vous avez encore du temps pour mieux vous préparer, vous pouvez consulter ce recueil pour raffiner votre préparation. L'idée n'est pas de faire tous ces exercices. Il y en a beaucoup trop. Mais vous pouvez fureter dans ce recueil et choisir des exercices au hasard pour voir si vous êtes bien préparés. Ces exercices proviennent de vieux examens. Ils devraient donc vous donner une bonne idée de l'allure des examens.

La première section de ce recueil contient une banque d'exercices basée sur la matière du cours MTH2210x. La deuxième section contient une série d'indices liés à ces exercices. Finalement, une dernière section contient des solutions brèves à ces exercices. Lorsque ce document est consulté en ligne à l'aide du logiciel *Acrobat*, des hyperliens vous permettront de naviguer facilement entre ces trois sections.

Nous vous encourageons à ne pas vous référer trop rapidement aux solutions. Tentez d'abord de vraiment résoudre les problèmes sur papier. Si vous n'êtes pas certains de vous, vous pouvez ensuite consulter les indices. Ils devraient vous permettre de démarrer. Vous pouvez finalement consulter les solutions brèves pour vérifier si vous avez bien résolu les problèmes.

Ce recueil est dynamique. Nous sommes ouverts à toute suggestion de correction ou de modification. Des mises-à-jour de ce document seront rendues disponibles sur une base régulière. Consultez la date de l'édition pour voir si le document a été mis à jour. Dans le but de créer des textes académiques, techniques et scientifiques de qualité, ce document est protégé par une license « Creative Commons ».

Donatien N'dri & Steven Dufour
École Polytechnique de Montréal
Le 7 septembre 2009

Table des matières

Introduction et analyse d'erreur

Définitions, développement de Taylor et erreur de troncature

1. À L'aide d'une méthode numérique, on a évalué la dérivée d'une fonction pour deux valeurs de h :

h	$f'(x_0)$	erreur absolue
0,1	25,312 100	0,000 400
0,05	25,312 475	0,000 025

   (a) Donner le nombre de chiffres significatifs de chaque approximation.

   (b) Quel est l'ordre de précision de la méthode de différentiation numérique utilisée?

   Référence : A. Fortin, chap. 1, no. 25
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

2. Dire si l'énoncé suivant est vrai ou faux et justifier votre réponse en deux ou trois lignes : « Soit $x^* = 0{,}001\,2345$ une approximation de x qui est telle que $\Delta x \leq 0{,}7 \times 10^{-5}$, alors x^* possède 4 chiffres significatifs ».
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

3. On peut obtenir une approximation de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ à l'aide de la fonction rationnelle :
$$r(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 - 6x + 12}.$$
   En comparant $r(x)$ avec les valeurs exactes de l'exponentielle en $x = 0{,}2$ et en $x = 0{,}1$, déterminer l'ordre de cette approximation.
   Référence: A. Fortin, chap. 1, no. 30
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

4. En se servant d'un développement de Taylor de la fonction $\arctan x$ autour de $x_0 = 0$, on a obtenu les résultats suivants :
$$\begin{cases} \arctan(0{,}4) = 0{,}380\,714\,667, & \text{erreur absolue} = 0{,}208\,29 \times 10^{-3}; \\ \arctan(0{,}1) = 0{,}099\,668\,667, & \text{erreur absolue} = 0{,}141\,80 \times 10^{-7}. \end{cases}$$
   Quel est l'ordre du développement de Taylor utilisé?
   Référence : A. Fortin, chap. 1, no. 32
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

5. Un développement de Taylor $T(x)$ d'une fonction $f(x)$ en $x_0 = 1$ donne les deux erreurs suivantes :
   - pour $x_1 = 1{,}02$, $|e_1| = |f(x_1) - T(x_1)| \simeq 0{,}3937 \times 10^{-7}$;
   - pour $x_2 = 1{,}1$, $|e_2| = |f(x_2) - T(x_2)| \simeq 0{,}2315 \times 10^{-4}$.

   Calculer l'ordre de précision du développement de Taylor utilisé.
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

6. À l'aide d'un développement de Taylor autour de $x_0 = 0$, on a approché la fonction $f(x)$ par le polynôme $p(x)$. Sachant que :

   - $f(0,1) = 3{,}156$ et $f(0{,}3) = 3{,}267$;
   - $p(0,1) = 3{,}156\,016$ et $p(0{,}3) = 3{,}165$,

   estimer l'ordre de précision du développement de Taylor utilisé et en déduire la valeur maximale possible pour le degré du polynôme $p(x)$.
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

7. On utilise souvent l'approximation :

   $$\sin x \simeq x.$$

   D'où vient cette approximation et quel est son ordre de précision?
   Référence : A. Fortin, chap. 1, no. 29
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

8. La fonction $i(t)$ est une solution de l'équation différentielle

   $$i'(t) = \sin(6t) - i(t),$$

   avec la condition initiale $i(0) = 0$. *Sans résoudre l'équation différentielle*, calculer le polynôme de Taylor d'ordre 3 de la fonction $i(t)$ autour de $t_0 = 0$. Préciser le degré du polynôme obtenu.
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

9. Dites si l'énoncé suivant est vrai ou faux et justifier votre réponse en deux ou trois lignes : « Un développement de Taylor de degré n est précis à l'ordre $n + 1$ ».
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

10. Soit $p(x)$ une fonction qui vérifie

    $$p(10) = 100, \quad p'(10) = 3, \quad p''(10) = -1 \quad \text{et} \quad |p'''(x)| < 0{,}03 \quad \text{pour tout } x.$$

    À l'aide de cette information, estimer $p(10{,}5)$ ainsi que l'erreur associée à cette approximation et le nombre de chiffres significatifs.
    [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

11. On suggère d'approximer la fonction $f(x) = \sin x + \cos x$ près de $x = 0$ par la fonction $g(x) = x + 1$.

    (a) Comment a-t-on obtenu cette approximation?

    (b) Donner l'ordre de précision de cette approximation.

    [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

12. Soient $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions qui sont telles que :

    $$g'(x) = h(x) \quad \text{et} \quad h'(x) = g(x).$$

    Sachant que $g(0) = 0$ et $h(0) = 1$, déterminer le développemnent de Taylor d'ordre 5 de la fonction $g(x)$ autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré du polynôme obtenu.
    [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

13. Obtenir n de telle sorte que
$$|e^x - p_n(x)| \leq 10^{-4}, \quad \text{pour } -1 \leq x \leq 1,$$
où $p_n(x)$ est le développement de Taylor de degré n de e^x autour de $x_0 = 0$. Combien de chiffres significatifs obtenez-vous à l'aide de cette approximation pour $0 \leq x \leq 1$?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

14. Pour chacune des fonctions suivantes, donner un intervalle centré en $x_0 = 0$ dans lequel l'approximation fournit au moins 4 chiffres significatifs.
    (a) $x \simeq \sin(x)$;
    (b) $1 - \frac{1}{2}x^2 \simeq (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

15. On considère la fonction $\sinh(x) = \dfrac{(e^x - e^{-x})}{2}$.
    (a) Calculer $p_3(x)$, le développement de Taylor degré 3 de $\sinh(x)$, autour de $x_0 = 0$ de deux façons différentes. Donner l'expression analytique du terme de reste.
    (b) Obtenir une approximation de $\sinh(0{,}1) = 0{,}100\,166\,750\,019\,844\,03$. Combien votre approximation a-t-elle de chiffres significatifs? Spécifier l'erreur absolue et l'erreur relative.
    (c) Sans faire le calcul, par quel facteur (environ) serait réduite l'erreur absolue si on utilisait p_3 pour approcher $\sinh(0{,}025)$?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

16. (a) Calculer le développement de Taylor d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \ln(x)$ autour du point $x_0 = 1$. Donner l'expression analytique du terme d'erreur, ainsi qu'une borne supérieure de ce terme d'erreur. À l'aide de ce développement, donner une approximation de $\ln(1{,}1)$. Par comparaison avec la valeur exacte ($0{,}095\,310\,179\,804$), donner le nombre de chiffres significatifs de votre approximation.
    (b) Par quel facteur approximatif l'erreur obtenue en (a) serait-elle réduite si l'on évaluait $\ln(1{,}025)$ au moyen du développement de Taylor obtenu en (a)? (Ne pas faire le calcul de l'approximation.)
    (c) Combien de termes devrait contenir le développement de Taylor pour que l'erreur absolue associée à l'approximation de $\ln(2)$ soit inférieure à 10^{-6}. Est-ce une façon pratique de calculer $\ln(2)$?
    (d) Développer le polynôme de Taylor de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (utiliser le développement de Taylor de la fonction $\ln(1 - x)$ peut faciliter le travail). Pour quelle valeur de x pourra-t-on obtenir une approximation de $\ln(2)$? Combien de termes devrait contenir votre développement de Taylor pour que l'approximation de $\ln(2) = 0{,}693\,147\,180\,559$ ait 6 chiffres significatifs. Quel est le degré du polynôme que vous avez trouvé? Est-ce une façon pratique de calculer $\ln(2)$?

(e) Calculer le développement de Taylor d'ordre 3 de $g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ autour de $x_0 = 0$. Sachant que $(1+\frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

en utilisant le résultat obtenu en (a).

Référence : A. Fortin, chap. 1, no. 31
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

17. (a) Obtenir le développement de Taylor autour de $x_0 = 0$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

(b) Poser $x = -t^2$ dans le développement en (a) et obtenir le développement de Taylor de

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

(c) Intégrer l'expression obtenue en (b) et obtenir le développement de Taylor de la fonction $\arctan t$.

(d) Utiliser l'expression obtenue en (a) et obtenir le développement de Taylor de $\ln(1+t)$.

Référence : A. Fortin, chap. 1, no. 33
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

18. La fonction d'erreur $f(x)$ est définie par

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Pour en obtenir le développement de Taylor, on peut suivre les étapes suivantes :

(a) Obtenir le développement de Taylor de e^{-x}.

(b) Déduire de (a) le développement de Taylor de e^{-t^2}.

(c) Déduire de (b) le développement de Taylor de $f(x)$.

(d) Donner une approximation de $f(1)$ en utilisant les 4 premiers termes de son développement de Taylor.

(e) Quel est l'ordre de précision de l'approximation obtenue en (d)?

(f) Donner le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue en (d) en la comparant avec la valeur exacte $f(1) = 0{,}842\,701$.

Référence : A. Fortin, chap. 1, no. 34
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

19. (a) Obtenir le développement de Taylor d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ autour de $x_0 = 0$.

(b) Donner l'expression analytique du terme d'erreur pour le développement obtenu en (a).

(c) À l'aide du polynôme trouvé en (a), donner des approximations de $\sqrt{1{,}1}$ et de $\sqrt{1{,}025}$ et calculer les erreurs absolues e_1 et e_2 commises en comparant avec les valeurs exactes correspondantes. Donner le nombre de chiffres significatifs de chaque approximation.

(d) Effectuer le rapport $|\frac{e_1}{e_2}|$ et expliquer le résultat.

(e) Calculer une borne supérieure de l'expression analytique du terme de l'erreur calculé en (b) et utiliser cette expression pour estimer l'erreur sur l'évaluation de $\sqrt{1{,}1}$ et de $\sqrt{1{,}025}$. Comparer avec les erreurs exactes e_1 et e_2.

(f) Calculer les trois premiers termes du développement de Taylor de $\arcsin(x)$ autour de $x_0 = 0$, sachant que :

i) $\dfrac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

ii) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{105}{384}x^4 + \frac{945}{3840}x^5 + \mathcal{O}(x^6)$.

Préciser le degré et l'ordre de précision du polynôme obtenu. Quelle est la valeur maximale du degré du polynôme de Taylor?

Référence : A. Fortin, chap. 1, no. 35
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

20. (a) Sachant que $e^2 = 7{,}389\,06$, écrire le développement de Taylor de e^{2+h} jusqu'à l'ordre 3.

(b) Trouver une approximation x^* de $x = e^{2{,}1}$ à l'aide d'un polynôme de Taylor de degré 2.

(c) Du terme de reste associé au développement de Taylor obtenu en (a), donner une borne supérieure de l'erreur absolue $|x - x^*|$. En déduire le nombre de chiffres significatifs de x^*.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

21. Soient

$$\Pi_1 = 3{,}339\,682\,539 \quad \text{et} \quad \Pi_2 = 3{,}141\,592\,653$$

deux approximations de π obtenues à l'aide du développement de Taylor d'ordre 11 de $\arctan x$ autour de $x_0 = 0$, en utilisant respectivement les formules

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

et

$$\pi = 48 \arctan(\tfrac{1}{18}) + 32 \arctan(\tfrac{1}{57}) - 20 \arctan(\tfrac{1}{239}).$$

Pourquoi l'approximation Π_2 est-elle plus précise que Π_1?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

22. On désire calculer le développement de Taylor de la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

(a) Calculer le développement de Taylor d'ordre 5 de la fonction $\ln(1+x)$ autour de $x_0 = 0$ et en déduire les deux premiers termes du développement de Taylor de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré et l'ordre de précision du polynôme obtenu.

(b) En vous servant des développements de Taylor des fonctions $\ln(1+x)$ et $f(x)$ obtenus en (a), donner deux approximations de $\ln(2)$.

(c) Bien que les deux approximations de $\ln(2)$ soient du même ordre, expliquer pourquoi celle obtenue avec la fonction $f(x)$ est plus précise.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

23. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

(a) Obtenir le développement de Taylor de degré 5 de $\sin t$ autour de $t_0 = 0$.

(b) Déduire de (a) le développement de Taylor d'ordre 4 de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré du polynôme obtenu.

(c) À l'aide de ce développement, donner une approximation de $f(0{,}01)$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

24. (a) En vous servant des développements de Taylor des fonctions e^x et $\sin x$ autour de $x = 0$, donner le développement de Taylor d'ordre 4 de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x = 0$.

(b) Estimer $f(1{,}1)$ à l'aide du développement de Taylor obtenu en (a).

(c) Sachant que $e^{\sin(1{,}1)} = 2{,}438\,071\,405$, donner le nombre de chiffres significatifs de cette approximation.

(d) En dépit du fait que l'approximation obtenue en (b) soit d'ordre 4, expliquer pourquoi elle n'est pas très précise.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

25. La *fonction erreur* définie par

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

est utilisée en statistique en relation avec les variables aléatoires suivant une loi normale. On désire approcher la valeur de $\mathrm{erf}(x)$ dans l'intervalle $[-1\,,1]$ avec une erreur qui n'excède jamais 10^{-10}.

(a) Quelle est la valeur exacte de $\mathrm{erf}(0)$?

(b) En utilisant le développement de Taylor de e^z, trouver les n premiers termes non nuls du développement de Taylor de e^{-t^2};

(c) En déduire les n premiers termes non nuls du développement de Taylor de $\mathrm{erf}(x)$;

(d) Spécifier la forme analytique du terme de reste du développement de Taylor;

(e) Quelle doit être la valeur minimale de n pour que l'erreur de l'approximation de $\mathrm{erf}(x)$ soit toujours inférieure à 10^{-10} pour $x \in [-1\,,1]$?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

26. Nous voulons utiliser le développement de Taylor pour estimer l'intégrale de Fresnel,

$$C(x) = \int_0^x \cos(\tfrac{\pi t^2}{2})\,dt,$$

que nous voulons évaluer pour $|x| \leq \frac{1}{2}$.

(a) Obtenir le développement de Taylor de la fonction $C(x)$ dont l'erreur ne dépassera pas 10^{-4} pour tout x tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$ (l'utilisation du développement de Taylor approprié de $\cos(x)$ facilitera votre travail).

(b) Quel est le degré du développement obtenu? Quel est son ordre de précision?

(c) Combien aurons nous de chiffres significatifs si nous utilisons cette approximation pour estimer $C(\frac{1}{4})$? Donner une justification précise.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

27. (a) Calculer le développement de Taylor d'ordre 9 de $f(x) = \arctan x$ autour de $x_0 = 0$.
Indications :
   - $\dfrac{d}{dx} \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$
   - $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-x)^n + \cdots$

(b) Sachant que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, estimer la valeur de π à l'aide du développement de Taylor obtenu en (a). Déterminer le nombre de chiffres significatifs de cette approximation de π.

(c) Sans utiliser le développement de Taylor, par quel facteur approximatif l'erreur obtenue en (b) serait-elle réduite si on approximait $f(0{,}25)$ par le développement de Taylor obtenu en (a)?

(d) Estimer la valeur de π à l'aide du développement de Taylor obtenu en (a) en utilisant la formule suivante :

$$\pi = 48 \arctan(\tfrac{1}{18}) + 32 \arctan(\tfrac{1}{57}) - 20 \arctan(\tfrac{1}{239})$$

Expliquer pourquoi cette approximation est plus précise que celle obtenue en (b).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

28. Soit la fonction

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt.$$

On désire obtenir le développement de Taylor de la fonction $f(x)$ dont l'erreur ne dépassera pas 10^{-4} pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

(a) Obtenir le développement de Taylor de degré $2n+1$ de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$.

(b) Donner une borne supérieure de la valeur absolue de l'expression analytique du terme d'erreur du développement de Taylor de degré $2n+1$ de la fonction $f(x)$ pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

(c) Déterminer le degré minimal $m = 2n+1$ du polynôme de Taylor de la fonction $f(x)$ dont l'erreur ne dépassera pas 10^{-4} pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

29. Soit la fonction

$$g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt.$$

(a) Obtenir le développement de Taylor de la fonction $g(x)$ autour de $x = 0$.

(b) Donner une borne supérieure de l'expression analytique du terme d'erreur pour le développement de Taylor de degré n de $g(x)$ pour $|x| \le \frac{1}{2}$.

(c) Déterminer n pour que l'approximation donnée par ce développement de Taylor ait une erreur qui soit au plus 10^{-7} sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

30. On désire calculer le développement de Taylor de la fonction

$$f(x) = \frac{(3-2x^2)\arcsin x - 3x\sqrt{1-x^2}}{x^5}$$

autour du point $x_0 = 0$. Afin de faciliter notre travail, nous allons définir les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ à l'aide de leur dérivée :

$$\begin{cases} h'(x) = 4x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ g'(x) = xh(x), \end{cases}$$

ce qui nous permettra d'exprimer la fonction $f(x)$ comme

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^5}.$$

Calculer les quatre premiers termes du développement de Taylor de $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$ autour de $x_0 = 0$ et en déduire le développement de Taylor d'ordre 6 de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré du polynôme obtenu. Expliquer d'abord votre démarche et ensuite faire les calculs.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Norme IEEE et erreur de représentation

31. Si ε est un nombre dont la taille est de l'ordre de la précision machine, expliquer pourquoi il est justifié d'écrire l'approximation $1 - \frac{1}{\varepsilon_m} \approx -\frac{1}{\varepsilon_m}$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

32. Expliquer brièvement pourquoi la suite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e \simeq 2,718\,281$$

tend plutôt vers 1 pour de grandes valeurs de n, en arithmétique flottante. Estimer la plus petite valeur de n à partir de laquelle cette suite tend vers 1, suivant la norme IEEE en simple précision.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

33. On considère la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par

$$x_n = \epsilon 4^n + (1+\epsilon)\frac{1}{3^n}.$$

Pour $\epsilon = 10^{-50}$, le calcul des x_n à l'aide de MATLAB (norme IEEE-754 double précison) montre que $x_n = \frac{1}{3^n}$ pour $n = 1, 2, \ldots, 31$. Expliquer brièvement les résultats obtenus.
Référence: A. Fortin, chap. 1, no. 27
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

34. Si la valeur δ est telle que $|\delta| \ll x$, expliquer comment calculer $\sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}$ en évitant la perte de chiffres significatifs.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

35. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha \\ 1-\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \alpha > 0.$$
Quelles valeurs doivent être prises par α, en arithmétique flottante en double précision IEEE, pour que $\det A > \varepsilon$, où ε est la précision machine.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

36. Sachant que
$$\lim_{n\to\infty} n \log(1 + 1/n) = 1,$$
on a reporté à la figure 1 l'erreur d'approximation pour $n = 10^k$ et $k = 0, 1, 2, \ldots, 14$, calculée en norme IEEE double précision. Expliquer les résultats observés.

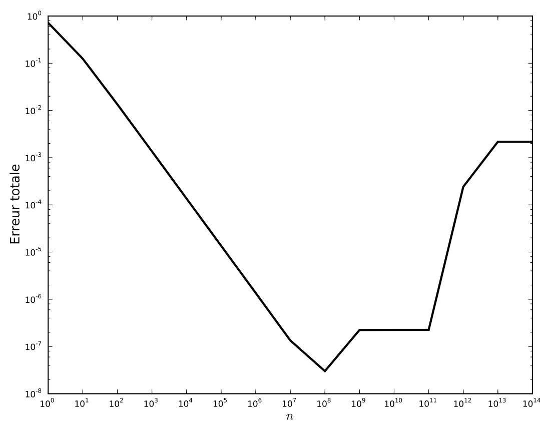


Figure 1: Graphe logarithmique de $|n \log(1 + 1/n) - 1|$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

37. Effectuer l'opération suivante en arithmétique flottante à 5 chiffres en utilisant l'arrondi: $e \times (\pi - \frac{2}{3})$ avec $e \simeq 2{,}718\,282$ et $\pi \simeq 3{,}141\,593$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

38. Sur un système en base 10 capable de représenter les nombres sur 5 chiffres seulement, le nombre 1 est représenté par $1{,}0000 \times 10^0$. Quel sera le résultat de l'opération $1 + 10^5$ sur ce système ?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

39. Soit une calculatrice travaillant en arithmétique flottante à 3 chiffres dans la mantisse et utilisant l'arrondi. Faire les différentes étapes suivies par cette calculatrice pour évaluer l'expression suivante:
$$A \times (B - C) \quad \text{avec} \quad A = 0{,}333\,79,\; B = 2{,}71828 \;\text{ et }\; C = \frac{1}{9}.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

40. En arithmétique exacte, vérifier que

$$\begin{bmatrix} \epsilon & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & -1 \\ 0 & 1+\epsilon^{-1} \end{bmatrix}.$$

Sur un système en base 10 à 5 chiffres, supposons à présent que $\epsilon = 10^{-5}$. Quel est le résultat de la multiplication matricielle ci-dessus en virgule flottante ?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

41. Un programmeur inexpérimenté écrit le programme MATLAB suivant:

```
x = 0.0;
while ( x ~= 1.0 )
  x = x + 0.1
end
```

Décrire le comportement de ce programme. Faire une modification pour qu'il s'exécute selon les intentions du programmeur.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

42. On considère la fonction

$$f(x) = (8+x)^3 - 512.$$

(a) Sans modifier la forme algébrique de $f(x)$, calculer $f(0{,}0001)$ en arithmétique flottante à 5 chiffres en utilisant l'arrondi. Comparer avec la valeur fournie par votre calculatrice lorsque vous utilisez le maximun de chiffres significatifs et commenter les résultats obtenus.

(b) Trouver une expression de $f(x)$ qui soit algébriquement équivalente à celle proposée plus haut et qui vous permettra de calculer $f(0{,}0001)$ en arithmétique flottante à 5 chiffres avec plus de précision. Vérifier vos calculs.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

43. Pour des valeurs de $x \in [10^5, 10^6]$, indiquer la source potentielle d'erreur lors du calcul de l'expression $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}$ en arithmétique flottante (avec au moins 8 chiffres) et suggérer une façon d'estimer la valeur de cette expression qui soit numériquement plus stable.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

44. L'évaluation de l'expression

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} - (e^x - e^{-x})$$

peut causer une élimination des chiffres significatifs.

(a) Donner la liste de toutes les *opérations risquées* et proposer une autre façon d'évaluer cette fonction.

(b) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

45. En supposant que $x^* = 2,318\,309\,886$ possède 4 chiffres significatifs. Combien de chiffres significatifs y aura-t-il pour $f(x^*) = \sin(x^*) \simeq 0,733\,381$?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

46. Estimer l'erreur commise dans l'évaluation de la fonction $f(x, y, z) = -xyz$ au point $x^* = 1,260$, $y^* = 0,5 \times 10^{-3}$ et $z^* = 12,93$, où tous les chiffres donnés sont significatifs. Indiquer le nombre de chiffres significatifs du résultat.
Référence: A. Fortin, chap. 1, no. 22(b)
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

47. Soit $x = 0,12345 \times 10^{-4}$ un nombre qui possède 3 chiffres significatifs et le nombre $y = 0,67890 \times 10^2$ est tel que $\Delta y \leq 0,7$. En évaluant l'expression $(x+1)y^2$, combien de chiffres significatifs obtiendrez-vous?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

48. Le volume d'un cylindre de hauteur $H = 5$ m et de rayon $R = 1,01$ m est donné par

$$V = \pi R^2 H.$$

Si H est connue à 2% près et que R possède 2 chiffres significatifs, calculer la valeur de V correspondante et donner le nombre de chiffres significatifs.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

49. La période T d'un pendule simple de longueur $L = 1$ m en un endroit où la constante $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$ est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Si L est connue à $0,1\%$ près et tous les chiffres de g sont significatifs, calculer la valeur de T correspondante et indiquer ses chiffres significatifs.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

50. En supposant que $x^* = 2,318\,309\,886$ possède 4 chiffres significatifs. Combien de chiffres significatifs y aura-t-il pour $f(x^*) = \sin(x^*) \simeq 0,733\,381$?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

51. Soit le polynôme de degré 2

$$f(x) = x^2 - \left(10^4 + 10^{-4}\right)x + 1,$$

dont les racines sont 10^4 et 10^{-4}. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de trouver exactement ces racines en arithmétique flottante à 7 chiffres en utilisant l'arrondi.
Note: Pour répondre à cette question, le calcul des racines en arithmétique flottante n'est ni exigé, ni nécessaire).
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

52. Dans un programme MATLAB on retrouve la ligne suivante:

```
p=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e;
```

Cette expression requiert 10 multiplications. Trouver une expression équivalente qui nécessite seulement 4 multiplications.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

53. On désire évaluer l'expression

$$\frac{(3-2\alpha^2)\arcsin(\alpha) - 3\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^5},$$

où $\alpha = 0,818\,191\,910 \times 10^{-1}$ (cf. Lab 2, Question 3).
Indiquer la source potentielle d'erreur due à l'arithmétique flottante et suggérer une approximation de cette expression qui soit numériquement plus stable. **Ne pas la calculer**.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

54. Il est souvent possible de limiter les erreurs dues à l'arithmétique flottante en exprimant différemment une expression. Pour les expressions suivantes, indiquer la source potentielle d'erreur et suggérer une expression équivalente qui est numériquement plus stable:
   (a) $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$;
   (b) $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{100\,000^4}$;
   (c) $x^2 - y^2$;
   (d) $\log(x - \sqrt{x^2-1})$ où $x \gg 1$. Votre nouvelle formulation a un second avantage. Lequel? *Indice : utiliser* $x = (x+1)/2 + (x-1)/2$.

   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

55. (a) Obtenir le développement de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ autour de $x_0 = 0$.
   (b) Utiliser ce développement de Taylor pour évaluer les quantités $\sqrt{1,0001}$ et $\sqrt{0,9999}$. On notera q_1 et q_2 les approximations obtenues.
   (c) Donner les valeurs de $\mathrm{fl}(q_1)$ et $\mathrm{fl}(q_2)$ en arithmétique flottante à 3 chiffres en utilisant l'arrondi.
   (d) évaluer l'expression $\sqrt{1,0001} - \sqrt{0,9999}$ en arithmétique flottante à 3 chiffres en essayant de réduire au maximun les erreurs dues à l'arithmétique flottante. Comparer votre résultat avec la valeur exacte de $\sqrt{1,0001} - \sqrt{0,9999}$ obtenue à l'aide de votre calculatrice.

   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

56. (a) Calculer le développement de Taylor d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré du polynôme et donner l'expression analytique du terme d'erreur.
   (b) À l'aide de ce développement, donner une approximation de $\ln(1,1)$. Par comparaison avec la valeur exacte de $\ln(1,1) = 0,0953101798$, donner le nombre de chiffres significatifs de l'approximation.
   Par quel facteur approximatif l'erreur obtenue serait-elle reduite, si on évaluait $\ln(0,975)$ à l'aide du développement de Taylor obtenu en (a) ? (**Ne pas faire le calcul de l'erreur**).
   (c) Calculer le développement de Taylor de degré 2 de la fonction $g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ autour de $x_0 = 0$.
   Sachant que $(1+\frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$, montrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

(d) Il est souvent possible de limiter les erreurs dues à l'arithmétique flottante en exprimant différemment une expression. Pour de grandes valeurs de n, indiquer la source potentielle d'erreur pour $(1 + \frac{1}{n})^n$ et suggérer une façon d'évaluer ou d'approcher cette expression qui soit numériquement plus stable.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Interpolation

Interpolation polynomiale

57. On souhaite faire la conception d'un virage d'une voie de chemin de fer entre les points $(0\,,\,0)$ et $(1\,,\,1)$. Le virage sera décrit par une courbe de la forme $y = f(x)$ satisfaisant

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0; \\ f(1) & = & 1; \\ f'(0) & = & 1/2. \end{array}$$

On veut approcher la courbe $y = f(x)$ par un polynôme dans l'intervalle $[0\,1]$.

(a) Quel est le degré minimal que ce polynôme devra avoir pour vérifier toutes les conditions.

(b) Calculer ce polynôme.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

58. Il existe un unique polynôme $p(x)$ de *degré 2 ou moins* qui est tel que $p(0) = 0$, $p(1) = 1$ et $p'(\alpha) = 2$ pour toute valeur de α dans l'intervalle $[0, 1]$, sauf pour une valeur de $\alpha = \alpha_0$. Déterminer α_0 et donner l'expression du polynôme pour $\alpha \neq \alpha_0$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Interpolation de Lagrange

59. Soit les trois points $q_1 = (0\,,\,1)$, $q_2 = (\pi/16\,,\,\cos(\pi/16))$ et $q_3 = (\pi/8\,,\,\cos(\pi/8))$ de la fonction $f(x) = \cos(x)$.

(a) Obtenir à l'aide de l'interpolation de Lagrange, le polynôme de degré 2 qui passe par les 3 points et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

(b) Calculer le développement de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = \cos(x)$ autour de $x_0 = 0$ et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

(c) Sachant que $f'(0) = 0$, calculer le polynôme de dégré 2, passant par les points q_1 et q_3 dont la dérivée en $x = 0$ est égale à 0 et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

(d) Des trois approximations $\cos(\pi/32)$ que vous avez obtenues, qu'elle est la plus précise? Pourquoi?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

60. Les fonctions de Lagrange *linéaires* $\varphi_{i-1}(x)$ et $\varphi_i(x)$, utilisées pour l'interpolation de Lagrange sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, possèdent des propriétés bien connues.

i) Tracer sur un même graphique le graphe de $\varphi_{i-1}(x)$ et de $\varphi_i(x)$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

ii) Vérifier, sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, que

$$\varphi_{i-1}(x) + \varphi_i(x) = 1.$$

iii) Vérifier, sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, que

$$x_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + x_i\varphi_i(x) = x.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

61. En relevant toutes les 10 secondes la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique, on a obtenu

t	0	10	20	30
v	2,00	1,89	1,72	1,44

(a) Trouver une approximation de la vitesse en $t = 15$ via un polynôme interpolant de degré 2 ;

(b) Répéter l'opération avec un polynôme de degré 3.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

62. Le tableau suivant présente la concentration de la médianone en fonction du temps, en présence de 5% d'agent complexant, lorsque exposer à l'ultra violet:

Temps (min)	Médianone (10^{-5}mol/l)
10	5,15
20	5,11
30	5,06
40	5,00

(a) Estimer la concentration de la médianone en 10^{-5}mol/l à 35 minutes en utilisant le polynôme de Lagrange de *degré 2* passant par les 3 derniers points du tableau.

(b) Est-il possible d'obtenir une meilleure approximation de la concentration de la médianone en 10^{-5}mol/l à 35 minutes en utilisant le polynôme de Lagrange de *degré 2* passant par les 3 premiers du tableau? Justifier votre Solution. **(Ne pas calculer cette nouvelle approximation.)**

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

63. Le tableau suivant présente la valeur de la capacité calorique du méthylcyclohexane en fonction de la température :

T (K)	Cp (kJ/kg K)
150	1,426
160	1,447
170	1,469
180	1,492
190	1,516
210	1,567
230	1,627
250	1,696
270	1,770

(a) Donner un système d'équations algébriques linéaires qui nous permettrait d'obtenir un polynôme d'interpolation de *degré 3* passant par les quatre premiers points du tableau (ne pas résoudre le système linéaire).

(b) Estimer la capacité calorique du méthylcyclohexane à 179 K en utilisant un polynôme de Lagrange de *degré 1*.

(c) Estimer la capacité calorique du méthylcyclohexane à 179 K en utilisant un polynôme de Lagrange de *degré 2* passant par les 3 premiers points du tableau.

(d) Comparer les résultats obtenus en (b) et en (c). Commenter.

(e) Est-ce que le polynôme obtenu à l'aide du système linéaire de la sous-question (a) pourrait donner des résultats plus précis qu'un polynôme de Lagrange passant par les quatre premiers points du tableau? Justifier votre Solution.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

64. Le tableau suivant présente la conductivité thermique de la vapeur d'acetone en fonction de la température :

T ($^\circ F$)	k (Btu/hr ft °F)
32	$0,0057$
115	$0,0074$
212	$0,0099$
363	$0,0147$

(a) Estimer la conductivité thermique de l'acetone à 300 °F en utilisant le polynôme de Lagrange de *degré 2* passant par les 3 derniers points du tableau.

(b) Estimer la température en °F qui correspond à la conductivité thermique $k = 0,008$ Btu/hr ft °F en utilisant un polynôme de Lagrange de *degré 2* passant par les 3 derniers points du tableau.

Note: Il n'est pas necéssaire de simplifier l'expression des polynômes de Lagrange.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

65. Soit la fonction $f(x) = 2xe^{-(4x+2)}$ définie sur l'intervalle [0,2 , 1].

(a) Utiliser la valeur de la fonction aux points $x = 0,2$ et $x = 1$ et employer la méthode de Lagrange afin de trouver le polynôme passant par ces points.

(b) En vous servant du polynôme obtenu en (a), calculer une approximation de $f(0,5)$ et indiquer ses chiffres significatifs.

(c) Trouver la coordonnée x pour laquelle l'erreur d'interpolation du polynôme obtenu en (a) est maximale dans l'intervalle $[0,2\,,\,1]$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

66. Lors de la bromuration du m-xylène à 17 °C, la concentration de brome en fonction du temps au début de la réaction varie de la façon suivante:

Temps (min)	[Brome] (g mol/dm^3)
0,00	0,3335
2,25	0,2965
4,50	0,2660

(a) Obtenir le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par ces points;

(b) Estimer la concentration de brome après 3 secondes (**attention aux unités**);

(c) Obtenir le système linéaire nécessaire pour calculer le polynôme passant par ces mêmes points en utilisant la méthode de la matrice de Vandermonde.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

67. Nous voulons approximer la fonction $f(x) = \ln x$ à l'aide d'un polynôme d'interpolation de *degré 9* pour des points de collocation équirépartis sur l'intervalle $[1, 2]$. Donner une borne de l'erreur commise. était-ce une bonne idée?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

68. Soit $f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$, où x est en radians.

(a) Déterminer le polynôme de degré 2 qui interpole la fonction $f(x)$ en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ et $x_2 = \pi$.

(b) Estimer la valeur de $f(\frac{\pi}{4})$ en utilisant le polynôme trouvé en (a).

(c) Donner une borne supérieure de l'erreur commise en (b). (**Ne pas calculer l'erreur exacte**).

(d) Au lieu d'utiliser le polynôme calculé en (a), on décide d'interpoler la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$ en $x_i = i\frac{\pi}{n}$ pour $i = 0, \cdots, n$ par une fonction linéaire par morceaux. Cette fonction s'obtient en reliant chaque paire de points consécutifs, $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, par un segment de droite. Quel doit être le nombre n de sous-intervalles pour que l'erreur d'interpolation (en valeur absolue) soit partout inférieure à 10^{-4}?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Interpolation de Newton

69. Soit $f(x)$ une fonction qui passe par les points $q_1 = (0\,,\,3)$, $q_2 = (2\,,\,-1)$ et $q_3 = (5\,,\,8)$.

(a) À l'aide de la *formule de Newton*, trouver le polynôme d'interpolation de degré 2 qui passe par les points q_1, q_2 et q_3 et proposer une approximation de $f(3)$.

(b) Sachant que $f(6) = 7$, donner une approximation de l'erreur commise en (a).

(c) On sait aussi que $f'(0) = 6$. Calculer le polynôme d'interpolation de degré minimal passant par les points q_1, q_2 et q_3, dont la dérivée en $x = 0$ est égale à 6.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

70. On considère la table de différences divisées suivante:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$
1,9	0,94 630			
		-0,127 975		
1,5	0,99 749		?	
		-0,314 725		?
2,3	0,74 571		?	
		-0,795 824		
2,7	0,42 738			

(a) Completer la table.

(b) En vous servant de la table de différences divisées, calculer une approximation de $f(1,8)$ en utilisant le polynôme de Newton passant par les 3 premiers points.

(c) Donner une estimation de l'erreur d'interpolation en $x = 1,8$ et en déduire le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue en (b).

(d) Sachant que $f(x) = \sin(x)$, calculer une borne supérieure de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation en $x = 1,8$.

(e) Quel polynôme est le plus précis, celui trouvé en (b), ou le polynôme de Lagrange passant par $f(x)$ en $x =$ 1,5; 1,9 et 2,3? Justifier votre reponse.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

71. Le tableau 3 contient de l'information sur une fonction $f(x)$.

Table 1:

x	$f(x)$
1,0	0,000 000
1,5	0,405 465
2,5	0,916 291
3,0	1,098 612
3,5	1,252 763
4,0	1,386 294
5,0	1,609 438
6,0	1,791 760

(a) Trouver le polynôme d'interpolation de degré le plus bas possible, de telle sorte que l'erreur de l'approximation de $f(3,1)$ soit inférieure à $0,5 \times 10^{-3}$.

(b) Donner l'expression analytique de l'erreur de l'expression calculée en (a).

Référence: A. Fortin, chap. 5, no. 25
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

72. Une voiture roulant à $60km/h$ accélère au temps $t = 0s$ et sa vitesse v (en km/h) est mesurée régulièrement:

N.B.: Attention aux unités utilisées pour chacune des variables de ce problème.

(a) En utilisant le meilleur polynôme de degré 2 possible, obtenir une approximation de la vitesse (en km/h) en $t = 1,2s$.

$t_i[s]$:	0,0	0,7	1,4	2,1	2,8
$v_i[km/h]$:	60,0	72,4	81,5	87,2	95,9

(b) Obtenir l'expression analytique de l'erreur commise en (a).

(c) Obtenir une approximation de cette erreur.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

73. On considère la fonction $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ dont les valeurs sont consignées dans la table suivante:

x	$\mathrm{erf}(x)$
0,00	0,0000000
0,05	0,0563720
0,10	0,1124629
0,15	0,1679960
0,20	0,2227026

et on *cherche* $\bar{x}$ tel que $\mathrm{erf}(\bar{x}) = 0.1569460$.

(a) Déterminer un polynôme d'interpolation de degré 2 qui permet de calculer une approximation la plus précise possible de $\bar{x}$. Calculer cette approximation.

(b) Donner l'expression analytique du terme d'erreur associée à l'approximation trouvée en (a).

(c) Donner une approximation de cette erreur.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

74. Pour une fonction aléatoire X suivant une loi normale, la probabilité que X soit inférieure ou égale à x (notée $P(X \le x)$) est donnée par la fonction

$$P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Comme la fonction $e^{-t^2/2}$ n'a pas de primitive, on calcul cette probabilité pour différentes valeurs de x (par des méthodes que nous verrons au prochain chapitre) et l'on garde les résultats dans les tables comme celle-ci

x	$P(X \le x)$	x	$P(X \le x)$
1,0	0,841 34	1,3	0,903 20
1,1	0,864 33	1,4	0,919 24
1,2	0,884 93		

À l'aide de cette table, obtenir une approximation de $P(X \le 1{,}05)$. On choisira le degré du polynôme de telle sorte que l'approximation de l'erreur absolue commise soit inférieure à $0{,}5 \times 10^{-5}$.
Référence: A. Fortin, chap. 5, no. 15
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

75. Le temps t requis pour qu'une voiture accélère jusqu'a une vitesse v à partir d'une vitesse initiale de $8m/s$ est donné dans le tableau suivant:

(a) évaluer le temps requis pour que la voiture atteigne $18m/s$. On utilisera un polynôme de degré 2 en s'assurant de la plus grande précision possible.

$v[m/s]$:	8	11	15	20
$t[s]$:	0,0	1,6	3,2	4,8

(b) Donner une estimation de l'erreur commise en (a).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

76. En course à pied sur route, on utilise des modèles d'interpolation pour estimer, à partir de performances (temps) qu'un coureur a déjà réalisées sur certaines distances, les performances qu'il pourrait réaliser sur d'autres distances. En fait, on cherche à approcher la fonction $t(x)$ qui indique le temps en secondes que le coureur mettrait pour parcourir x mètres. Dans cette question, on considère un coureur dont les performances sont indiquées dans le tableau suivant:

x (en mètres)	0	100	1500	10000
$t(x)$ (en secondes)	0	13	245	1980

(a) Utiliser un polynôme d'interpolation de degré 2 pour estimer la performance que devrait réaliser ce coureur sur une distance de 5000 m. Donner l'approximation la plus précise possible.

(b) Trouver une approximation de l'erreur commise en (a).

(c) Au lieu d'utiliser un polynôme d'interpolation pour approcher $t(x)$, on pourrait utiliser une fonction logarithmique d'interpolation de la forme

$$f(x) = a + b \ln c(x - d)$$

où a, b, c et d sont des paramètres à déterminer. Proposer une démarche pour calculer les valeurs de ces quatre paramètres. Ne pas résoudre.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Splines cubiques

77. On a obtenu la *spline cubique naturelle* $S(x)$ passant par les points $(0,0)$, $(2,8)$ et $(3,27)$ qui sont situés sur la courbe du polynôme $p(x) = x^3$. Aurons-nous une erreur d'interpolation dans l'intervalle $[0\,,\,3]$? Pourquoi?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

78. Soit $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$, des points d'interpolation d'une fonction $f(x)$. Pour calculer une spline cubique qui passe par ces $n+1$ points, on doit résoudre un système linéaire de $n+1$ inconnues (les dérivées secondes f_i'' de la spline cubique aux points d'interpolation) et $n-1$ équations. Pour obtenir une solution unique, il faut ajouter deux équations. Quelles seraient ces deux équations si on voulait imposer les valeurs f_0' et f_n' des dérivées premières aux extrémités de la spline cubique?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

79. On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \in [0\,,\,1]; \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c & \text{si} \quad x \in [1\,,\,3]. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a, b et c pour que la fonction $f(x)$ soit une spline cubique. Est-ce que la spline obtenue est naturelle?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

80. On désire faire passer une *spline cubique naturelle* par les points suivants:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,0	1,000 000
1	0,5	1,127 626
2	1,0	1,543 081
3	1,5	2,352 409
4	2,0	3,762 196

En résolvant le système linéaire requis, on a trouvé:

i	x_i	f''_i
0	0,0	0,000
1	0,5	1,432
2	1,0	1,178
3	1,5	3,308
4	2,0	0,000

(a) Obtenir une approximation de $f(0,75)$ à l'aide de cette spline.

(b) Toujours en se servant de cette spline, on veut obtenir une approximation de $f'(1,0)$. On peut donc choisir entre le polynôme $p_2(x)$ défini dans l'intervalle $[\frac{1}{2}\,, 1]$ et le polynôme $p_3(x)$ défini dans l'intervalle $[1\,, \frac{3}{2}]$. Lequel de ces 2 polynômes donnera la meilleure approximation de $f'(1,0)$? Expliquer pourquoi. *Ne pas calculer cette approximation.*

(c) Toujours en vous servant de cette spline, obtenir une approximation de $f''(1,5)$.

Référence: A. Fortin, chap. 5, no. 26
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

81. Soient les points d'interpolation du tableau suivant :

x	$f(x)$
1,00	0,765 789 39
1,02	0,795 366 78
1,04	0,822 688 17
1,06	0,847 522 26

(a) Utiliser l'interpolation par splines cubiques naturelles afin d'estimer $f(1,03)$.

(b) Sachant que $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$, déterminer le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue en (a).

(c) Dire si l'énoncé suivant est vrai ou faux, et commenter: « *L'approximation par splines cubiques naturelles est exacte pour tous les polynômes de degré 3, peu importe le nombre de points d'interpolation utilisés* ».

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

82. Soit une fonction $f(x)$ dont on connaît la valeur en certains points:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,0	1,0
1	1,0	2,0
2	2,0	5,0
3	3,0	10,0

Pour chacune des conditions suivantes:

(a) $f_0'' = f_1''$ et $f_3'' = f_2''$;

(b) $f_0' = 1$ et $f_3' = 5$,

donner le système linéaire 2×2 (sans le résoudre) permettant de calculer la *spline cubique* qui interpole la fonction $f(x)$ aux points $(x_i, f(x_i))$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

83. On désigne par $S(x)$ la spline cubique naturelle qui passe par les points $(-1\,,\,1)$, $(0\,,\,0)$ et $(1\,,\,1)$ de la fonction $f(x) = x^2$. Dans les intervalles $[-1\,,\,0]$ et $[0\,,\,1]$, cette spline peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} S_1(x) = a_1 + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 & \text{pour} \quad x \in [-1\,,\,0], \\ S_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 & \text{pour} \quad x \in [0\,,\,1]. \end{cases}$$

(a) Déterminer la valeur de a_2.

(b) Deux étudiants ont essayé de trouver les valeurs de tous les paramètres. L'étudiant X a trouvé

$$\begin{cases} S_1(x) &=& 1 - \frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^3; \\ S_2(x) &=& \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3. \end{cases}$$

tandis que l'étudiant Y a obtenu

$$\begin{cases} S_1(x) &=& -x; \\ S_2(x) &=& x. \end{cases}$$

Un seul des deux étudiants a trouvé les bonnes valeurs. De qui s'agit-il? **Justifier votre réponse. (Ne pas calculer la spline).**

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

84. On désigne par

$$S(x) = \begin{cases} 28 + 25x + 9x^2 + x^3 & \text{si} \quad -3 \leq x \leq -1; \\ 10x + 21 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \end{cases}$$

une fonction qui passe par les points de coordonnées $(-3\,,\,7)$, $(-1\,,\,11)$ et $(0\,,\,21)$. Expliquer pourquoi la fonction $S(x)$ n'est pas une spline cubique.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

85. Les fractions molaires d'un système acétone-air-eau à l'équilibre vapeur-liquide sont présentées dans le tableau suivant :

i	y_i	x_i
0	0,004	0,002
1	0,008	0,004
2	0,014	0,006
3	0,017	0,008
4	0,019	0,010
5	0,020	0,012

où y et x représentent respectivement les fractions molaires d'acétone dans l'air et d'acétone dans l'eau.

On désire faire passer une spline cubique *naturelle* par ces points. En résolvant le système linéaire requis, on a trouvé:

i	y_i	x_i''
0	0,004	0,000
1	0,008	−95,288
2	0,014	150,961
3	0,017	−48,523
4	0,019	1016,174
5	0,020	0,000

(a) En supposant que l'eau et l'air sont immiscibles, évaluer la fraction d'acétone dans l'eau correspondant à une fraction d'acétone dans l'air égale à 1%.

(b) Donner les systèmes linéaires (sans les résoudre) permettant de calculer les splines cubiques satisfaisant:

i) $f_0'' = a$ et $f_5'' = b$, pour a et b donnés;

ii) $f_0'' = f_1''$ et $f_5'' = f_4''$;

iii) $f_0' = a$ et $f_5' = b$, pour a et b donnés.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

86. (a) On interpole la fonction $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ sur l'intervalle $[0,1]$ aux 4 points équidistants $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ et $x_3 = 1$ par une spline cubique naturelle $y(x)$. Doit-on s'attendre à commettre une erreur d'interpolation lorsque l'on approche $f(\frac{1}{2})$ par $y(\frac{1}{2})$? Expliquer (ne pas calculer y).

(b) Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} a - 2x + x^3 & \text{si } x \in [0,1] \\ 4 - bx + cx^2 + dx^3 & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Déterminez les constantes a, b, c, et d de sorte que $f(x)$ soit la spline cubique naturelle passant par les points $(0,2)$, $(1,1)$ et $(2,4)$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

87. On se propose de construire un système linéaire permettant de calculer les coefficients de la spline *quadratique* passant par les points $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,1,2,...,n$ et qui est 1 fois différentiable. On supposera que les points sont équidistants ($x_i - x_{i-1} = h$). On suivra les étapes suivantes:

(a) Dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on utilise un polynôme de degré 2 ($P_i(x)$). Donner le nombre total d'inconnues du système et donner les contraintes que ces inconnues doivent vérifier.

(b) Puisque la spline est quadratique, en dérivant une fois, on obtient un polynôme de degré 1 dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Exprimer ce polynôme par la méthode de Lagrange en prenant f'_{i-1} et f'_i comme valeur de la dérivée en $x = x_{i-1}$ et en $x = x_i$.

(c) Intégrer l'équation obtenue en (b) et déterminer la valeur de la constante d'intégration.

(d) Obtenir le système linéaire dont les inconnues sont les f'_i en vous servant des contraintes non utilisées.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

88. On désire interpoler les données

t	0	1	2
y	2	1	4

par une spline *quadratique* $y(t)$. Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les deux branches de cette spline.

(a) écrire le système d'équations permettant de déterminer y_1 et y_2 de sorte que y possède une dérivée première continue. **Ne pas le résoudre.**

(b) Montrer que si on impose à y d'avoir une dérivée seconde continue, on a nécessairement $y_1 = y_2$. Comment cela s'explique-t-il ?

(c) Déterminer y_1 et ajouter une nouvelle valeur à interpoler en $t_4 = 3$ de sorte que

i. Il existe une spline quadratique dont la dérivée seconde est continue qui interpole les (t_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$;

ii. Il n'existe aucune telle spline quadratique.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

89. On a mesuré la vitesse d'un vehicule (en km/h) toutes les 5 secondes. On a utilisé la fonction Matlab *polynew* afin de calculer la table de différences divisées. Voici les résultats:

```
>> temps = [ 0 5 10 15];
>> vitesse = [55 60 58 54];
>> format rat;
>> [c,a,D] = polynew(temps, vitesse,[])
c =
    1/150         -6/25        61/30     55
a =
    55              1          -7/50      1/150
D =
    55              0            0          0
    60              1            0          0
    58            -2/5         -7/50        0
    54            -4/5         -1/25        1/150
```

N.B.: Attention aux unités de chaque variable dans cet exercice.

(a) Trouver l'approximation de la vitesse (en km/h) à $t = 2,5s$ avec le polynôme de Newton de degré 2.

(b) Donner une approximation de l'erreur commise sur la vitesse calculée en (a).

(c) Sachant que $f_0' = 1$ et $f_3'' = -4/5$, donner l'expression du système linéaire permettant de calculer la spline cubique passant par les 4 points (ne pas résoudre).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

90. On a mesuré toutes les 10 secondes la vitesse (en m/s) d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique. On a calculé à l'aide de ces données la table de différences divisées suivante:

i	t_i	$f(t_i)$	$f[t_i, t_{i+1}]$	$f[t_i, \cdots, t_{i+2}]$	$f[t_i, \cdots, t_{i+3}]$
0	0	2,00			
			$-1,1 \times 10^{-2}$		
1	10	1,89		?	
			$-1,7 \times 10^{-2}$		?
2	20	1,72		?	
			$-2,8 \times 10^{-2}$		
3	30	1,44			

(a) Compléter la table.

(b) Trouver l'approximation de la vitesse (en m/s) à $t = 15$ s avec le polynôme de Newton de degré 2.

(c) Donner une approximation de l'erreur commise sur la vitesse calculée en (b).

(d) Sachant que $f_0' = 0$ (**dérivée première nulle**) et $f_3'' = 1$, donner l'expression du système linéaire permettant de calculer la spline cubique passant par les 4 points (**ne pas résoudre**).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

91. La courbe des puissances classées d'un service d'électricité, comme Hydro-Québec, représente la proportion de l'année où la demande d'électricité atteint ou dépasse un niveau de puissance donné. Plus la puissance est grande, plus petite est la proportion de l'année où la demande dépasse cette valeur. **Cette courbe est donc par définition décroissante**.

Pour une année donnée, on dispose des données et de la table de différences divisées suivantes:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	0,0	30,0			
			-10,0		
1	0,1	29,0		-200,0	
			-50,0		566,667
2	0,2	24,0		83,33	
			-16,67		-87,30
3	0,5	19,0		22,22	
			-3,33		-91,27
4	0,8	18,0		-41,67	
			-20,0		-1316,67
5	0,9	16,0		-700,0	
			-160,0		
6	1,0	0,0			

(a) Donner une approximation de $f(0{,}3)$ à l'aide du *polynôme d'interpolation de Newton* de degré 3 passant par les 4 premiers points. Est-ce que cette approximation vous semble acceptable? Justifier votre réponse.

(b) Donner une approximation de l'erreur d'interpolation commise en (a) et indiquer les chiffres significatifs de l' approximation de $f(0{,}3)$ obtenue en (a).

(c) Donner les expressions des polynômes de Lagrange $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, et $L_3(x)$ de degré 3 qui permettent de calculer une approximation de $f(0{,}3)$. Cette approximation doit être la plus précise possible. (**Ne pas calculer cette approximation**).

(d) Donner l'expression du système linéaire de 2 équations à 2 inconnues permettant de calculer la spline cubique naturelle passant par les 4 premiers points.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

92. Soit $f(x)$ une fonction qui est connue seulement aux points suivants: $(0,4)$, $(2,6)$, $(3,-2)$, $(5,-6)$ et $(6,1)$. On cherche à trouver une approximation de $f(4)$.

(a) Dans un premier temps, considérons l'utilisation d'un polynôme d'interpolation pour trouver cette approximation.

i. Compléter le tableau des différences divisées:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	4		
		1	
2	6		-3
		-8	
3	-2		2
		-2	
5	-6		3
		7	
6	1		

afin d'être en mesure de calculer $f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$.

ii. Trouver le polynôme d'interpolation qui passe par les points $(0,4)$, $(2,6)$, $(3,-2)$ et $(5,-6)$.

iii. À l'aide de ce polynôme, donner une approximation de $f(4)$ et estimer l'erreur commise.

(b) Dans un deuxième temps, trouver une approximation de $f(4)$ en utilisant une spline naturelle qui passe par les points $(2,6)$, $(3,-2)$ et $(5,-6)$.

(c) Une approximation de la fonction de $f(x)$ pourrait aussi être obtenue en trouvant deux polynômes d'interpolation quadratiques, le premier passant par les trois premiers points $(0,4)$, $(2,6)$ et $(3,-2)$, et le deuxième passant par les trois derniers points $(3,-2)$, $(5,-6)$ et $(6,1)$. Quelle lacune comporterait une telle approximation par rapport à une spline cubique calculée en utilisant les cinq points? Ne faites pas de calculs.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Différentiation et intégration numérique

Différentiation numérique

93. À l'aide de la formule de différence centrée d'ordre 2:
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$
montrer que
$$f''(x) \simeq \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}.$$
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

94. Identifier l'erreur qui a été faite dans le raisonnement suivant et dans un deuxième temps, corriger l'erreur et refaire le raisonnement de façon correcte. Du développement de Taylor, nous avons:
$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1), & \text{pour} \quad \xi_1 \in (x, x+h); \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2), & \text{pour} \quad \xi_2 \in (x-h, x), \end{cases}$$
alors
$$\frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = f''(x) + \frac{h}{6}[f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)]$$
et donc l'ordre de cette approximation de f'' est $\mathcal{O}(h)$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

95. En vous servant des développements de Taylor appropriés, donner *l'ordre de précision* de l'approximation de la dérivée:
$$f'''(x) \simeq \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}.$$
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

96. Soit $f(x)$ une fonction telle que $f(2) = 4$, $f(4) = 2$, $f(6) = 0$ et $f(8) = -5$. Calculer deux approximations d'ordre 2 de $f'(2)$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

97. (a) À l'aide des développements de Taylor appropriés, donner l'expression des deux premiers termes de l'erreur liée à la formule:
$$\frac{f(x+ah) - f(x-bh)}{(a+b)h},$$
permettant de calculer une approximation de $f'(x)$. Dans cette formule, a et b sont des constantes telles que $a + b \neq 0$.

    (b) Déterminer l'ordre de cette approximation en fonction des valeurs de a et b.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

98. On veut utiliser la formule centrée

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \tag{1}$$

pour approcher la dérivée d'une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\max_{a \le x \le b} |f'''(x)| \le M.$$

Supposons que l'utilisation d'un ordinateur produit une erreur $e(x+h)$ et $e(x-h)$ dans l'évaluation de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ respectivement. C'est donc dire que si f^* représente la valeur effectivement calculée,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f^*(x+h) + e(x+h), \\ f(x-h) &= f^*(x-h) + e(x-h); \end{aligned}$$

donc l'erreur totale due à l'utilisation de la formule (1) avec f^* au lieu de f sera

$$f'(x) - \left[\frac{f^*(x+h) - f^*(x-h)}{2h}\right] = \frac{e(x+h) - e(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

avec ξ appartenant à l'intervalle $[a, b]$. Le premier terme représente l'erreur due aux arrondis et le second l'erreur liée à l'approximation.

(a) En supposant que $|e(x+h)| < \epsilon$ et $|e(x-h)| < \epsilon$, montrer que la valeur absolue de l'erreur totale commise est bornée par

$$g(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M.$$

(b) On veut approcher $f'(0,9)$ pour la fonction tabulée suivante:

x	$f(x)$
0,800	0,71736
0,895	0,78021
0,898	0,78208
0,902	0,78457
0,905	0,78643
0,950	0,81342

En vous servant de la formule (1) calculer deux approximations de $f'(0,9)$ en prenant d'abord $h = 0,002$ et ensuite $h = 0,005$. Sachant que la valeur exacte de $f'(0,9) = 0,62161$, calculer les erreurs commises et expliquer les résultats obtenus.

(c) Sachant que $f(x) = \sin(x)$ et que tous les chiffres des approximations de $f(x)$ du tableau sont significatifs, déterminer analytiquement la valeur de h qui donne la meilleure approximation de $f'(0,9)$ en utilisant la formule (1). Il s'agit de trouver analytiquement la valeur de h pour laquelle $g(h)$ sera minimale.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

99. On considère la formule aux différences

$$App(h) = \frac{-f(x+3h) + 4f(x+2h) - 5f(x+h) + 2f(x)}{h^2} \simeq f''(x),$$

une approximation de $f''(x)$.

(a) On dispose des valeurs suivantes de la fonction $f(x)$:

x	$f(x)$
1,0	0,841 471
1,1	0,891 207
1,2	0,932 039
1,3	0,963 558
1,4	0,985 450
1,5	0,997 495
1,6	0,999 574

En vous servant de la formule aux différences $App(h)$, calculer deux approximations de $f''(1,0)$ pour $h = 0{,}1$ et pour $h = 0{,}2$. Sachant que la valeur exacte de $f''(1{,}0) = -0{,}841\,471$, estimer numériquement *l'ordre de précision* de cette formule aux différences.

(b) En vous servant des développements de Taylor appropriés, montrer que

$$App(h) = f''(x) - \frac{11}{12}h^2 f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

et en déduire *l'ordre de précision* de l'approximation $App(h)$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

100. On considère la formule aux différences

$$App(h) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} \simeq f^{(3)}(x),$$

une approximation de la dérivée troisième $f^{(3)}(x)$.

(a) On dispose des valeurs suivantes de la fonction $f(x)$:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,80	0,088 967 97	1,05	0,053 648 07
0,85	0,079 617 83	1,10	0,049 115 91
0,90	0,071 633 24	1,15	0,045 126 35
0,95	0,064 766 84	1,20	0,041 597 34
1,00	0,058 823 53		

En vous servant de la formule aux différences $App(h)$, calculer deux approximations de $f^{(3)}(1)$ et estimer numériquement *l'ordre de précision* de cette formule aux différences sachant que $f^{(3)}(1) = -1,103\,435\,06$.

(b) En vous servant des développements de Taylor appropriés, montrer que

$$App(h) = f^{(3)}(x) + \frac{1}{4}h^2 f^{(5)}(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

et en déduire *l'ordre de précision* de l'approximation $App(h)$.

(c) Si pour une certaine fonction $f(x)$ dont on connaît la valeur en certains points, on n'obtenait pas l'ordre d'approximation obtenu en (b) quelles pourraient en être les causes?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

101. On considère la formule aux différences arrière

$$f'(x) \simeq \frac{3f(x) - (4+\lambda)f(x-h) + (1+\lambda)f(x-2h)}{(2-\lambda)h} = app_\lambda(h).$$

En vous servant de développements de Taylor de degré approprié, montrer que

$$f'(x) = app_\lambda(h) - \frac{3\lambda}{2(2-\lambda)}hf''(x) + \frac{(4+7\lambda)}{6(2-\lambda)}h^2f'''(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

et déterminer l'ordre de la formule aux différences $app_\lambda(h)$ en fonction des valeurs du paramètre λ.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

102. On considère le θ-schéma

$$f'(x) \simeq (1-\theta)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) + \theta\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right) = App_\theta(h)$$

obtenu à partir d'une combinaison linéaire des formules de différences avant et arrière d'ordre 1. À l'aide de développements de Taylor de degré appropriés, montrer que les 2 premiers termes de l'erreur associée au θ-schéma ($App_\theta(h)$) sont donnés par:

$$\frac{(2\theta-1)h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{6}f'''(x),$$

et en déduire l'ordre de précision du θ-schéma en fonction du paramètre θ.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Quadratures de Newton-Cotes

103. Utiliser la méthode de Simpson 3/8 avec 6 intervalles pour évaluer :

$$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx.$$

Comparer le résultat avec la valeur exacte.
Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 15
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

104. Utiliser la méthode de Boole avec 8 intervalles pour évaluer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)\,dx.$$

Comparer le résultat avec la valeur exacte.
Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 17
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

105. À l'aide d'une certaine méthode d'intégartion numérique, on a évalué $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx$ en utilisant 3 valeurs différentes de h. On a obtenu les résultats suivants.

Valeurs de I	
h	I
0,1	1,001 235
0,2	1,009 872
0,4	1,078 979

Compte tenu de la valeur exacte de I, déduire l'ordre de convergence de la quadrature employée.
Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 25
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

106. On veut calculer:

$$\int_{1,8}^{3,4} e^x\, dx,$$

en utilisant la *la méthode des trapèzes composée.* Quel est le nombre minimum d'intervalles qui assurent une approximation de I avec au moins 4 *chiffres significatifs*?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

107. Dire si les énoncés suivants sont vrai ou faux et *justifier votre réponse* en deux ou trois lignes:
   (a) Une formule de quadrature d'ordre n est toujours plus précise qu'une autre formule de quadrature d'ordre $n+1$.
   (b) On peut utiliser la méthode de Simpson 3/8 avec 6 intervalles pour évaluer:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(x)}\, dx.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

108. Définissons la fonction

$$F(x) = \int_0^x te^{-t}\, dt.$$

Combien faudrait-il de sous-intervalles, à l'aide de la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ composée, pour obtenir une approximation de $F(1)$ avec une précision de $0,5 \times 10^{-8}$ (répondre sans calculer la valeur analytique de $F(x)$) ?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

109. On calcule

$$I = \int_1^{\alpha} \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x) \right) dx,$$

pour $\alpha > 1$, à l'aide d'une *formule de Simpson* $\frac{3}{8}$ *composée* ($3n$ sous intervalles) et on désigne par S_n le résultat obtenu. Laquelle de ces confirmations est vraie et expliquer pourquoi:

i) $S_n - I \geq 0, \quad \forall n$;

ii) $S_n - I \leq 0, \quad \forall n$;

iii) le signe de $S_n - I$ dépend de n.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

110. Certains points du profil d'un tremplin de ski sont donnés dans le tableau suivant

x (en m)	$H(x)$ (en m)	x (en m)	$H(x)$ (en m)
0	100	60	12,9488
10	84,7135	70	10
20	76,2285	80	12,0038
30	49,5312	90	18,2018
40	33,5646	100	27,3379
50	20,9830		

où x (en m) représente la distance horizontale par rapport à la plateforme de départ et $H(x)$ (en m) la hauteur du tremplin en x.

La longueur du tremplin est définie par

$$L = \int_0^{100} \sqrt{1 + (H'(x))^2}\, dx.$$

Calculer une valeur approchée de L à l'aide de la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ simple. Utiliser des approximations d'ordre 2 pour évaluer les dérivées.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

111. Une tige métallique se déforme lorsque soumise à une charge axiale. Les mesures expérimentales ont donné les résultats pour les contraintes s en fonction du taux de déformation e:

e	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$s(10^3 lb/po^2)$	0	37,5	43,0	52,0	60,0	55,0

Les mesures sont prises jusqu'à la rupture de la tige (dans ce cas $e = 0,25$). L'aire sous la courbe $(s(e))$ est alors une mesure de l'énergie par unité de volume nécessaire pour provoquer la rupture. Comment pourrait-on calculer cette aire avec un *maximun de précision*? Justifier le choix de votre méthode (**ne pas calculer l'aire**).
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

112. Trouver une approximation d'ordre le plus élevé possible de

$$\int_{-1}^{1} \sin(x)^2 \cos(x) \mathrm{d}x$$

en utilisant 7 nœuds équidistants : $x_0 = -1$, $x_6 = 1$ et $x_{i+1} = x_i + h$ où $h = \frac{1}{3}$. Quel est l'ordre de votre approximation ? Quel est son degré de précision ?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

113. Soit une fonction $f(x)$ donnée. En approchant l'intégrale $\int_1^2 f(x)\,dx$ par une méthode d'intégration quelconque, on a obtenu les résultats suivants pour trois valeurs de pas différentes:

h	Approximation
0,25	0,694384
0,5	0,703023
1,0	0,772127

Quel est l'ordre de la méthode utilisée? Justifier.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

114. Soit l'approximation

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{4}\left(f(x_0) + 3f(x_0 + \tfrac{2h}{3})\right).$$

(a) Obtenir le développement de Taylor de $f(x_0 + \frac{2h}{3})$ jusqu'à l'ordre 5 et proposer une nouvelle expression du terme de droite.

(b) Obtenir un développement de Taylor d'ordre 5 du terme de gauche.
Suggestion : Poser $f(x) = f(x_0 + (x - x_0))$.

(c) Soustraire les expressions obtenues en (a) et en (b) pour obtenir le premier terme de l'erreur. En déduire l'ordre de précision de la méthode proposée.

(d) Quel est le degré de précision de cette méthode?

Référence : A. Fortin, chap. 6, no. 26
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Quadratures de Gauss

115. Utiliser une méthode numérique pour évaluer:

$$\int_0^2 \ln(x)\,dx.$$

Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 22
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

116. Quelle serait l'erreur d'approximation si l'on utilisait la quadrature de Gauss à 3 points pour évaluer :

$$\int_0^3 (3x^5 + 7x^2 + x + 1)\,dx.$$

Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 23
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

117. Déterminer les poids d'intégration w_1 et w_2 ainsi que le point d'intégration t_2 de sorte que la formule de quadrature dite de Gauss-Radau :

$$\int_1^{-1} f(t)\,dt \simeq w_1 f(-1) + w_2 f(t_2),$$

soit de degré de précision le plus élevé possible. Donner ce degré de précision.
Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 30
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

118. On désire développer une formule d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(x) \log\left(\frac{1}{x}\right) dx \simeq w_1 f(x_1).$$

Déterminer les valeurs des constantes w_1 et x_1 de telle sorte que le degré de précision de cette quadrature soit le plus élevé possible. Donner ce degré de précision.
Rappel:

$$\int_0^1 x^m \log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(m+1)^2} \quad \text{pour} \quad m \geq 0.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

119. Obtenir une formule d'intégration numérique de la forme

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \simeq Af(0) + Bf'(-h) + Cf''(h),$$

qui soit de degré de précision le plus élevé possible.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

120. Evaluer $\int_0^1 e^x\,dx$ par la formule de Gauss à 2 points et déterminer le nombre de chiffres significatifs de votre réponse en la comparant avec la valeur exacte.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

121. Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx.$$

(a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 4 intervalles.

(b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-2}?

(c) Calculer une approximation de I en appliquant la quadrature suivante:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \simeq \tfrac{1}{2} f(-1) + \tfrac{3}{2} f(\tfrac{1}{3})$$

(d) Sachant que le degré de précision de la méthode du trapèze composée est 1, est-il possible d'obtenir avec cette méthode (en utlisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) une approximation qui soit meilleure que celle que l'on peut calculer par la quadrature de la question (c)? Discuter.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

122. Le temps t^θ requis pour qu'une tige métallique fasse un angle θ avec l'horizontale est:

$$t^\theta = \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{8\sin(u) - u}}.$$

Proposer une méthode d'intégration numérique pour estimer le temps $\left(t^{\frac{\pi}{2}}\right)$ requis pour que la tige soit à la verticale (ne pas faire le calcul). Justifier votre choix.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

123. Soit une fonction $f(x)$ connue seulement pour les valeurs de x suivantes:

x	$f(x)$
0	0
1	0
2	6
3	24
4	60

On désire évaluer $I = \int_0^4 f(x)\,dx$ par la quadrature de la forme:

$$\int_0^4 g(x)\,dx \simeq a g(1) + b g(3).$$

(a) Déterminer les valeurs des constantes a et b de sorte que cette quadrature ait un degré de précision aussi élevé que possible. Quel est le degré de précision de cette quadrature?

(b) Estimer la valeur de $I = \int_0^4 f(x)\,dx$ à l'aide de cette quadrature.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

124. On considère l'équation intégrale:

$$x^2 e^{x^2} \phi(x) - 5\int_{-1}^{1} x^2 y^2 \ln(\phi(y))\,dy = 3x^2.$$

En utilisant une formule de *quadrature de Gauss à 2 points*, écrire le système non linéaire résultant de cette discrétisation de l'équation intégrale. Ne pas résoudre.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

125. On désire développer une nouvelle formule d'intégration numérique, dans l'intervalle $[0, 3h]$, qui est de la forme

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx \simeq a f(h) + b f(2h).$$

(a) Déterminer les valeurs des constantes a et b de sorte que cette quadrature ait un degré de précision élevé que possible.

(b) Calculer

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x}\,dx,$$

à l'aide de cette quadrature.

(c) Estimer l'intégrale (b) à l'aide de la formule de Simpson $\frac{1}{3}$ simple.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

126. (a) Quel est le nombre minimum de points que l'on doit utiliser dans une formule de quadrature de Gauss pour évaluer *exactement*:

$$\int_0^2 (x^3 - 7x + 3)^2\, dx.$$

(b) Combien de points seraient nécessaires pour évaluer *exactement*

$$\int_0^2 (x^3 - 7x + 3)^2\, dx.$$

par la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ composée?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

127. Considérons la fonction

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du.$$

(a) Calculer erf(0,5) à l'aide d'une quadrature de Gauss à trois points.

(b) Calculer erf(0,5) à l'aide d'une quadrature simple du trapèze.

(c) Effectuer une majoration de l'erreur absolue commise par cette quadrature et calculer le nombre de chiffres significatifs exacts de votre réponse en (b).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

128. Estimer l'intégrale

$$\int_{-2}^2 e^x\, dx$$

à l'aide de l'intégration de Gauss à 2 points.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

129. Déterminer les poids d'intégration w_1 et w_2 ainsi que le point d'intégration t_2 de sorte que la formule suivante (appelée quadrature de Radau)

$$\int_{-1}^1 f(t)\, dt \simeq w_1 f(-1) + w_2 f(t_2)$$

soit de degré de précision le plus élevé possible. Donner ce degré de précision.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

130. On désire calculer

$$I = \int_{-1}^1 e^{-x^2}\, dx.$$

Comme la fonction e^{-x^2} n'a pas de primitive, il faut utiliser une méthode numérique. Est-il possible d'obtenir avec la méthode des trapèzes composée (en utilisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) une approximation de I qui soit meilleure que celle que l'on peut calculer par la quadrature de Gauss à 2 points? Justifier votre réponse.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

131. Soit $g(t)$ une fonction continue définie sur l'intervalle $[-1\,,1]$. Pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$, la formule de quadrature suivante est considérée :

$$I(g) = \omega_1\, g(-1) + \omega_2\, g(1).$$

(a) Trouver les poids d'intégration ω_1 et ω_2 tels que la formule de quadrature soit de degré de précision le plus élevé possible. Donner ce degré de précision.

(b) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ à l'aide de cette quadrature.

(c) Réécrire la formule de quadrature obtenue en (a) sur l'intervalle $[a\,,b]$ pour intégrer une fonction continue $f(x)$ définie sur cet intevalle. Identifier la formule d'intégration numérique de Newton-Cotes qui est obtenue.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

132. Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} e^{x^2}\, dx.$$

(a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 3 intervalles.

(b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-2}?

(c) Considérons la quadrature de Lobatto:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq w_1\,[f(-1)+f(1)] + w_2\,[f(-x_1)+f(x_1)]\,.$$

Sachant que cette quadrature est exacte pour toutes les fonctions $f(x) = x^p$, avec $p = 1,3,5,\cdots$, déterminer le système d'équations qui doit être résolu (**ne pas résoudre**) pour trouver w_1, w_2 et x_1 pour que la quadrature de Lobatto soit au moins de dégré de précision 5.

(d) Sachant que le degré de précision de la méthode du trapèze composée est 1, est-il possible d'obtenir avec cette méthode (en utilisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) une approximation de I qui soit meilleure que celle que l'on peut calculer par la quadrature de Labatto developpée en (c) (dégré de précision 5 au moins)? Discuter.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

133. Dans une règle de quadrature de Chebychev, tous les poids sont égaux et les nœuds sont choisis de sorte à obtenir une règle de plus haut degré possible. Avec trois nœuds :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx w\,\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)\right).$$

(a) Donnez le système d'équations à résoudre pour déterminer le poids ainsi que les trois nœuds ;

(b) Résoudre ce système ;

(c) Quel est le degré de cette règle ?

(d) Utiliser vos résultats pour calculer une approximation de

$$\int_{-1}^{1} \sin(x)^2 \cos(x) \mathrm{d}x.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

134. On veut calculer

$$\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 + x + 1)\, dx$$

par une formule de quadrature. Quel est le nombre minimal de points d'intégration que l'on doit utiliser pour évaluer cette intégrale exactement.

(a) En utilisant une quadrature de Gauss;

(b) en utilisant la formule de Simpson $\frac{1}{3}$;

(c) en utilisant la formule de Simpson $\frac{3}{8}$;

(d) en utilisant la formule des Trapèzes.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

135. Quelle est l'erreur produite en calculant l'approximation de

$$\int_{-3}^{7} (6x + 11x^5 - 2x^8)\, dx$$

par la quadrature de Gauss à 5 points.
Note: Les valeurs des t_i et w_i pour la quadrature de Gauss à 5 points sont fournies dans l'aide mémoire.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

136. Soient w_i et t_i $(i = 1, 2, \cdots, 10)$ les poids et les points d'intégration de la quadrature de Gauss à 10 points. Que vaut $w_1 + w_2 + \cdots + w_{10}$?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

137. Déterminer les constantes a_0, a_1 et a_2 pour que la formule de quadrature:

$$\int_{-1}^{1} f(t) \simeq a_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + a_1 f(0) + a_2 f\left(\frac{1}{2}\right),$$

soit de degré de précision le plus élevé possible. Donner ce degré de précision.
Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 29
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

138. Soit $g(t)$ une fonction continue définie sur l'intervalle $[-1, 1]$. On choisit trois points d'intégration t_1, t_2 et t_3 tels que $t_1 = -1$, $t_2 = \alpha$ et $t_3 = 1$, où α est un nombre réel donné respectant $|\alpha| < 1$. Pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)\, dt$, la formule de quadrature suivante est considérée:

$$I(g) = \sum_{j=1}^{3} w_j g(t_j) = w_1 g(-1) + w_2 g(\alpha) + w_3 g(1).$$

(a) Trouver les poids d'intégration w_1, w_2 et w_3 en fonction de α tels que la formule de quadrature soit de degré de précision 2.

(b) Trouver ensuite α tel que $I(g) = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ pour tout polynôme $g(t)$ de degré 3.

(c) Réécrire cette formule sur l'intervalle $[a\,,\,b]$ pour intégrer une fonction continue $f(x)$ définie sur cet intervalle. Identifier la formule d'intégration numérique de Newton-Cotes qui est obtenue.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Extrapolation de Richardson

139. Le tableau suivant donne l'altitude d'un objet en chute amortie mesurée à intervalles de 5 secondes :

t_i(s)	0	5	10	15	20	25
y_i(m)	1225,0	1183,76	1040,86	795,94	448,98	0,0

(a) En utilisant un polynôme d'interpolation de degré 2, trouver une approximation de l'altitude en $t = 12$ secondes qui soit la plus précise possible ;

(b) Trouver une approximation d'ordre 1 de *l'accélération* en $t = 25$ secondes ;

(c) Trouver une approximation d'ordre 2 de *l'accélération* en $t = 25$ secondes.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

140. Soit la différence centrée :

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

(a) Obtenir l'ordre de cette approximation en utilisant les développements de Taylor appropriés.

(b) Utiliser cette formule de différences pour obtenir une approximation de $f''(2,0)$ pour la fonction tabulée suivante, en prenant d'abord $h = 0,2$, ensuite $h = 0,1$.

Fonction tabulée			
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,8	1,587 7867	2,1	1,741 9373
1,9	1,641 8539	2,2	1,788 4574
2,0	1,693 1472		

(c) À partir des 2 approximations obtenues en b), obtenir une nouvelle approximation de $f''(2,0)$ qui soit plus précise. Préciser l'ordre de cette nouvelle approximation.

Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 27
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

141. Une voiture roulant à 60 km/h accélère au temps $t = 0$ s et sa vitesse v en km/h est mesurée régulièrement :

Vitesse en fonction du temps					
$t_i[s]$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
$v[km/h]$	60,0	68,4	75,5	82,2	89,4

N.B. Attention aux unités de chaque variable dans cet exercice.

(a) En utilisant le meilleur polynôme de degré 2 possible, obtenir une approximation de la vitesse (en km/h) à $t = 1,2s$.

(b) Obtenir l'expression analytique de l'erreur d'interpolation commise en (a).

(c) En vous servant au besoin plusieurs fois de la différence centrée :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

obtenir une approximation de l'accélération a (en m/s^2) à t = 1,0 s et qui soit la plus précise possible. Donner l'ordre de précision de l'approximation obtenue.

Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 29
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

142. Soit une fonction aléatoire **X** suivant une loi normale. La probabilité que **X** soit inférieure ou égale à x (notée **P**(**X**≤ x)) est donnée par la fonction :

$$P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Comme la fonction $e^{-\frac{t^2}{2}}$ n'a pas de primitive, on calcule cette probabilité pour différentes valeurs de x et l'on garde les résultats dans des tables comme celle-ci :

Valeurs de $P(X \leq x)$			
x	$P(X \leq x)$	x	$P(X \leq x)$
1,0	0,841 3447	1,3	0,903 1995
1,1	0,864 3339	1,4	0,919 2433
1,0	0,884 9303		

(a) Calculer, toujours en vous servant de la table fournie, la dérivée $P'(X \leq 1,2)$ avec une précision d'ordre 4. Comparer avec la valeur exacte de cette dérivée, qui est $P'(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, et en déduire le nombre de *chiffres significatifs*.

(b) Calculer, toujours en vous servant de la table fournie, la dérivée $P''(X \leq 1,2)$ avec une précision d'ordre 2.

Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 35
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

143. La loi de Fourier pour le refroidissement d'un corps s'écrit :

$$T'(t) = -k(T(t) - T_\infty), \tag{2}$$

où T_∞ est la température du milieu ambiant et k est la diffusivité thermique. Pour une bille métallique initialement chauffée à une température de $90°C$ et plongée dans de l'eau à $20°C$, on a obtenu les résultats suivants :

Température en fonction du temps					
t(min)	5	10	15	20	25
$T(°C)$	62,5	45,8	35,6	29,5	25,8

À l'aide de ces mesures et de la relation donner une approximation d'ordre 4 de la diffusivité thermique k.
Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 36
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

144. (a) Montrer que la formule de différentiation numérique :

$$f'(x_0) \simeq \frac{-f(x_0+2h)+8f(x_0+h)-8f(x_0-h)+f(x_0-2h)}{12h},$$

peut être obtenue à partir de la formule de différences centrée d'ordre 2 et en utilisant l'extrapolation de Richardson.

(b) Déterminer numériquement l'ordre de cette formule de différences en considérant la fonction $f(x) = e^x$ au point $x_0 = 0$ et en utilisant successivement $h = 0,1$ et $h = 0,3$ (comparer avec la valeur exacte pour déterminer les erreurs commises).

Référence: A. Fortin, chap. 6, no. 34
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

145. (a) Soit l'approximation de la dérivée première:

$$f'(x) \simeq \frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}.$$

À l'aide de développements de Taylor de degré approprié, obtenir l'ordre de cette approximation.

(b) Sachant que:

$$f(0,2) = 0,979\,8652;$$
$$f(0,4) = 0,917\,7710;$$
$$f(0,6) = 0,808\,0348;$$
$$f(0,8) = 0,638\,6093;$$
$$f(1,0) = 0,384\,3735,$$

évaluer $f'(0,2)$ avec $h = 0,4$.

(c) À l'aide de l'extrapolation de Richardson, améliorer votre approximation de $f'(0,2)$. Quelle est l'ordre de l'approximation obtenue?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

146. (a) Obtenir l'ordre de précision de l'approximation de la dérivée:

$$f'(x) = \frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}.$$

(b) On dispose des valeurs suivantes de la fonction $f(x)$:

x	$f(x)$
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192

Obtenir une approximation de $f'(1,4)$ en utilisant la formule proposée en (a) avec $h = 0,2$.

(c) Même question qu'en (b) mais avec $h = 0,1$.

(d) À partir des approximations obtenues en (b) et (c), obtenir une meilleure approximation de $f'(1,4)$. Donner l'ordre exact de cette approximation. Justifier.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

147. Soit $Q_{app}(h)$ une approximation d'ordre n d'une quantité exacte (et inconnue) Q_{exa}, c'est-à-dire

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + c_n h^n + c_{n+1}h^{n+1} + c_{n+2}h^{n+2} + \cdots$$

(a) Retrouver la formule permettant d'effectuer l'extrapolation de Richardson à partir des quantités $Q_{app}(h)$ et $Q_{app}(\frac{h}{3})$.

(b) Sachant que

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + c_2h^2 + c_4h^4 + c_6h^6 + \cdots ,$$

obtenir une approximation d'ordre 6 de $f'(1)$ en utilisant les données du tableau suivant

h	$App(h) = \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$
0,09	1,176 788 36
0,03	1,175 377 48
0,01	1,175 220 75

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

148. Intégrer la fonction $f(x) = e^x$ dans l'intervalle $[0, 1]$ en utilisant *la méthode des trapèzes composée* avec respectivement 3 et 9 intervalles. Utiliser *l'extrapolation de Richardson* avec ces deux résultats pour obtenir une meilleure approximation. Quel sera l'ordre exacte de cette approximation? Comparer vos résultats avec la valeur exacte et déterminer le nombre de chiffres significatifs de la meilleure approximation.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

149. Le tableau suivant présente la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique

t (s)	$v(t)$ (m/s)
0	2,00
10	1,89
20	1,72
30	1,44
35	1,21
40	1,01

(a) En vous servant au besoin plusieurs fois d'une formule aux différences appropriée, obtenir une approximation de l'accélération $a(t)$ (en m/s^2) en $t = 15s$ qui soit d'ordre 4.

(b) La vitesse moyenne de l'eau en écoulement dans la conduite cylindrique peut être calculée par la relation suivante :

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{40}\int_0^{40} v(t)\,dt.$$

i. Calculer une approximation d'ordre 2 de la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau.

ii. Comment pourrait-on calculer la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau avec un *maximun* de précision (au moins d'ordre 4)? **Ne pas calculer cette approximation.**

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

150. La vitesse $v(t)$ en $^{\text{m}}/_{\text{s}}$ d'un cycliste a été observée à différents temps t exprimés en secondes. Ces observations sont présentées dans le tableau suivant:

t	$v(t)$
0	0,0
2	4,1
4	7,0
6	8,2
8	8,6
10	8,7

(a) Trouver une approximation d'ordre 2 de l'accélération $a(t)$ au temps $t = 4$.

(b) Trouver une approximation d'ordre 4 de l'accélération $a(t)$ au temps $t = 4$.

(c) Trouver une approximation d'ordre 2 de la distance parcourue $d(t)$ entre les temps 0 et $t = 10$.

(d) Trouver une approximation d'ordre 4 de la distance parcourue $d(t)$ entre les temps 0 et $t = 10$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Équations différentielles ordinaires

Problèmes de conditions initiales

151. Utiliser un développement de Taylor d'ordre approprié, plutôt que l'approche géométrique utilisée en classe, pour obtenir la méthode d'Euler explicite pour résoudre le problème avec condition initiale :

$$y' = f(t, y(t)), \quad \text{où} \quad y(t_0) = y_0.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

152. La méthode d'Euler explicite pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ provient-elle d'un schéma de quadrature? Expliquer et illustrer.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

153. Une méthode numérique à un pas a été utilisée pour résoudre une équation différentielle avec condition initiale. Les résultats obtenus par cette méthode en prenant des pas de temps $h = 0,1$, $h = 0,05$ et $h = 0,025$ sont donnés dans le tableau suivant (remarque: une valeur sur deux est affichée pour $h = 0,05$ et une valeur sur quatre est affichée pour $h = 0,025$):

t_i	y_i pour $h = 0,1$	y_i pour $h = 0,05$	y_i pour $h = 0,025$
1,0	0,500 000	0,500 000	0,500 000
1,1	0,512 084	0,512 242	0,512 280
1,2	0,511 698	0,512 101	0,512 196
1,3	0,500 927	0,501 559	0,501 704
1,4	0,482 686	0,483 447	0,483 619
1,5	0,459 861	0,460 633	0,460 804

Sachant que $y(1,5) = 0,460\,857$, déterminer l'ordre de la méthode numérique utilisée.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

154. L'équation différentielle

$$y'(t) = -7y(t), \quad y(0) = 5,$$

possède la solution analytique

$$y(t) = 5e^{-7t}.$$

Le tableau suivant présente les approximations de $y(1,0)$ obtenues avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour des pas de temps $h = 0,05$, $h = 0,025$ et $h = 0,0125$ ainsi que les erreurs absolues.

h	Approximations de $y(1,0)$	Erreurs absolues
$0,0500$	$4,564\,761\,956 \times 10^{-3}$	$5,352\,128\,354\,276\,994 \times 10^{-6}$
$0,0250$	$4,559\,698\,534 \times 10^{-3}$	$2,887\,063\,325\,299\,893 \times 10^{-7}$
$0,0125$	$4,559\,426\,599 \times 10^{-3}$	$1,677\,098\,454\,729\,020 \times 10^{-8}$

(a) En vous servant des résultats présentés dans ce tableau, trouver une approximation de $y(1,0)$ qui soit encore plus précise.

(b) Estimer numériquement l'ordre de l'approximation obtenue en (a).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

155. L'équation différentielle

$$y'(t) = y(t) + e^{2t} \quad y(0) = 2,$$

possède la solution analytique:

$$y(t) = e^t + e^{2t}.$$

(a) En prenant $h = 0,1$, faire 1 itération de la méhode d'Euler modifiée et calculer l'erreur commise sur y_1 en comparant avec la solution analytique $y(0,1)$.

(b) En prenant $h = 0,025$, on a résolu à l'aide de Matlab la même équation différentielle par la méthode d'Euler modifiée et on a obtenu la table suivante:

t_i	y_i
0,000	2,000 000
0,025	2,076 578
0,050	2,156 426
0,075	2,239 693
0,100	2,326 539

Déterminer numériquement à l'aide de cette table et du résultat obtenu en (a) l'ordre de la méthode d'Euler modifiée.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

156. L'équation différentielle avec condition initiale:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + e^{2t}; \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

possède la solution analytique $y(t) = e^t + e^{2t}$.

(a) En prenant $h = 0,2$, calculer à l'aide de la méthode d'Euler explicite une approximation de $y(0,2)$. En déduire une approximation de $y'(0,2)$.

(b) En prenant $h = 0,1$, faire 2 itérations de la méthode d'Euler explicite et calculer les erreurs absolues commises sur y_1 et y_2 en comparant les résultats avec la solution analytique. Déterminer le nombre de chiffres significatifs de y_2.

(c) Expliquer pourquoi l'erreur absolue sur y_1 est inférieure à celle obtenue sur y_2.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

157. Soit $f(t, y)$ une fonction plusieurs fois dérivable en chacune de ses variables. On veut résoudre l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

par la méthode du point milieu avec un pas constant $h > 0$.

(a) Donner l'expression de $y''(t)$;

(b) Donner l'expression de l'erreur de troncature locale $\tau_{n+1}(h)$ pour la méthode du point milieu ;

(c) Montrer que l'ordre de cette méthode est 2. Pour cela :

i. Développer $y(t)$ autour de t_n jusqu'à l'ordre approprié et évaluer ce développement de Taylor en t_{n+1} ;

ii. Développer $f(t_n+{}^1\!/_2 h,\, y(t_n)+{}^1\!/_2 k_1)$ jusqu'à l'ordre approprié et évaluer ce développement en $(t_n,\, y(t_n))$;

(d) Pour le problème particulier

$$y'(t) = t\sin(y(t)), \quad y(0) = 2,$$

faire une itération de la méthode du point milieu avec $h = 0,2$.

(e) Sachant que la méthode du point milieu avec $h = 0,1$ donne $y(0,2) \approx 2,018\,128\,686$, déduire une meilleure approximation de $y(0,2)$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

158. Faire deux itérations de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (en prenant $h = 0,1$) pour le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + y_1(t) & (y_1(1) = 2) \\ y_2'(t) = y_1(t) + t & (y_2(1) = 1) \end{cases}$$

Référence: A. Fortin, chap. 7, no. 5
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

159. Transformer les équations différentielles d'ordre supérieur suivantes en systèmes d'équations différentielles d'ordre 1.

(a) $y^{(3)}(t) = y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) - y(t) + 1$
$y(0) = 2, \quad y^{(1)}(0) = 2 \quad \text{et} \quad y^{(2)}(0) = 1$

(b) $y^{(2)}(t) = t^2 + (y(t))^2 + 1$
$y(1) = 0 \quad \text{et} \quad y^{(1)}(1) = 2$

(c) $y^{(4)}(t) = y^{(2)}(t)e^t + (y^{(3)}(t))^3$
$y(0) = 2, \quad y^{(1)}(0) = 1, \quad y^{(2)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad y^{(3)}(0) = 4$

Référence: A. Fortin, chap. 7, no. 6
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

160. Transformer le système de 2 équations différentielles d'ordre 2 suivant en un système de 4 équations différentielles d'ordre 1. Bien indiquer les conditions initiales.

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{-x(t)}{((x(t))^2+(y(t))^2)^{\frac{3}{2}}} & x(0) = 0,4 \quad x'(0) = 0,0 \\ y''(t) = \frac{-y(t)}{((x(t))^2+(y(t))^2)^{\frac{3}{2}}} & y(0) = 0,0 \quad y'(0) = 2,0 \end{cases}$$

Référence: A. Fortin, chap. 7, no. 13
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

161. Le système d'équations différentielles modélisant le mouvement d'un pendule de Foucault est:

$$\begin{cases} x''(t) = 2\omega y'(t)\sin\psi - k^2 x(t); \\ y''(t) = -2\omega x'(t)\sin\psi - k^2 y(t), \end{cases}$$

où $(x(t),\, y(t))$ désigne la trajectoire du pendule dans le plan, ω est la vitesse angulaire de la terre, ψ est la latitude locale et $k^2 = \frac{g}{\ell}$, où g est l'accélération gravitationnelle et ℓ est la longueur du pendule. Les conditions initiales nous donnant la position et la vitesse initiales du pendule sont

$$\begin{cases} x(0) = 1; \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Obtenir le système d'équations différentielles qui nous permettra d'utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. **Ne pas résoudre le problème.**
Référence: A. Fortin, chap. 7, no. 14
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

162. Exprimer le problème avec conditions initiales:

$$\begin{cases} \frac{d^2z}{dt^2} - 2t\frac{dz}{dt} = 2te^{xz}; \\ \frac{d^2x}{dt^2} - 2xz\frac{dx}{dt} = 3x^2yt^2; \\ \frac{d^2y}{dt^2} - e^y\frac{dy}{dt} = 4xt^2z, \end{cases}$$

où $z(1) = x'(1) = y'(1) = 2$ et $z'(1) = x(1) = y(1) = 3$, de telle sorte que nous puissions utiliser les méthodes numériques étudiées en classe. Ne pas faire la résolution numérique.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

163. Considérons un arc idealisé. En négligeant l'effet de la gravité et sachant que la hauteur de l'arc est de $2\,l_0$ et le déplacement de la flèche est initialement de l_0 (en mètres) vers la gauche, l'équation du mouvement pour la flèche dans la direction x peut s'écrire de la façon suivante:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2k\left(l_0 - \sqrt{l_0^2 + (l_0 - x)^2}\right) \tag{3}$$

où k est la constante de rappel des cordes de l'arc et m est la masse de la flèche. En utilisant le changement de variable

$$u = \frac{x}{l_0},$$

on peut réécrire l'équation (3) sous la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{2k}{m}(\sqrt{2 - 2u + u^2} - 1). \tag{4}$$

(a) En supposant la flèche initialement au repos au point $x = 0$ ($u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$), transformer l'équation différentielle du second ordre (4) en un système d'équations différentielles du premier ordre.

(b) En utilisant la méthode d'Euler modifiée et un pas de temps $h = 0,01$ (en secondes), évaluer la position et la vitesse de la flèche au temps $t = 0,01\,\mathrm{s}$, si $m = 0,1\,\mathrm{kg}$, $k = 250\,\mathrm{N/m}$ et $l_0 = 0,5\,\mathrm{m}$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

164. Soit le *flux* $\Psi(x)$, qui est solution de l'équation différentielle

$$-\frac{d}{dx}\left[D(x)\frac{d}{dx}\Psi(x)\right] + e^{-x}\Psi(x) = 1.$$

On définit le *courant* $J(x)$ par $J(x) = -D(x)\frac{d}{dx}\Psi(x)$, avec $D(x) = \frac{e^x}{3}$.

(a) En supposant que les conditions initiales soient données en $x = 0$ par $\Psi(0) = 1$ et $J(0) = 0$, transformer l'équation d'ordre 2 en un système d'équations d'ordre 1, où les inconnues sont le flux et le courant.

(b) En prenant $h = 0,1$, faire une itération de la méthode *d'Euler modifiée* pour le système obtenu en (a) et calculer $\Psi'(0,1)$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

165. Le système d'équations différentielles modélisant la dynamique d'un satellite de masse négligeable à proximité de deux corps célestes est:

$$\begin{cases} x'' = x + 2y' - (1-\mu)\left(\frac{x+\mu}{((x+\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \mu\left(\frac{x-1+\mu}{((x-1+\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right); \\ y'' = y - 2x' - (1-\mu)\left(\frac{y}{((x+\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \mu\left(\frac{y}{((x-1+\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \end{cases}$$

où μ est une constante connue. Les conditions initiales nous donnant la position et la vitesse initiales du satellite sont

$$\begin{cases} x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(0) = x'_0; \\ y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

Obtenir le système d'équations différentielles qui nous permettra d'utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. **Ne pas résoudre le problème.**
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

166. Soit l'équation d'ordre 2

$$y''(t) - \frac{2t}{(1-t^2)}y'(t) + \frac{6}{(1-t^2)}y(t) = 0$$

avec les conditions initiales $y(-0,5) = -0,125$ et $y'(-0,5) = -1,5$. Ce problème a pour solutions $y(t) = 0,5(3t^2 - 1)$.

(a) Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équation différentielles d'ordre un. Indiquer les conditions initiales applicables au système.

(b) Utiliser la méthode d'Euler explicite et un pas de temps $h = 0,1$ pour calculer les valeurs approchées y_1 et y'_1 de $y(-0,4)$ et $y'(-0,4)$, respectivement. Identifier tous les chiffres significatifs des approximations y_1 et y'_1.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

167. Soit un oscillateur amorti à un degré de liberté. On a msuré expérimentalement les positions $x(t_i)$ de l'oscillateur libre à certains instants t_i après l'avoir initialement déplacé de sa position d'équilibre. L'équation différentielle du second ordre décrivant le mouvement de l'oscillateur par rapport au temps est définie par:

$$x''(t) + x'(t) + 17,8x(t) = 0 \tag{5}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

(a) Transformer l'equation différentielle (5) en un système de deux équations différentielles d'ordre 1 avec conditions initiales.

t_i	$x(t_i)$
0,0	1,0000
0,1	0,9152
0,2	0,6857
0,3	0,3636
0,4	0,0116
0,5	−0,3088
0,6	−0,5473
0,7	−0,6718
0,8	−0,6723
0,9	−0,5606
1,0	−0,3659

(b) En prenant $h = 0,1$, faire une itération de la méthode d'Euler modifiée et calculer le nombre de chiffres significatifs de x_1 en la comparant avec la valeur expérimentale $x(0,1)$.

(c) Évaluer le temps requis pour que l'oscillateur passe par la position $x = 0$. Utiliser un polynôme de degré 2 qui vous permettra d'obtenir la plus grande précision possible.

(d) Donner une estimation de l'erreur commise en (c).

(e) Donner une approximation d'ordre 4 de la vitesse $x'(t)$ en $t = 0,8$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

168. Un corps de masse M glisse à l'intérieur d'un récipient hémisphérique, sous l'influence de la gravité. Son mouvement $\theta(t)$ (en radians) est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{R}\left(\mu \sin(\theta(t)) - \cos(\theta(t))\right) = 0,$$

où $\mu = 0,006$ est le coefficient de friction, $R = 0,2\,\mathrm{m}$ et $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$. Initialement à $t = 0$, on a $\theta = 0$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$.

(a) Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre un. Indiquer les conditions initiales applicables au système.

(b) Utiliser la méthode d'Euler modifiée pour calculer une approximation de $\theta(0,1)$ en prenant un pas $h = 0,1$. En déduire une aproximation de $\frac{d^2\theta(0,1)}{dt^2}$.

(c) Soit $\theta^* = 0,244\,597$, une approximation de $\theta(0,1)$ obtenue avec la méthode d'Euler modifiée en prenant un pas $h = 0,025$. En vous servant du résultat obtenu en (b) obtenir une meilleure approximation de $\theta(0,1)$. Discuter de l'ordre de cette nouvelle approximation.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

169. La déformation $x(t)$ d'un ressort par rapport à sa position d'équilibre est donnée par l'équation différentielle

$$x''(t) + 10(x'(t))^2 + 0,6x(t) = 0$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

(a) Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre un. Indiquer les conditions initiales applicables au système.

(b) Utiliser la méthode d'Euler modifiée pour calculer des approximations de $x(0,2)$ et $x'(0,2)$ en prenant un pas $h = 0,2$.

(c) Soit E la valeur de l'erreur de l'approximation de $x(0,2)$ calculée en (b). Quelle serait approximativement l'erreur si on avait pris un pas $h = 0,02$ pour calculer une approximation de $x(0,2)$?(**Ne pas calculer cette approximation**).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

170. La hauteur $x(t)$ (en m) d'un parachutiste au temps t (en s) vérifie l'équation:

$$\begin{cases} x''(t) = -9,81 - k(t)x'(t); \\ x(0) = 1200 \quad \text{et} \quad x'(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Dans cette équation, $k(t)$ (en s^{-1}) est le coefficient de friction et on pose:

$$k(t) = \begin{cases} \frac{2}{11} & \text{si} \quad t \leq 10; \\ 2 & \text{si} \quad t > 10. \end{cases}$$

(a) Transformer l'équation différentielle (6) d'ordre 2 en un système de 2 équations différentielles d'ordre 1 avec conditions initiales.

(b) En utilisant la méthode d'Euler modifiée et un pas de temps $h = 0,1$ s, évaluer la hauteur et la vitesse du parachutiste au temps $t = 10,1$ s sachant que $x(10) = 909,3$ m et $x'(10) = -45,2$ m/s.

(c) Soit E la valeur de l'erreur de l'approximation de $x(10,1)$ calculée en (b). Quelle serait approximativement l'erreur si on avait pris un pas $h = 0,01$ pour calculer une approximation de $x(10,1)$?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

171. La déformation verticale $y(t)$ d'un ressort est décrite par l'équation différentielle suivante

$$y''(t) = -\frac{a}{4k^2}\left((1-k^2)y(t) + 2k^2 y(t)^3\right)$$

où les paramètres $a = 4$ et $k = 5$ sont des caractéristiques du ressort. Les conditions initiales sont données par $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0,04$.

(a) Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre un. Indiquer les conditions initiales applicables au système.

(b) Utiliser la méthode du point milieu pour calculer une approximation de $y(0,1)$ en prenant un pas $h = 0,1$.

(c) Soit E la valeur de l'erreur de l'approximation de $y(0,1)$ calculée en (b). Quelle serait approximativement l'erreur si on avait pris un pas $h = 0,01$ pour calculer une approximation de $y(0,1)$?(**Ne pas calculer cette approximation**).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

172. On veut résoudre l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = -y(t) + t + 1, \quad y(0) = 1.$$

Faire deux pas de la méthode de Crank-Nicolson avec $h = 0,1$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

173. On veut résoudre l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = -t\sin(y(t)), \quad y(0) = 1.$$

En prenant $h = 0,1$, faire une itération de la méthode d'Euler implicite.
Note.: La racine de l'équation $f(x) = x + 0,01\sin(x) - 1$ est $r = 0,9916$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

174. On veut résoudre l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = te^{\frac{t^2}{2}}e^{y(t)}, \quad y(0) = 0.$$

(a) En prenant $h = 0,1$, faire une itération de la méthode d'Euler explicite.

(b) En prenant $h = 0,1$, faire une itération de la méthode d'Euler implicite.
N.B.: On se limitera à faire deux itérations de la méthode de Newton.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

175. On veut résoudre l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = -e^{-(t+y(t))}, \quad y(0) = 1.$$

En prenant $h = 0,25$, faire une itération de la méthode d'Euler implicite.
Note.: La racine de l'équation $f(x) = 1 - x - 0,25e^{-(0,25+x)}$ est $r = 0,9226$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

176. On considère l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

(a) À partir de l'équation différentielle ci-haut et en considérant l'approximation de $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt$ donnée par la méthode de Trapèze simple, développer la méthode (implicite) de Crank-Nicholson

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})\right],$$

où $h = t_{i+1} - t_i$.

(b) Donner le terme de l'erreur de troncature locale de la formule de Crank-Nicholson.

(c) Faire une itération de la méthode de Crank-Nicholson pour l'équation différentielle

$$y'(t) = te^{y(t)}, \quad y(0) = 0,$$

en utilisant $h = 0,1$.
N.B Les méthodes du chapitre 2 du manuel pourraient être utiles.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

177. La vitesse verticale d'un parachutiste en chute libre est solution de:

$$\begin{cases} v'(t) = g - \frac{c}{m}v(t); \\ v(0) \ = 0, \end{cases}$$

où $m = 68\,\mathrm{kg}$ est la masse du parachutiste, $c = 14\,\mathrm{kg/s}$ est le coefficient de résistance de l'air et $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$ est l'accélération gravitationnelle. On a résolu cette équation différentielle à l'aide de la *méthode de Runge-Kutta d'ordre 4* et on a obtenu les résultats suivants:

$t\,(\mathrm{s})$	$v\,(\mathrm{m/s})$	$t\,(\mathrm{s})$	$v\,(\mathrm{m/s})$
0	0,000 000		
1	8,855 846	6	33,760 03
2	16,065 71	7	36,335 21
3	21,933 24	8	38,431 23
4	26,709 01	9	40,137 25
5	30,596 16	10	?

(a) Compléter le tableau.

(b) Donner une approximation *d'ordre 2* de *l'accélération* du parachutiste en $t = 4{,}5$ s.

(c) Donner une approximation *d'ordre 4* de *l'accélération* du parachutiste en $t = 10$ s.

(d) Obtenir une approximation *d'ordre au moins 4* de la *distance verticale* que le parachutiste parcourt pendant les 5 premières secondes.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

178. Soit l'équation différentielle avec condition initiale:

$$\begin{cases} y'(t) = -7y(t); \\ y(0) \ = 5. \end{cases}$$

(a) Trouver la *solution analytique* de cette équation différentielle.

(b) Montrer que, pour cette équation différentielle, la *méthode d'Euler explicite* est de la forme

$$y_{i+1} = (1 - 7h)y_i,$$

où $h = t_{i+1} - t_i$.

(c) En prenant $h = 0{,}5$, faire 2 itérations de la méthode d'Euler explicite et calculer les erreurs commises sur y_1 et y_2 en comparant les résultats avec la solution analytique.

(d) Déterminer analytiquement les valeurs de h pour lesquelles la méthode d'Euler (explicite) appliquée au problème (7) est absolument stable (c-à-d $\lim_{n\to\infty} |y_n| = 0$).

(e) Les méthodes numériques utilisées pour résoudre cette équation différentielle donnent des solutions qui décroissent strictement vers 0 lorsque le pas de temps h est petit. Déterminer de *façon analytique*, pour la méthode d'Euler explicite, à partir de quelle valeur de h la solution numérique tend vers la solution analytique.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

179. Pour approcher la solution du problème à valeur initiale

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \quad t > 0$$

on considère la θ-méthode:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\theta f(t_{n+1}, y_{n+1}) + (1-\theta) f(t_n, y_n)\right], \quad \theta \in [0,1], \quad n \geq 0,$$

où $t_n = nh$ et h est le pas de temps. Pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$, on retrouve respectivement la méthode d'Euler explicite et d'Euler implicite, tandis que pour $\theta = \frac{1}{2}$, on retrouve la méthode de Crank-Nicholson.

(a) On a appliqué les méthodes de Crank-Nicholson et d'Euler implicite pour résoudre une équation différentille avec condition initiale. Le tableau suivant montre les erreurs absolues commises par les deux méthodes à l'instant $t = 5$, pour différentes valeurs du pas de temps h.

h	méthode 1	méthode 2
1,0	$3,052\,276 \times 10^{-2}$	$5,215\,832 \times 10^{-3}$
0,5	$1,460\,741 \times 10^{-2}$	$1,034\,686 \times 10^{-3}$
0,25	$7,161\,485 \times 10^{-3}$	$2,497\,104 \times 10^{-4}$
0,125	$3,548\,112 \times 10^{-3}$	$6,189\,158 \times 10^{-5}$
0,0625	$1,765\,997 \times 10^{-3}$	$1,543\,977 \times 10^{-5}$

Identifier laquelle des deux colonnes été calculée en utilisant la méthode de Crank-Nicholson. Donner deux raisons pour justifier votre réponse.

(b) Pour $\beta > 0$ un nombre réel positif, on considère le problème modèle suivant:

$$y'(t) = -\beta y(t), \quad y(0) = y_0, \quad t > 0.$$

Montrer que, pour cette équation différentielle, la θ-méthode est de la forme

$$y_{n+1} = \frac{1 - (1-\theta)h\beta}{1 + h\theta\beta} y_n.$$

(c) Montrer que la θ-méthode est absolument stable (c-à-d $\lim_{n\to\infty} |y_n| = 0$) pour le problème modèle si

$$(2\theta - 1)\beta h + 2 > 0.$$

(d) Trouver en fonction de θ, les valeurs de h pour lesquelles la méthode est absolument stable.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

180. Soit l'équation différentielle avec condition initiale

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda t y(t) \quad t \geq 0; \\ \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{7}$$

où λ est un paramètre d'amortissement strictement positif.
La solution du problème est donnée par $y(t) = y_0 e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}$, qui tend vers 0 quand $t \to \infty$.

(a) Montrer que, pour cette équation différentielle, la *méthode d'Euler* (explicite) est de la forme

$$y_{n+1} = (1 - \lambda h t_n) y_n,$$

où $h = t_{n+1} - t_n$.

(b) Déterminer analytiquement les valeurs de h pour lesquelles la méthode d'Euler (explicite) appliquée au problème (7) est absolument stable (c-à-d $\lim_{n\to\infty} |y_n| = 0$). Il s'agit de déterminer la borne supérieure du pas de temps h en fonction du paramètre d'amortissement $\lambda > 0$.

(c) Est-il possible de choisir un pas de temps constant satisfaisant pour tout temps le critère de stabilité?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

181. On considère l'équation différentielle à delai

$$y'(t) \quad = \quad y(t) - y(t-1),$$

pour $t \in [0\,,\,1]$. L'historique de la solution est donnée par

t	y
−1,0	1,1036
−0,8	1,2581
−0,7	1,3408
−0,5	1,5163
−0,3	1,7039
−0,2	1,8012
0,0	2,0000

Pour compléter cet historique, les données numériques sont interpolées par l'algorithme *splinc* de la bibliothèque numérique du cours. Les résultats obtenus sont présentés ci-bas.

```
>> [S,fpp]=splinc(t,y,'n',[]);
>> S

S
    0.4103    1.2309    1.9870    2.2700
   -0.2942   -0.4600    0.6343    1.9093
    0.0046    0.1676    1.0736    2.0118
   -0.0896    0.0263    1.0029    2.0000
   -0.0658    0.0477    1.0094    2.0006
   -0.1453         0    0.9998    2.0000
```

S est la matrice contenant les coefficients des polynômes constituant la spline. La ligne i de S contient les coefficients (a_i, b_i, c_i, d_i) du polynôme de degré 3 de la forme:

$$P_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i.$$

En partant de $t_0 = 0$, faire une itération de la méthode du point milieu avec $h = 0,1$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

182. On considère le système d'équations différentielles à délais:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t-0,5); \\ y_2'(t) = 2y_2(t) - y_1(t-1), \end{cases}$$

pour $t \in [0\,,\,1]$ et l'historique du système est donné par le tableau:

t	y_1	y_2
−1,0	1,1036	0,7358
−0,8	1,2581	0,8088
−0,75	1,3408	0,8442
−0,5	1,5163	0,9098
−0,25	1,7039	0,9631
−0,2	1,8012	0,9825
0,0	2,0000	1,0000

(a) Obtenir une approximation d'ordre 4 de la dérivée de $y_2(t)$ en $t = -0,5$ et en déduire une approximation d'ordre 4 de $y_1''(0)$.

(b) Pour avoir accès à l'historique de la solution, les données numériques sont interpolées par l'algorithme `splinc` de la bibliothèque numérique du cours:

```
>> [S1,fpp]=splinc(t,y1,'n',[]);
>> S1
S1 =

    9.6739   29.0218   29.4074   11.1631
  -73.0533 -169.5236 -129.4289  -31.1933
    6.5833    9.6588    4.9578    2.4034
    9.0870   13.4143    6.8356    2.7164
  -86.4731  -58.2558  -11.0819    1.2233
   10.6198         0    0.5692    2.0000

>> [S2,fpp]=splinc(t,y2,'n',[]);
>> S2
S2 =

    3.8509   11.5528   11.7637    4.7977
  -32.2408  -75.0675  -57.5324  -13.6813
    3.7035    5.8073    3.1236    1.4827
    0.8999    1.6018    1.0209    1.1323
  -18.8176  -13.1863   -2.6761    0.8242
    3.1595         0   -0.0389    1.0000
```

où chaque ligne des matrices S1 et S2 contient les coefficients (a_i, b_i, c_i, d_i) des polynômes de degré 3 définis sur chaque intervalle.

En partant de $t_0 = 0$, faire une itération de la *méthode du point milieu* avec $h = 0,2$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Équations algébriques non linéaires

Méthode de la bissection

183. Faire trois itérations de la méthode de bissection pour les fonctions suivantes et à partir des intervalles indiqués. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution dont le chiffre des millièmes est significatif.

(a) $f(x) = -0{,}9x^2 + 1{,}7x + 2{,}5$ dans l'intervalle $[2{,}8\,,\,3{,}0]$

(b) $f(x) = \frac{1-0{,}61x}{x}$ dans l'intervalle $[1{,}5\,,\,2{,}0]$

(c) $f(x) = x^2|\sin(x)| - 4{,}1$ dans l'intervalle $[0\,,\,4]$

(d) $f(x) = x^6 - x - 1$ dans l'intervalle $[1\,,\,2]$

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 1
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

184. Une variante de la méthode de bissection appelée *méthode de la fausse position*, consiste à remplacer le point milieu x_m de l'intervalle $[x_1\,,\,x_2]$ par le point d'intersection x_m^* de la droite joignant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, avec l'axe des x.

(a) Illustrer à l'aide d'un graphique cette méthode.

(b) Obtenir l'équation de la droite et calculer son point d'intersection x_m^* avec l'axe des x.

(c) Modifier l'algorithme de la bissection en remplaçant x_m par x_m^*.

(d) Faire une itération de l'algorithme ainsi obtenu pour la fonction $f(x) = \frac{1-0{,}61x}{x}$ dans l'intervalle $[1{,}5,\ 2{,}0]$. Préciser quel serait l'intervalle de départ pour la deuxième itération.

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 2
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

185. Reprendre l'exercice 183 en utilisant cette fois la méthode de la fausse position.
Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 3
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

186. Le polynôme $p(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ possède 4 racines simples. Pour ce polynôme, déterminer vers quelle racine la méthode de la bissection convergera, s'il y a lieu, en partant de chacun des intervalles suivants

i) $[-1{,}5\,,\,3]$

ii) $[-3\,,\,3]$.

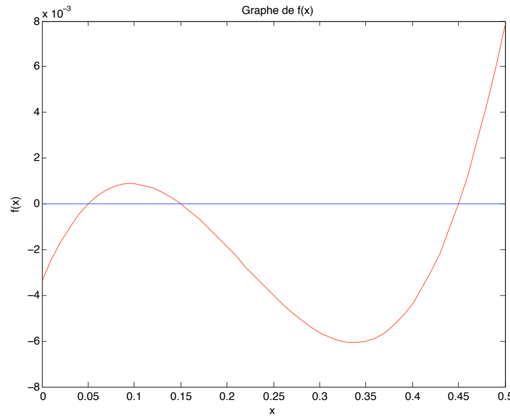
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

187. Soit la fonction $f(x)$ dont le graphe est illustré à la figure suivante.

(a) Un étudiant propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de la bissection à partir de l'intervalle initial $[0,\ 0{,}5]$. Expliquer pourquoi cet intervalle est un choix valide pour cette méthode.

(b) Retenant cet intervalle de départ, laquelle des racines est trouvée par la méthode de la bissection? Justifier votre réponse.

(c) Combien d'itérations de la méthode de la bissection seront nécessaires pour obtenir cette racine avec une erreur absolue de 10^{-6} en partant de l'intervalle $[0\,,\ 0{,}5]$?



[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

188. On considère la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$. Vérifier que la fonction possède une racine dans l'intervalle $[2\,,\ 2{,}4]$ et déterminer (sans faire les itérations) le nombre de chiffres significatifs minimum que l'on obtiendrait si 10 itérations de la méthode de la bissection étaient effectuées à partir de l'intervalle $[2\,,\ 2{,}4]$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

189. Dans un problème de conjonction de planètes, nous pouvons montrer que la conjocture (ou l'opposition) se produit lorsque le sinus de l'angle entre les deux vecteurs positions des planètes est nul. Sachant que l'angle θ entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifie

$$\sin(\theta) = \frac{\|\ \vec{u} \times \vec{v}\ \|_e}{\|\ \vec{u}\ \|_e \|\ \vec{v}\ \|_e},$$

expliquer pourquoi il est impossible d'utiliser la méthode de la bissection pour résoudre

$$f(x) = \frac{\|\ \vec{u} \times \vec{v}\ \|_e}{\|\ \vec{u}\ \|_e \|\ \vec{v}\ \|_e} = 0$$

et transformer le problème de manière à pouvoir utiliser la méthode de la bissection.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

190. Considérons la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 1$. Après avoir vérifié que cette fonction possède une racine réelle r dans l'intervalle $[1\,,\ 2]$, déterminer le nombre d'itérations de la méthode de bissection qui seront nécessaires (sans les faire) pour obtenir une approximation de r à 10^{-10} près.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

191. La fonction $f(x)$ possède trois racines $r_1 < r_2 < r_3$, dans l'intervalle $[a\,,\ b]$. Quelle racine sera calculée par la *méthode de la bissection* en partant de l'intervalle $[a,\ b]$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

192. Une certaine fonction possède une racine simple dans l'intervalle $[2\,,\ 5]$. Combien d'itérations de la méthode de la bissection seraient nécessaires pour obtenir une approximation avec au moins 4 chiffres significatifs?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthodes des points fixes

193. On cherche à résoudre l'équation

$$e^x - 3x^2 = 0,$$

qui possède les deux racines $r_1 = -0,458\,9623$ et $r_2 = 0,91$ ainsi qu'une troisième racine située près de $x = 4$. On vous propose les méthodes des points fixes suivantes pour obtenir r_1:

- $x = g_1(x) = -\sqrt{\dfrac{e^x}{3}}$;
- $x = g_2(x) = -\left(\dfrac{e^x - 3x^2 - 3,385\,712\,869x}{3,385\,712\,869}\right)$;
- $x = g_3(x) = -\left(\dfrac{e^x - 3x^2 - 3,761\,89x}{3,761\,89}\right)$.

(a) Lesquelles, parmi ces trois méthodes des points fixes, sont susceptibles de converger vers r_1? (Ne pas calculer les itérations.)

(b) Déterminer celle qui produit une convergence quadratique vers r_1.

(c) La méthode de la bissection convergera-t-elle vers l'une des racines si l'on prend $[-1\,,\,0]$ comme intervalle de départ?

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 13
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

194. On cherche à résoudre l'équation

$$x^2 - 2 = 0$$

(dont une solution est $\sqrt{2}$) au moyen de la méthode des points fixes

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \rho(x_n^2 - 2)$$

où ρ est une constante.

(a) Pour quelles valeurs de ρ cette méthode des points fixes est-elle convergente à l'ordre 1 (au moins)?

(b) Quel est l'ordre de convergence pour $\rho = \frac{\sqrt{2}}{4}$?

(c) Quel est l'ordre de convergence si $\rho = 3\sqrt{2}$?

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 17
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

195. On a calculé une racine de

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

en utilisant l'algorithme des points fixes

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}.$$

On a obtenu les résultats du tableau suivant.

n	x_n	$\|e_n\|$	$\|\frac{e_{n+1}}{e_n}\|$
1	1,500 00	0,134 77	0,580 84
2	1,286 95	0,078 28	0,476 62
3	1,402 54	0,037 31	0,529 88
4	1,345 46	0,019 77	0,502 78
5	1,375 17	0,009 94	0,517 10
6	1,360 09	0,005 14	0,509 72
7	1,367 85	0,002 62	0,511 45
8	1,363 89	0,001 34	0,514 92
9	1,365 92	0,000 69	
⋮	⋮	⋮	⋮
17	1,365 23	0,000 00	

Les résultats des deux dernières colonnes ont été obtenus en considérant que la valeur exacte de la racine est $r = 1,365\,23$.

(a) Expliquer pourquoi la méthode itérative précédente a convergé.

(b) Les valeurs de $|\frac{e_{n+1}}{e_n}|$ semblent converger vers $0,51$. Expliquer ce résultat et donner la valeur exacte vers laquelle le quotient $|\frac{e_{n+1}}{e_n}|$ devrait converger.

(c) Quel est l'ordre de convergence de la méthode utilisée?

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 19
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

196. On vous propose la méthode des points fixes suivante pour évaluer la racine cubique $\sqrt[3]{N}$ d'un nombre N:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + \frac{N}{3x_n^2}.$$

(a) Est-ce que $\sqrt[3]{N}$ est un point fixe de cet algorithme?

(b) Quel est l'ordre de convergence exact (théorique) de cette méthode des points fixes?

(c) On a appliqué cet algorithme pour le calcul de $\sqrt[3]{100}$ en partant de $x_0 = 5$ et l'on a obtenu le tableau suivant:

n	x_n	$\|e_n\|$
0	5,500 000 000	$0,358\,41 \times 10^{+0}$
1	4,666 666 667	$0,250\,77 \times 10^{-1}$
2	4,641 723 356	$0,134\,52 \times 10^{-3}$
3	4,641 588 837	$0,389\,86 \times 10^{-8}$
4	4,641 588 833	

On considérera que la valeur x_4 est la valeur exacte de $\sqrt[3]{100}$. En complétant au besoin le tableau précédent, interpréter ces résultats numériques de manière à confirmer (ou infirmer) les résultats théoriques obtenus en (b).

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 22
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

197. On considère une méthode des points fixes utilisant la fonction

$$g(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{(3x^2 + a)}$$

où a est un paramètre strictement positif.

(a) Obtenir analytiquement l'unique point fixe de cette fonction dans l'intervalle $]0, \infty[$.

(b) Montrer que la méthode des points fixes converge dans ce cas au moins à l'ordre 3 vers le point fixe trouvé en (a).

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 23
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

198. (a) Obtenir tous les points fixes de la fonction

$$g(x) = \lambda x(1 - x)$$

où λ est un paramètre.

(b) Déterminer pour chaque point fixe trouvé en (a) les valeurs de λ pour lesquelles ces points fixes sont attractifs.

(c) Déterminer pour chaque point fixe trouvé en (a) la valeur de λ pour laquelle la convergence de la méthode des points fixes sera quadratique.

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 25
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

199. (a) Obtenir tous les points fixes de la fonction

$$g(x) = (\lambda + 1)x - \lambda x^2$$

où λ est un paramètre.

(b) Déterminer pour chaque point fixe trouvé en (a) les valeurs de λ pour lesquelles ces points fixes sont attractifs.

(c) Déterminer pour chaque point fixe trouvé en (a) la valeur de λ pour laquelle la convergence de la méthode des points fixes sera quadratique.

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 26
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

200. On a utilisé une méthode des points fixes pour une fonction $g(x)$ qui possède un point fixe en $r = -1$. On a indiqué dans le tableau suivant un partie des résultats obtenus:

n	x_n
⋮	⋮
11	−0,999 887 412
12	−1,000 037 634
13	−0,999 987 446
14	−1,000 004 185
15	−0,999 998 605
16	−1,000 000 465
⋮	⋮

(a) Donner l'aproximation la plus précise possible de $g(-1)$.

(b) Donner une valeur approximative de $g'(-1)$.

(c) Expliquer pourquoi les valeurs de x_n sont tour à tour supérieures et inférieures à r.

(d) Quel est l'ordre de convergence de cette méthode des points fixes?

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 29
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

201. On considère la méthode des points fixes

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2.$$

(a) On souhaite utiliser cet algorithme pour évaluer $\sqrt{2}$. Donner l'algorithme dans ce cas et simplifier au maximum l'expression de l'algorithme de manière à éviter les calculs inutiles par la suite. De toute évidence, l'algorithme ne peut pas utiliser la fonction racine carrée.

(b) Déterminer analytiquement l'ordre de convergence vers la racine $\sqrt{2}$ de l'algorithme obtenu en (a).

(c) Faire 2 itérations de cet algorithme à partir de $x_0 = 2$.

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 30
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

202. Afin de trouver le zéro de la fonction $f(x) = (x-1)e^x$, on considère trois méthodes des points fixes:

$$g_1(x) = \ln(xe^x), \quad g_2(x) = \frac{(e^x + x)}{(e^x + 1)} \quad \text{et} \quad g_3(x) = \frac{(x^2 - x + 1)}{x} \quad (\text{pour } x \neq 0).$$

Étudier ces trois méthodes des points fixes à l'aide de la théorie étudiée en classe.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

203. Une entreprise cherche à déterminer le prix de vente p d'un produit. Sachant que chaque unité de ce produit coûte 5$ à fabriquer et que la demande annuelle, notée d, peut être exprimée comme

$$d(p) = 1000pe^{\frac{-p^2}{100}},$$

le profit annuel Π est alors donné par

$$\Pi(p) = (p-5)d(p).$$

Par conséquent, la valeur optimale du prix de vente du produit, notée p^*, devra être choisie de façon à maximiser les profits annuels.

(a) Montrer que la condition d'optimalité qui nous permettra de calculer le profit annuel maximal, et par conséquent la valeur optimale du prix de vente du produit, est donnée par

$$10\,e^{\frac{-p^2}{100}}\left(200p - 500 - 2p^3 + 10p^2\right) = 0.$$

(b) Afin de trouver le prix optimal, on se propose d'utiliser une méthode de point fixe. Deux choix de fonctions sont considérés:

$$g_1(p) = \tfrac{500+2p^3-10p^2}{200}$$

et

$$g_2(p) = \sqrt[3]{\frac{200p - 500 + 10p^2}{2}}.$$

Montrer que le problème de point fixe associé à $g_2(p)$ est équivalent à la condition d'optimalité explicitée en (a).

(c) Sachant que $p^* = 11,714\,615$ est un point fixe de $g_1(p)$, indiquer si ce point fixe est attractif, répulsif ou indéterminé.

(d) En partant de l'approximation initiale $p_0 = 11,0$, nous avons utilisé la méthode de point fixe associée à $g_2(p)$ pour obtenir les résultats numériques du tableau. Déterminer l'ordre de convergence de cette méthode. Si c'est justifié, donner le taux

n	p_n	e_n
0	$11,000\,000$	$0,714\,615$
1	$11,331\,507$	$0,383\,109$
2	$11,510\,805$	$0,203\,810$
3	$11,606\,629$	$0,107\,986$
4	$11,657\,523$	$0,057\,092$
5	$11,684\,464$	$0,030\,151$
6	$11,698\,702$	$0,015\,913$

de convergence observé et justifier ce taux théoriquement.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

204. Soit la fonction

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2x}.$$

(a) Trouver, de façon analytique, le seul point fixe de cette fonction pour $x > 0$.

(b) Montrer que les itérations de l'algorithme de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ convergent de façon quadratique vers ce point fixe pour tout $x_0 > 0$.

(c) Utiliser cette méthode de point fixe pour approximer $\sqrt{5}$ avec au moins 8 chiffres significatifs, en partant de $x_0 = 2$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

205. On veut calculer une approximation de $r = \ln a$ pour $a > 0$ donné. Pour ce faire, on considère le problème équivalent $f(x) = a - e^x = 0$. On suggère d'utiliser une méthode de point fixe et on propose les 3 fonctions suivantes:

- $g_1(x) = x - (e^x - a)$;
- $g_2(x) = x - \dfrac{(e^x - a)}{a}$;
- $g_3(x) = x - \dfrac{(e^x - a)}{e^x}$.

(a) Pour la fonction $g_1(x)$, caractériser la nature du point fixe $r = \ln a$ (répulsif, attractif ou indeterminé).

(b) Donner le taux et l'ordre de convergence de la méthode de point fixe associée à la fonction $g_1(x)$ pour laquelle $r = \ln a$ est attractif.

(c) En remarquant que la fonction $g_3(x)$ est la méthode de point fixe de Newton pour le problème $f(x) = 0$, donner une interprétation géometrique de la méthode de point fixe appliquée à la fonction $g_2(x)$.

(d) Compte-tenu de l'ordre de convergence et du temps de calcul nécessaire, sur quelle fonction appliquerez-vous la méthode de point fixe pour déterminer le point $r = \ln a$.

(e) Trouver les valeurs de α et β telles que la combinaison linéaire

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha g_2(x) + \beta g_3(x),$$

possède $x = \ln a$ comme point fixe super-attractif, c'est à dire de convergence d'ordre 3.

(f) Utiliser la méthode des points fixes $g_{\alpha,\beta}(x)$, pour approximer $\ln 2$ avec 8 chiffres significatifs en partant de $x_0 = 0.5$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

206. Si nous avons une bonne idée du taux de convergence $\rho \simeq g'(r)$ d'une méthode de point fixe $x = g(x)$, la méthode

$$x_e = x_{k+1} + \frac{\rho}{1-\rho}(x_{k+1} - x_k)$$

peut être utilisée pour accélérer la convergence.

(a) Montrer à l'aide de la théorie étudiée en classe que cette technique accélère la convergence de la méthode de points fixes.

(b) Montrer que cette technique équivaut à approximer ρ par l'expression

$$\frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

207. On désire calculer numériquement les trois racines de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$, où $r_1 < r_2 < r_3$, à l'aide de la méthode de l'algorithme de point fixe

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n^3 + 1}{3}.$$

N.B.: De toute évidence, il ne faut pas calculer analytiquement les racines de la fonction $f(x)$.

(a) Après avoir vérifié que r_1, r_2 et r_3 sont des points fixes de la fonction $g(x)$, montrer que:

$$\begin{cases} -2 < r_1 < -1; \\ \ \ 0 < r_2 < 1; \\ \ \ 1 < r_3 < 2. \end{cases}$$

(b) Déterminer la nature des points fixes (attractifs, répulsifs ou indeterminés).

(c) Pour le ou les point(s) fixe(s) attractif(s), déterminer l'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

208. Le polynôme x^3+x^2-2 possède une seule racine réelle $r=1$. Pour trouver une approximation de cette racine, on se propose d'utiliser une méthode de point fixe avec l'une des 3 fonctions suivantes:

- $g_1(x) = -x^3 - x^2 + 5x + 2$;
- $g_2(x) = \sqrt{2-x^3}$;
- $g_3(x) = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$.

Laquelle des fonctions serait la plus adéquate? Pourquoi?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

209. L'équation $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ possède une seule racine dans l'intervalle $[1,2]$. On peut obtenir différents problèmes de points fixes de cette équation:

- $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$;
- $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$;
- $x = g_3(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{\frac{1}{2}}$;
- $x = g_4(x) = \left(\dfrac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$;
- $x = g_5(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$.

L'algorithme des points fixes nous donne les résultats suivants:

n	g1(xn)	g2(xn)	g3(xn)	g4(xn)	g5(xn)
0	1.5000000000E+00	1.5000000000E+00	1.5000000000E+00	1.5000000000E+00	1.5000000000E+00
1	-8.7500000000E-01	8.1649658093E-01	1.2869537676E+00	1.3483997249E+00	1.3733333333E+00
2	6.7324218750E+00	2.9969088058E+00	1.4025408035E+00	1.3673763720E+00	1.3652620149E+00
3	-4.6972001200E+02	NaN	1.3454583740E+00	1.3649570154E+00	1.3652300139E+00
4	1.0275455519E+08		1.3751702528E+00	1.3652647481E+00	1.3652300134E+00
5	-1.0849338705E+24		1.3600941928E+00	1.3652255942E+00	1.3652300134E+00
6	1.2770555914E+72		1.3678469676E+00	1.3652305757E+00	
7			1.3638870039E+00	1.3652299419E+00	
8			1.3659167334E+00	1.3652300225E+00	
9			1.3648782172E+00	1.3652300123E+00	
10			1.3654100612E+00	1.3652300136E+00	
15			1.3652236802E+00	1.3652300134E+00	
20			1.3652302362E+00		
25			1.3652300056E+00		
30			1.3652300137E+00		

(a) Expliquer pourquoi on n'a pas eu convergenge avec la méthode des points fixes associée à $g_1(x)$ mais que la fonction $g_3(x)$ nous a donné un algorithme convergent.

(b) Que s'est-il passé avec $g_2(x)$?

(c) *i)* Expliquer pourquoi $g_3(x)$ a mené à une méthode des points fixes qui a convergée moins vite que $g_4(x)$.

ii) Expliquer pourquoi $g_4(x)$ a mené à une méthode des points fixes qui a convergée moins vite que $g_5(x)$.

(d) Donner l'ordre de convergence des méthodes des points fixes associées à $g_3(x)$, $g_4(x)$ et $g_5(x)$.

(e) On remarque que pour les méthodes associées à $g_3(x)$ et $g_4(x)$, les valeurs de x_n semblent supérieures à la racine à une itération et inférieures à la racine à l'autre itération. Expliquer pourquoi on observe ce comportement.

(f) Pour la méthode associée à fonction $g_5(x)$, donner une approximation de l'erreur absolue $|e_{n+1}|$ que l'on obtiendrait à l'itération $n+1$ si on suppose que la valeur absolue de l'erreur à l'itération n est $|e_n| = 10^{-3}$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

210. Soit le problème de points fixes suivant: pour un x_0 donné,

$$x_{n+1} = 2x_n - Cx_n^2 \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où C est une constante connue.

(a) À quoi sert cet algorithme? (Répondre de façon précise.)

(b) Montrer que cet algorithme est précis à l'ordre 2.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

211. Le problème de points fixes

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \frac{\beta q}{x_n^2} + \frac{\gamma q^2}{x_n^5},$$

où α, β et γ sont des paramètres, permet de calculer $r = q^{\frac{1}{3}}$ quelque soit $q > 0$.

Déterminer les paramètres α, β et γ pour que la méthode de points fixes ait l'ordre de convergence le plus élevé possible, quelque soit $q > 0$. Quel est l'ordre de convergence de la méthode de points fixes obtenue?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

212. On veut calculer le zéro r de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ en utilisant la méthode de point fixe

$$x_{n+1} = (1 - \frac{\omega}{3})x_n + (1-\omega)x_n^3 + \frac{2\omega}{3x_n^2} + 2(\omega - 1),$$

où ω est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre ω le zéro de la fonction $f(x)$ est-il un point fixe de la méthode proposée?

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de ω la méthode proposée est-elle au moins d'ordre 2?

(c) Existe-t-il une valeur de ω telle que l'ordre de la méthode de point fixe soit supérieure à 2?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

213. Soit la fonction $f(x) = e^{x-2} + x^2 - 3x + 1$ qui possède une racine $r = 2$.

(a) On se propose d'utiliser une méthode de points fixes pour calculer la racine $r = 2$. Parmi les choix suivants, laquelle ou lesquelles des méthodes $x = g_i(x)$ convergeraient vers $r = 2$ si l'approximation initiale x_0 était suffisamment proche de cette racine?

i. $g_1(x) = e^{x-2} + (x-1)^2$;

ii. $g_2(x) = 1 + \sqrt{x - e^{x-2}}$;

iii. $g_3(x) = 0,5\ln(3x - x^2 - 1)$.

(b) À partir du point $x_0 = 1$, effectuer une itération de l'algorithme de points fixes associé à la fonction $g_2(x)$ dans le but de trouver une nouvelle approximation de cette racine. Combien de chiffres significatifs possède cette nouvelle approximation?

(c) En partant de l'approximation initiale $x_0 = 1,75$, nous avons utilisé la méthode de points fixes associée à la fonction $g_2(x)$ pour obtenir les résultats du tableau suivant:

n	$\lvert e_n \rvert$	$\left\lvert \frac{e_n}{e_{n-1}} \right\rvert$	$\frac{e_n}{e_{n-1}^2}$
0	$2,500 \times 10^{-1}$	$5,802 \times 10^{-2}$	0,232 090
1	$1,451 \times 10^{-2}$	$3,009 \times 10^{-3}$	0,248 020
2	$5,235 \times 10^{-5}$	$1,309 \times 10^{-5}$	0,249 996
3	$6,851 \times 10^{-10}$		
4	0,0		

Les valeurs de $\left\lvert \frac{e_n}{e_{n-1}^2} \right\rvert$ semblent converger vers $0,249$. Expliquer ce résultat et donner la valeur exacte vers laquelle le quotient $\left\lvert \frac{e_n}{e_{n-1}^2} \right\rvert$ devrait converger.

(d) Quel est l'ordre de convergence de la méthode de points fixes associée à la fonction $g_2(x)$?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

214. La fonction

$$g(x) = e^x - 2,$$

possède un point fixe $r = 1,14619$. Sans effectuer d'itérations, déterminer si l'algorithme de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ convergerait vers r avec $x_0 = -1$ comme valeur de départ.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

215. Tracer le graphe de la fonction $g(x) = 2\sin x$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et determiner géométriquement le nombre et les positions approximatives des racines de l'équation

$$x - 2\sin x = 0$$

dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

216. Soit ϕ_r une racine de l'équation

$$\tan\phi - \phi = c,$$

où $c = 0,01$. On désire calculer une valeur approchée de ϕ_r à l'aide de la méthode des points fixes et on se propose d'utiliser les deux formes suivantes:

$$\phi = g_1(\phi) = \tan\phi - c;$$

$$\phi = g_2(\phi) = \tan^{-1}(\phi + c) = \arctan(\phi + c).$$

Sans effectuer d'itération, déterminer laquelle des fonctions serait la plus adéquate. Quel est l'ordre de convergence associé à cette fonction? Justifier vos réponses.

Rappel: $(\tan\phi)' = \dfrac{1}{\cos^2\phi}$ *et* $(\arctan\phi)' = \dfrac{1}{1+\phi^2}$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

217. L'équation $f(x) = e^x - 4x^2$ a une racine entre $x = 4$ et $x = 5$.
   (a) Montrer qu'on ne peut trouver ce zéro, à l'aide de la méthode de point fixe, si on utilise l'expression:
   $$x = g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}. \tag{8}$$
   (b) Trouver une fonction $h(x)$ qui vous donnera une méthode de point fixe $x = h(x)$ qui converge *linéairement* vers la racine de $f(x)$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

218. On vous propose de résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$ (dont la racine qui nous intéresse est $r = \sqrt{2}$) par l'algorithme suivant:
   $$x_0 = 1;$$
   $$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2}.$$
   (a) Effectuer 2 itérations de cet algorithme et donner le nombre de chiffres significatifs de x_1 et x_2 en comparant avec la valeur exacte $\sqrt{2}$.
   (b) Montrer que cet algorithme converge au moins à l'ordre 3.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

219. Le point fixe $r = 3$ est solution des deux équations:
   $$x = g_1(x) = \sqrt{2x+3};$$
   $$x = g_2(x) = \frac{(x^2-3)}{2}.$$
   (a) Déterminer la nature du point fixe r (répulsif, attractif ou indeterminé) pour chacune des fonctions g_1 et g_2.
   (b) Trouver les valeurs de α et β telles que la combinaison linéaire
   $$g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x),$$
   possède $r = 3$ comme point fixe super-attractif, c'est à dire de convergence au moins quadratique.
   (c) Effectuer deux itérations de la méthode des points fixes sur la fonction $g_{\alpha,\beta}$ en partant de $x_0 = 4$.
   (d) Si deux fonctions conduisent l'une à un point fixe attractif et l'autre au même point fixe répulsif, peut-on toujours les combiner afin d'obtenir une méthode des points fixes convergente au moins à l'ordre 2? Justifier.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

220. Pour identifier une solution x^* de l'équation $f(x) = 0$, on propose la fonction de point fixe $g(x) = x - f(x)h(x)$ où h est une fonction choisie par l'utilisateur telle que $h(x^*) \neq 0$. Comment faut-il choisir h pour que la convergence de la méthode de point fixe soit quadratique ?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

221. La fonction $f(x) = x + \ln(x)$ possède une racine $x^* \approx 0,567143$. On propose d'approcher x^* par une méthode de point fixe.
   (a) Parmi les fonctions de point fixe suivantes, lesquelles donneront lieu à une itération convergente si l'estimation initiale x_0 est choisie suffisamment proche de x^* ?
      1. $g_1(x) = -\ln(x)$;
      2. $g_2(x) = e^{-x}$;
      3. $g_3(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$.
   (b) Quel est le taux de convergence théorique de chacune des méthodes convergentes ?
   (c) En choisissant $x_0 = 0,3$, on a effectué quelques itérations de la méthode de point fixe avec g_2 et on a obtenu les résultats suivants

k	x_k	$x_k - x^*$
0	0,3	-0,26714299999900
1	0,740818220682	0,17367522068200
2	0,476723690715	-0,09041930928540
3	0,620814042281	0,05367104228140
4	0,537506706267	-0,02963629373250
5	0,584203027777	0,01706002777680
6	0,557550036683	-0,00959296331659
7	0,572610220792	0,00546722079205
8	0,564051217300	-0,00309178270030
9	0,568899652929	0,00175665292891

      i. Expliquer en s'appuyant sur un graphe pourquoi le signe de l'erreur alterne ;
      ii. D'après le tableau, quel est le taux de convergence de la méthode ?
      iii. Quelle est la valeur attendue du rapport $|x_{k+1} - x^*|/|x_k - x^*|^2$ lorsque $k \to \infty$?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

222. On désire calculer la racine $r = 1$ de la fonction

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

en utilisant la méthode de points fixes:

$$g(x) = \alpha f(x) + x = x,$$

où α est une constante.
Après avoir vérifié que $r = 1$ est un point fixe de la fonction $g(x)$, déterminer les valeurs de α pour lesquelles la méthode de points fixes converge à l'ordre 1.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

223. On veut calculer le zéro $r = 1$ de la fonction $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ en utilisant l'algorithme de points fixes

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 7x_n^2 + (7+\omega)x_n - 15}{\omega},$$

où ω est un paramètre réel strictement négatif ($\omega < 0$).

(a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre ω le zéro de la fonction $f(x)$ est-il un point fixe de la méthode proposée?

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de ω la méthode proposée converge-t-elle?

(c) Pour qu'elle valeur de ω la méthode proposée converge-t-elle le plus vite? Quel est l'ordre de convergence dans ce cas?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

224. La fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 1$, possede une racine réelle r dans l'intervalle $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$. Pour trouver une approximation de cette racine, on se propose d'utiliser une méthode des points fixes avec la fonction

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

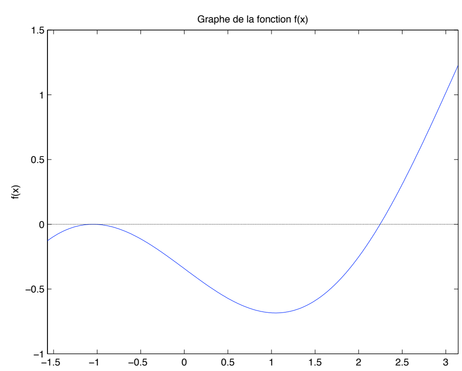
(a) Vérifier que la racine r est un point fixe de la fonction $g(x)$.

(b) En estimant $g'(x)$ sur un sous intervalle $[a, b] \subset [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ approprié, en déduire que le point fixe r est attractif et que la convergence est linéaire.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthode de Newton

225. On veut calculer les deux racines de la fonction $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$. Le graphe de la fonction f est illustré à la figure suivante:



(a) Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour calculer chacune des deux racines? Pourquoi?

(b) À l'aide du graphe de la fonction f, discuter de l'ordre de convergence de la méthode de Newton pour les deux racines.

(c) On considère maintenant la méthode de point fixe:

$$x_{n+1} = \sin(x_n) + \frac{x_n}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

pour calculer la racine $r > 0$. En observant que $r \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, déterminer la nature du point fixe (attractif, répulsif ou indéterminé).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

226. On désire calculer la racine positive de la fonction

$$f(x) = x^2 - 2.$$

(a) Soient $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, construire le polynôme de Lagrange de degré 2 qui passe par les points $(f(x_0), x_0)$, $(f(x_1), x_1)$ et $(f(x_2), x_2)$ et en déduire la valeur de l'itérée x_3 obtenue à l'aide de la méthode d'interpolation quadratique inverse à partir de $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

(b) Tracer le graphe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$ et déterminer géométriquement la position approximative de l'itérée x_2 obtenue en faisant une itération de la méthode de la sécante à partir de $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

(c) Tracer le graphe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$ et déterminer géométriquement la position approximative de l'itérée x_1 obtenue en faisant une itération de la méthode de la Newton à partir de $x_0 = 2$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

227. La méthode de bissection serait-elle plus rapide ou moins rapide que la méthode de Newton pour trouver une racine de multiplicité 2?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

228. Soit la fonction $f(\phi) = 2\cos(\phi) + \cos(120 - \phi) - 0,75$, où ϕ est en degrés. On observe graphiquement que la racine ϕ_r est située entre 94^o et 95^o.

(a) Sachant que la fonction $f(\phi)$ est décroissante sur l'intervalle $[94^o, 95^o]$, montrer que la racine ϕ_r est de multiplicité 1.

(b) Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton dans ce cas?

(c) En utilisant l'intervalle de départ $[94^o, 95^o]$, la méthode de la bissection donne, après 10 itérations, la valeur approchée $\phi^* = 94,3408^o$. Déterminer le nombre de chiffres significatifs de cette approximation.

(d) De l'équation $f(\phi) = 0$, proposer une méthode de points fixes qui converge vers la racine ϕ_r.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

229. Soit $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ un polynôme cubique qui possède seulement deux racines: $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Dans cette question, nous analysons le comportement de la méthode de Newton pour trouver la racine $r = 2$ à partir de deux valeurs initiales différentes : $x_0 = 1{,}4$ et $x_0 = 1{,}5$. Le script MATLAB suivant a permis d'obtenir les résultats présentés ci-bas.

```
[x,err] = newton('fonc','dfonc',1.40,20,1e-5);
ratio1 = err(2:end)./err(1:end-1);
ratio2 = err(2:end)./err(1:end-1).^2;
exout()
```

La fonction `exout()` permet d'afficher, dans un tableau de cinq colonnes, le numéro de l'itération (i) et les valeurs des vecteurs x, err, $ratio1$ et $ratio2$ pour chaque itération.

```
i         x_i              err_i          ratio1_i        ratio2_i
-------------------------------------------------------------------
1       1.40000000       0.60001398          -               -
2       2.60000000       0.59998602      0.99995341      1.66655020
3       2.34736842       0.34735444      0.57893756      0.96491841
4       2.19351666       0.19350269      0.55707560      1.60376703
5       2.10401428       0.10400031      0.53746183      2.77754195
6       2.05434684       0.05433287      0.52242985      5.02334905
7       2.02785616       0.02784218      0.51243721      9.43144101
8       2.01411429       0.01410031      0.50643708      18.18956136
9       2.00710592       0.00709194      0.50296322      35.67035774
10      2.00356545       0.00355147      0.50077580      70.61197303
11      2.00178589       0.00177191      0.49892235      140.48327949
12      2.00089374       0.00087976      0.49650477      280.20904158
13      2.00044707       0.00043309      0.49228311      559.56459720
14      2.00022358       0.00020961      0.48397912      1117.49857572
15      2.00011180       0.00009783      0.46671893      2226.63554691
16      2.00005591       0.00004193      0.42859567      4381.12945489
17      2.00002795       0.00001398      0.33334333      7950.27755001
18      2.00001398       0.00000000      0.00000000         0.00000000
```

(a) Pour la racine $r_2 = 2$ qui peut s'obtenir à partir de $x_0 = 1{,}4$, déterminer l'ordre de convergence de la méthode de Newton à l'aide des résultats présentés dans le tableau et en déduire la multiplicité de la racine $r_2 = 2$.

(b) Faire une itération de la méthode de Newton en partant de $x_0 = 1,5$.

(c) Lorsque l'algorithme converge vers une même racine, l'ordre de convergence ne devrait pas changer avec la valeur initiale. Comment expliquer la rapidité de la méthode de Newton à partir de $x_0 = 1{,}5$ en comparaison avec les résultats obtenus à partir de $x_0 = 1{,}4$?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

230. La méthode de Newton a été utilisée pour résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ à partir de $x_0 = 0,5$. Les résultats suivants ont été obtenus pour les 17 premières itérations.

n	e_n	$\frac{e_n}{e_{n-1}}$	n	e_n	$\frac{e_n}{e_{n-1}}$
0	0,5		9	0,01487	0,66828
1	0,34615	0,68627	10	0,00993	0,66775
2	0,23576	0,68627	11	0,00663	0,66740
3	0,161182	0,68120	12	0,00442	0,66715
4	0,10958	0,67715	13	0,00295	0,66699
5	0,07386	0,67406	14	0,00196	0,66688
6	0,04962	0,67180	15	0,00131	0,66681
7	0,03325	0,67019	16	0,00087	0,66676
8	0,2225	0,66906	17	0,00058	0,66673

À partir de ces résultats, que pouvez-vous conclure sur la convergence de la méthode et sur la multiplicité de la racine calculée?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

231. Nous voulons résoudre l'équation $f(x) = 0$ à l'aide de la méthode de Newton. Malgré un bon estimé initial, nous observons que la méthode ne converge pas bien. Nous soupçonnons la présence d'une racine de multiplicité ≥ 2. Nous Pensons donc transformer ce problème de racine en un problème de point fixe muni d'un paramètre qui, nous l'espérons, nous aidera à forcer une meilleure convergence.
On obtient cette nouvelle méthode du développement:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0; \\ &\Updownarrow \\ \lambda f(x) &= 0; \\ &\Updownarrow \\ x + \lambda f(x) &= x. \end{aligned}$$

Est-ce que cette méthode de point fixe, avec un paramètre λ adéquat, convergera mieux que la méthode de Newton? Pourquoi?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

232. On désire calculer $x = \frac{1}{a}$ (l'inverse multiplicatif de $a \neq 0$), sans faire d'opérations de division. Transformer ce problème sous la forme d'une équation non linéaire $f(x) = 0$ et construire un algorithme basé sur la *méthode de Newton* qui vous permettra de calculer $x = \frac{1}{a}$. De toute évidence, l'algorithme obtenu après simplications *ne doit pas utiliser d'opérations de division.*
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

233. Construire un algorithme, basé sur la méthode de Newton, qui vous permettra de calculer (ne faites pas ces calculs) le maximum de la fonction $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ (il faut noter qu'un algorithme n'est pas un programme MATLAB).
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

234. Vous voulez utiliser la méthode de Newton pour calculer $\sqrt{M}$. Expliquez pourquoi, dans ce cas, la méthode de Newton peut causer une élimination de chiffres significatifs. Réécrire l'expression donnée par cette méthode afin d'éviter cette situation non désirée.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

235. Afin de trouver la racine r de $f(x)$, on veut utiliser la méthode suivante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

où $g(x)$ est définie comme

$$g(x) = \frac{f[x + f(x)] - f(x)}{f(x)},$$

avec $g(r) \neq 0$.

(a) Montrer que l'ordre de convergence de la méthode est au moins quadratique (utiliser l'hypothèse introduite en c) pour simplifier vos calculs).

(b) Donner un avantage et un inconvénient à utiliser cette méthode, plutôt que la méthode de Newton.

(c) Si $f(x)$ est petit, montrer à l'aide du développement de Taylor, le lien entre cette méthode et la méthode de Newton.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

236. (a) À l'aide de la *méthode de Newton*, montrer comment on obtient l'algorithme

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

pour le calcul de $\sqrt{N}$.

(b) Obtenir un algorithme similaire pour calculer $\sqrt[3]{N}$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

237. Une *variante* de la méthode de Newton pour résoudre les équations de la forme $f(x) = 0$ résulte en l'algorithme suivant:

$$\text{pour } x_0 \text{ donné,} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

(a) Donner une interprétation géométrique de cette méthode.

(b) On aimerait se servir de cette méthode pour évaluer la racine de l'équation $x^2 - 2 = 0$. Donner une condition nécessaire sur x_0 pour que la méthode converge vers $\sqrt{2}$ à l'ordre 1.

(c) Déterminer la valeur de x_0 pour laquelle la convergence sera quadratique.

Référence: A. Fortin, chap. 2, no. 11
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

238. Soit la fonction $f(x) = x - a\sin x - b$, où a et b sont des paramètres positifs et $a < 1$.

(a) Expliquer pourquoi la méthode de Newton, avec l'approximation initiale $x_0 = b$, ne convergera pas toujours.

(b) Quelle(s) contrainte(s) additionnelle(s) sur a et/ou sur b doit-on imposer pour que celle-ci converge.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

239. On veut résoudre l'équation $(x-1)^{10} = 0$ par la méthode de Newton. Déterminer l'ordre et le taux de convergence de la méthode de Newton pour ce problème.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

240. On veut calculer une racine double par la méthode de Newton modifiée qui donnera un meilleur ordre de convergence en utilisant l'algorithme suivant:

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Le tableau suivant, donne les résultats respectifs obtenus à l'aide de la méthode de Newton ordinaire et de la méthode modifiée pour la fonction

$$f(x) = (x-1)^2 e^x.$$

	x_n	
n	Newton	Newton modifée
0	0,250 000 000	0,250 000 000
1	0,850 000 000	1,450 000 000
2	0,931 081 081	1,082 653 061
3	0,966 770 374	1,003 280 205
4	0,983 665 903	1,000 005 371
5	0,919 900 201	1,000 000 000
6	0,995 966 569	
7	0,997 987 369	
8	0,989 994 694	
9	0,999 497 600	
10	0,999 748 863	
11	0,999 874 447	
12	0,999 937 228	
13	0,999 968 615	
14	0,999 984 308	
15	0,999 992 154	
16	0,999 996 077	
17	0,999 998 038	
18	0,999 999 019	

(a) Quelle est la multiplicité de la racine $r = 1$ de $f(x)$?

(b) À l'aide de ces résultats numériques, vérifier que la convergence de la méthode de Newton ordinaire est linéaire.

(c) Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton modifiée?

(d) La méthode de bissection serait-elle plus rapide ou moins rapide que la méthode de Newton ordinaire pour trouver cette racine?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

241. Soit le problème de racine $\sin(x) = 0$. Expliquez pourquoi la méthode de Newton cycle lorsque le point de départ vérifie $\tan(x_0) = 2x_0$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthode de la sécante

242. Nous voulons comparer le comportement des méthodes de Newton et de la sécante pour trouver le zéro de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-a} & \text{si} \quad x - a \geq 0; \\ -\sqrt{a-x} & \text{si} \quad x - a < 0. \end{cases}$$

(a) Donnez une explication géométrique du comportement de la méthode de Newton avec cette fonction.

(b) Qu'en est-il de la méthode de la sécante dans le cas où $a = 2$, avec les approximations initiales $x_0 = 1$ et $x_1 = 3$. Comment expliquez-vous ce comportement de la méthode de la sécante?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

243. Un étudiant du cours de calcul scientifique a appliqué une méthode de point fixe, la méthode de Newton et la méthode de la sécante afin de déterminer **une racine réelle d'un polynôme de degré 4 possédant une paire de racines complexes conjuguées**. Dans l'analyse de ses résultats, il a calculé les ratios $\frac{e_n}{(e_{n-1})^p}$ pour les valeurs de $p = 1$ et $p = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or. En créant trois tableaux pour son rapport, il a entremêlé les méthodes. Associer à chaque tableau la méthode correspondante. **Bien justifier vos choix.**

Méthode 1		Méthode 2		Méthode 3	
$\frac{e_n}{e_{n-1}}$	$\frac{e_n}{(e_{n-1})^\alpha}$	$\frac{e_n}{e_{n-1}}$	$\frac{e_n}{(e_{n-1})^\alpha}$	$\frac{e_n}{e_{n-1}}$	$\frac{e_n}{(e_{n-1})^\alpha}$
0,116 474	0,215 755	0,460 004	0,221 918	0,323 310	2,633 704
0,012 229	0,086 047	0,048 156	0,326 361	0,596 079	6,237 756
0,000 152	0,016 210	0,005 367	0,411 998	0,648 564	22,688 555
2,198E-08	0,000 531	0,000 257	0,452 120	0,662 517	471,4050
0	0	1,440E-06	0,460 771	0,664 045	13396,24

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

244. Soit la fonction $f(x) = \sqrt[5]{(x+2)^2}$.

(a) Déterminer analytiquement l'unique racine de f ;

(b) Expliquer pourquoi la méthode de Newton appliquée à f ne convergera jamais vers la racine, quel que soit le point initial choisi ;

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

245. Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(a) Pour la racine $r = 1$, déterminer l'ordre de convergence de la méthode de Newton.

(b) Calculer l'itérée x_2 obtenue en faisant une itération de la méthode de la sécante à partir de $x_0 = 0,8$ et $x_1 = 0,9$. Donner le nombre de chiffres significatifs de x_2.

(c) Pour résoudre numériquement l'équation $f(x) = 0$, on va utiliser une méthode de points fixes à l'aide du script MATLAB suivant:

```
clear all; format long e
erreurMax=1.0e-16;
n=1;
x(n)=0;
erreur=1;
while erreur > erreurMax
     x(n+1) = g(x(n)); % g(x) une fonction  de points fixes
     erreur=abs((x(n+1)-x(n))/x(n+1));
     n=n+1;
end
%
err=abs(x-1);
[x(1:end-1)' (err(2:end)./err(1:end-1))' (err(2:end)./err(1:end-1).^2)']
```

qui, une fois exécuté, donne les résultats suivants:

```
ans =

 0                       9.090909090909105e-02   9.090909090909105e-02
 9.090909090909089e-01  7.803025102416915e-03   8.583327612658592e-02
 9.992906340815985e-01  5.912829261834514e-05   8.335372631318803e-02
 9.999999580564044e-01  1.284222050102113e-01   3.061783406576415e+06
```

i. A l'aide des résultats numériques donnés plus haut, estimer l'ordre de convergence de la méthode de points fixes présentée dans ce script.

ii. Expliquer le comportement bizarre de la dernière ligne des colonnes 2 et 3 du tableau.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

246. Effectuer les deux premières itérations de la méthode de la sécante sur l'équation $\frac{1}{2}x^2 - \sin(x) = 0$ avec comme approximations initiales $x_0 = 1,5$ et $x_1 = 2,0$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

247. Si vous utilisez la *méthode de la sécante* pour trouver la racine r de la fonction $f(x)$, montrer que si, à l'itération k, vous obtenez $x_k = r$ ou $x_{k-1} = r$ (mais pas les deux) alors on aura $x_{k+1} = r$. Donner une interprétation géométrique à ce résultat.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

248. Montrer que l'algorithme

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

est équivalent à la méthode de la sécante. Expliquer pourquoi cette formulation n'est pas utilisée en pratique (on y préfère cette étudier en classe).
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthode de l'interpolation inverse

249. On désire calculer la racine réelle de la fonction

$$f(x) = x^3 - 2x - 5.$$

Soient $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ et $x_2 = 2$, construire le polynôme de Lagrange de degré 2 qui passe par les points $(f(x_0), x_0)$, $(f(x_1), x_1)$ et $(f(x_2), x_2))$ et en déduire la valeur de l'itérée x_3 obtenue à l'aide de la méthode d'interpolation quadratique inverse à partir de $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ et $x_2 = 2$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Problèmes algébriques non linéaires

250. Un projectile se déplace suivant la trajectoire:

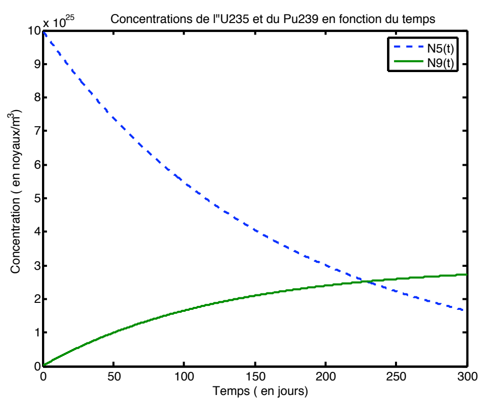
$$\begin{cases} x(t) = 2400(1 - e^{-t/15}); \\ y(t) = 9600(1 - e^{-t/15}) - 480t, \end{cases}$$

où $x(t)$ est la distance horizontale parcourue et $y(t)$ est la hauteur du projectile par rapport au sol. On cherche à déterminer le temps t où le projectile touchera le sol. On sait par expérience que le projectile prend autour de 9 secondes pour atteindre son but. Proposer une méthode de résolution de ce problème et préciser explicitement la (les) fonction(s) ainsi que les valeurs numériques des paramètres nécessaire à l'utilisation de votre méthode (**ne pas résoudre**).
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

251. La concentration N_5 de l'uranium 235 ($U235$) et la concentration de (N_9) du plutonium 239 ($Pu239$) dans un réacteur nucléaire varient en fonction du temps t (en jours) de la façon suivante:

$$N_5(t) = N_5(0)e^{-0{,}006t};$$
$$N_9(t) = 7N_8(0)\left(0{,}003 - 0{,}003e^{-0{,}008t}\right),$$

où $N_5(0) = 1{,}0 \times 10^{26} noyaux/m^3$ est la concentration initiale de l'uranium 235 et $N_8(0) = 1{,}0 \times 10^{28} noyaux/m^3$ est la concentration initiale de l'uranium 238 qui forme le plutonium après absorption de neutrons. La variation temporelle des concentrations de l'uranium 235 et du plutonium 239 est illustrée à la page suivante.



Comme on le voit sur le graphique, la concentration de l'uranium 235 et du plutonium 239 deviennent égale à un temps T situé entre 200 et 250 jours. Suggérer une méthode numérique qui permettra d'évaluer plus précisement T. Identifier clairement toutes les quantités pertinentes (fonctions, les paramètres initiaux,..).
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

252. Afin d'éviter les bris de conduites d'eau lors des longues périodes de froid intense, il est important de les enfouir à une profondeur adéquate. Un modèle qui nous permet de connaître la température $T(x,t)$ dans un milieu homogène est donné par

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

où T_i est la température initiale du sol, T_s est la température à la surface du sol et la conductivité thermique du sol est donnée par $\alpha = 0,138 \times 10^{-6}$. La durée de la période de froid intense est donnée par t (en secondes) et la profondeur où se trouve la conduite est donnée par x (en mètres). Nous voulons développer une méthodologie numérique, à l'aide de ce modèle, pour estimer la profondeur x à laquelle nous devons installer les conduites sous nos rues afin d'éviter qu'elles *gèlent*. Nous supposerons que nous n'aurons jamais une chute soudaine du mercure de plus de $50°C$ et que la température à la surface du sol ne sera jamais sous $-40°C$. La période de froid intense ne durera jamais plus de 30 jours consécutifs.

(a) D'abord, obtenir une approximation polynomiale précise à l'ordre 5 de la fonction

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

(b) À l'aide de cette approximation de la fonction erf(x) et du modèle proposé plus haut, décrire de la façon la plus précise possible un algorithme numérique qui vous permettra de calculer la profondeur x à laquelle devront se trouver les conduites. Justifier le choix de la méthode numérique choisi. *Ne pas faire le calcul de x.*

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Systèmes d'équations algébriques

Factorisations matricielles

253. Commenter cette affirmation: toute matrice A peut s'écrire sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

254. Si, en plus des permutations sur les lignes, nous permutons aussi les colonnes, nous aurons la factorisation $PAP^{-1} = LU$. Expliquer comment résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

255. (a) Calculer la factorisation LU de Crout de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
(b) Utiliser cette factorisation pour calculer A^{-1}.
(c) Soit $\vec{b} = (1,2 \quad -1,6)^T$. Utiliser la factorisation LU calculée en (a) pour résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$, en arithmétique flottante à 2 chiffres en utilisant l'arrondi.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

256. Obtenir, si possible, les factorisations LU de Crout des matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et $B = A + I$, où I est la matrice identité. Utiliser l'arithmétique exacte. À la lumière de vos résultats, commenter l'affirmation suivante: « Il n'est possible de factoriser une matrice que si elle est inversible ».
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

257. La factorisation LU de Crout avec permutations de lignes, en notation compacte, a été calculée partiellement en utilisant l'arithmétique flottante à trois chiffres:
$$\begin{pmatrix} \boxed{0,500 \times 10^0} & \boxed{0,200 \times 10^1} & \boxed{0,400 \times 10^1} \\ \boxed{0,333 \times 10^0} & \boxed{-0,416 \times 10^0} & \boxed{0,272 \times 10^1} \\ \boxed{0,250 \times 10^0} & \boxed{-0,300 \times 10^0} & 0,167 \times 10^0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \vec{O} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
(a) Compléter cette factorisation en arithmétique flottante en utilisant l'arrondi.
(b) Calculer le déterminant de la matrice A (faire les calculs en arithmétique exacte).
(c) Donner les deux systèmes linéaires à résoudre qui permettent de calculer la troisième colonne de A^{-1}. Ne pas faire les calculs.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

258. Une matrice B possède la décomposition LU de Crout **(notation compacte)** et le vecteur de permutation suivants:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & -8 & 8 \end{pmatrix} \quad \vec{O} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de la décomposition LU, calculer la troisième colonne de l'inverse de B.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

259. Compléter la factorisation LU de *Crout* en notation compacte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & ? \end{pmatrix}$$

de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 38 \\ 2 & 7 & 18 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

où le vecteur de permutation $\vec{\mathcal{O}} = (3\,2\,1)^T$ a été utilisé.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

260. Une matrice A possède la décomposition LU de *Crout* suivante (notation compacte, obtenue sans permutation de ligne):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

En utilisant cette décomposition, on a résolu les systèmes linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ suivants:

- Si $\vec{b} = (1 \quad 0 \quad 0)^T$: $\quad \vec{x} = (\ \ 1{,}7777 \quad -0{,}222\,22 \quad -0{,}111\,11)^T$;
- Si $\vec{b} = (0 \quad 1 \quad 0)^T$: $\quad \vec{x} = (-2{,}0555 \quad 1{,}4444 \quad -0{,}277\,77)^T$.

En complétant au besoin les données précédentes, mais sans faire de calculs inutiles:

(a) Calculer le déterminant de la matrice A.

(b) calculer $\|A\|_\infty$.

(c) Calculer A^{-1}.

(d) Calculer $\mathrm{cond}_\infty A$.

(e) En supposant que l'on a obtenu la décomposition LU donnée dans l'énoncé mais cette fois avec permutations de lignes, où le vecteur de permutation est donné par

$$\vec{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

reconstituer la matrice de départ et donner son déterminant.

Référence: A. Fortin, chap. 3, no. 13
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

261. Soit A une matrice inversible. La décomposition LU de *Crout* de A, sous forme compacte, a été exécutée partiellement:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{-2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & 8 & 0 & -2 \\ \boxed{3} & 0 & 6 & -3 \\ \boxed{1} & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \vec{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients encadrés ont déjà été calculés.

(a) Compléter la factorisation LU de A.

(b) Calculer le déterminant de A^{-1}.

(c) Calculer la deuxième colonne de A^{-1}.

(d) Déterminer la matrice A.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

262. La décomposition LU de Crout de la matrice A (inversible), obtenue sans permutation de lignes, est partiellement donnée sous forme compacte par:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & \boxed{-4} & \boxed{-\frac{1}{2}} & \boxed{\frac{5}{4}} \\ \boxed{4} & \boxed{-6} & \boxed{-5} & 1 \\ \boxed{-3} & \boxed{7} & \boxed{\frac{19}{2}} & 2 \end{bmatrix}$$

N.B.: Les valeurs encadrés correspondent aux coefficients L_{ij} et U_{ij} appropriés.

(a) Terminer cette décomposition LU de Crout.

(b) Évaluer le déterminant de la matrice A.

(c) Résoudre $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$ en utilisant la décomposition LU de Crout.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

263. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ -3 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Faire la décomposition LU de Crout de la matrice A avec permutation de lignes (la plus efficace possible).
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

264. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer la décomposition LU de A par la méthode de Doolitle sans permutation de lignes.
N.B.: Le calcul de chaque coefficient de cette décomposition doit être indiqué clairement et en détail.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

265. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer la décomposition LU de A par la méthode de Doolitle sans permutation de lignes.
N.B.: Le calcul de chaque coefficient de cette matrice doit être indiqué clairement et en détail.

(b) Sans calculer de déterminant, comment savez-vous que A n'est pas singulière ?

(c) L'inverse de A est une matrice telle que $AA^{-1} = I$. Si le vecteur $\vec{c}_i$ représente la i^{ieme} colonne de A^{-1}, expliquer comment trouver A^{-1} sur base de L et U. Écrire les systèmes linéaires qui correspondent.

(d) Pour une matrice $n \times n$, sachant que le nombre d'opérations à effectuer pour calculer L et U est environ $\frac{1}{3}n^3$ et que celui des résolutions $L\vec{y} = \vec{b}$ puis $U\vec{x} = \vec{y}$ est environ n^2, quel est le coût du calcul de A^{-1} par la méthode que vous avez décrite ?

(e) Que faudrait-il changer à votre procédure si le pivotage partiel était autorisé ?

(f) Sachant que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,2 \\ -1,7 & 1 & -0,1 \\ 0,3 & 0 & -0,1 \end{pmatrix}$$

calculer le conditionnement de la matrice A avec la norme $\| \quad \|_1$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

266. Les procédés de séparation chimique telle la distillation, l'extraction ou l'absorption consistent à faire passer les produits à séparer au travers une série d'étages où un équilibre thermodynamique permettra de séparer les composants. Considérons un procédé d'absorption gaz–liquide à n étages. Par exemple, ce type d'unité peut être utilisé pour retirer le dioxyde de souffre (SO_2) présent dans les gaz de combustion à l'aide d'un liquide absorbant.

Un liquide ayant un débit molaire L est alimenté au haut de l'unité de séparation et un gaz à un débit molaire G est introduit au bas de l'unité. La fraction molaire du composé absorbé dans la phase liquide à l'étage k de séparation est notée x_k, la fraction molaire du composé absorbé dans l'alimentation liquide est notée x_f, la fraction molaire du composé dans l'alimentation gazeuse est notée y_f et H est la fraction de retenue.

En utilisant les hypothèses simplificatrices nécessaires et en réalisant les bilans molaires sur chacun des composés à chaque étage, nous obtenons le modèle mathématique suivant:

$$\begin{cases} \tau \frac{dx_1}{dt} & = K(y_f - b) - (1+\delta)x_1 + x_2; \\ \tau \frac{dx_2}{dt} & = \delta x_1 - (1+\delta)x_2 + x_3; \\ \tau \frac{dx_3}{dt} & = \delta x_2 - (1+\delta)x_3 + x_4; \\ & \vdots \\ \tau \frac{dx_{n-1}}{dt} & = \delta x_{n-2} - (1+\delta)x_{n-1} + x_n; \\ \tau \frac{dx_n}{dt} & = \delta x_{n-1} - (1+\delta)x_n + x_f, \end{cases}$$

où $\tau = \frac{H}{L}$ représente le temps de résidence du liquide à chaque étage, $\delta = \frac{aG}{L}$ est le coefficient d'extraction et $K = \frac{G}{L}$ est le ratio gaz–liquide.

(a) Afin d'analyser ce procédé d'absorption à l'état stationnaire, nous devons considérer $\frac{dx_k}{dt} = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Exprimer le système résultant sous la forme $A\vec{x} = \vec{b}$, pour le cas particulier $n = 4$ (ne pas résoudre).

(b) Considérons le cas où $a = \frac{3}{4}$, $b = 0$, $K = \frac{3}{2}$, $x_f = \frac{1}{100}$ et $y_f = \frac{6}{100}$. Calculer la factorisation LU la plus adéquate. la matrice A obtenue en (a), *sans* permutation de ligne. Justifier votre réponse et indiquer clairement chaque équation utilisée pour calculer chaque composante de L et de U. Faites vos calculs soit en conservant les résultats intermédiaires sous forme de fractions, soit en notant les fractions sous forme décimale avec 4 chiffres après la virgule $(d_1, d_2d_3d_4d_5)$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

267. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Donner la représentation compacte de la factorisation LU de Doolittle de A avec pivotage partiel ;

(b) Résoudre le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ où

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 23 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

268. En arithmétique flottante à 2 chiffres en base 10, calculer la factorisation LU de Doolitle de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7,0 & 6,0 \\ 9,0 & 8,0 \end{bmatrix}$$

sans pivoter. Comparer le produit LU avec la matrice A de départ. Répéter en appliquant le pivotage partiel.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

269. Lors du calcul d'une spline cubique avec h constant, on rencontre la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 2 & 1/2 & \\ & 1/2 & 2 & 1/2 \\ & & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Donner les facteurs L et U suivant l'algorithme de Thomas ;

(b) En déduire le déterminant de la matrice de départ ;

(c) Si le membre de droite est

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 3 \\ 2,5 \end{bmatrix},$$

quelle est la solution du système ?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

270. Les matrices suivantes sont toutes non-singulières et de très grande taille $n \times n$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & (0.1)^1 & (0.1)^2 & \cdots & (0.1)^{n-1} \\ 1 & (0.2)^1 & (0.2)^2 & \cdots & (0.2)^{n-1} \\ 1 & (0.3)^1 & (0.3)^2 & \cdots & (0.3)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (n/10)^1 & (n/10)^2 & \cdots & (n/10)^{n-1} \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} -n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice, identifier la factorisation LU la plus appropriée parmi les factorisations suivantes:

(a) la décomposition de Crout;

(b) la décomposition de Cholesky;

(c) l'algorithme de Thomas.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

271. Soit B une matrice inversible, donnée sous la forme:

$$B = LL^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le déterminant de la matrice B de la façon qui nécessite le moins de calculs possible.

(b) Soit $\vec{b} = (27 \quad 5 \quad 10)^T$, sachant que la solution du système linéaire

$$B\vec{x} = \vec{b} \quad \text{est} \quad \vec{x} = (3 \quad -1 \quad 1)^T,$$

sans calculer la matrice B^2, résoudre le système linéaire $B^2\vec{y} = \vec{b}$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

272. Certaines matrices symétriques mènent à une factorisation de la forme LL^t, où L est une matrice triangulaire inférieure.
   (a) Expliquer pourquoi on s'intéresse à ce cas particulier de la factorisation LU.
   (b) Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 9x + 3y + 3z = 15; \\ 3x + 5y + z = 9; \\ 3x + y + 5z = 9, \end{cases}$$

   à l'aide d'une factorisation LL^t.

   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

273. Soit B une matrice symétrique inversible, donnée sous la forme:

$$B = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer le déterminant de la matrice B de la façon qui nécessite le moins de calculs possible.
   (b) Soit $\vec{b} = (-6 \quad -7 \quad 1)^T$, **sans calculer la matrice** B, résoudre le système linéaire $B\vec{x} = \vec{b}$.

   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Conditionnement matriciel

274. Une matrice $A_{3\times 3}$ possède les propriétés suivantes:
   (a) $\|A\|_\infty = 3,5$
   (b) La solution de $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 83,077 \\ 156,92 \\ -57,692 \end{pmatrix}$
   (c) La solution de $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 64,615 \\ -115,38 \\ 41,538 \end{pmatrix}$
   (d) La solution de $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0,461\,54 \\ -1,538\,4 \\ 1,153\,8 \end{pmatrix}$

   En déduire le conditionnement de A.

   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

275. Soit le système d'équations algébriques linéaires

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

   et $\vec{x}^*$ une solution numérique de ce système. Dire si l'énoncé suivant est vrai ou faux et commenter: « la valeur de l'erreur relative liée à la solution numérique est nécessairement petite si la norme du résidu est petite ».
   [*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

276. Si nous multiplions le système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ par une matrice diagonale non singulière D:

(a) Est-ce que la solution $\vec{x}$ sera modifiée et dire pourquoi.

(b) Est-ce que cette opération peut nous permettre de réduire le conditionnement de la matrice de ce système linéaire et expliquer pourquoi. Donner un exemple qui appuiera votre réponse.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

277. Soit A une matrice inversible dont la décomposition LU de Doolitle, obtenue sans permutation de ligne, est donnée sous forme compacte par:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le déterminant de la matrice A.

(b) Calculer la deuxième colonne de A^{-1} en vous servant de la décomposition LU.

(c) Sachant que $Cond(A) = 6$ selon la norme matricielle $\| \,.\, \|_\infty$, calculer $\|A^{-1}\|_\infty$.

(d) On a résolu en arithmétique flottante un système linéaire de la forme $A\vec{x} = \vec{b}$ et on a obtenu une approximation $\vec{x^*}$ de $\vec{x}$ vérifiant $\|\vec{b} - A\vec{x^*}\|_\infty = 10^{-10}$. Doit-on conclure que $\vec{x^*}$ est nécessairement une bonne approximation?

(e) Soit B une matrice inversible différente de la matrice identité ($B \neq I$). Sachant que la solution du système linéaire

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{est} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

trouver la solution de

$$B^2\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

278. Soit A une matrice inversible de dimensions 3×3 dont la décomposition LU de Crout, obtenue avec permutations de lignes, est donnée sous forme compacte par:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad \vec{O} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le déterminant de A et trouver A.

(b) Résoudre le système $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la décomposition LU.

(c) Sachant que les deux premières colonnes de A^{-1} sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -3 \end{pmatrix}$, déterminer la troisième colonne de A^{-1} sans résoudre de système supplémentaire.

(d) Calculer le conditionnement de la matrice A en utilisant la norme $\| \,.\, \|_\infty$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

279. Soit la matrice A dont les coefficients sont donnés par:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i < j; \\ \ \ 1 & \text{si} \quad i = j; \\ \ \ 0 & \text{si} \quad i > j, \end{cases}$$

et dont l'inverse A^{-1} a comme coefficients

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1} & \text{si} \quad i < j; \\ 1 & \text{si} \quad i = j; \\ 0 & \text{si} \quad i > j. \end{cases}$$

(a) Quelles seront les matrices L, U et P (ou le vecteur de permutation $\vec{O}$) si on applique l'algorithme de factorisation LU de Crout à la matrice A? Quels seront les pivots?

(b) Calculer le conditionnement de la matrice A de dimension $n \times n$ en utilisant la norme $\| \, \|_1$ (indice: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^n - 1$). Vérifiez votre résultat dans le cas où la matrice A est de dimension 4×4.

(c) En résolvant le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ où $\vec{b} = (1, 1, ..., 1)^T$, quel doit être l'ordre de grandeur du vecteur résidu $\vec{r}$ pour que l'erreur relative

$$E_r(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|_1}{\|\vec{x}\|_1}$$

soit au plus ε (la précision machine), pour une dimension $n \times n$ donnée. Qu'en est-il dans le cas où on travaille en simple précision IEEE avec une matrice A de dimension $10^6 \times 10^6$.

(d) À la lumière de cet exercice, commentez l'énoncé suivant: « une matrice mal-conditionnée est presque singulière ».

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

280. On considère le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ suivant:

$$\begin{bmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,217 \\ 0,254 \end{bmatrix} \tag{9}$$

dont la solution exacte est $\vec{x} = [1 \ {-1}]^T$. En résolvant le système (9) à l'aide d'une méthode numérique, on a trouvé une solution approximative $\vec{x}^*$ dont le résidu est donné par

$$\vec{b} - A\vec{x}^* = \begin{bmatrix} 0,000\,001 \\ 0,0 \end{bmatrix}.$$

Sachant que $\|A^{-1}\|_\infty = 1,693 \times 10^6$, est-ce que la solution approximative $\vec{x}^*$ vous semble acceptable? Justifier votre réponse.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

281. Soit $\vec{x^*}$ une solution numérique du système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, telle que $\frac{\|\vec{r}\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} \le 10^{-5}$ où $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x^*}$ représente le résidu associé à $\vec{x^*}$. Si on accepte une solution sous l'hypothèse que la valeur de l'erreur relative $E_r(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}-\vec{x^*}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \le 10^{-4}$, quelle doit être la valeur maximale du conditionnement de A pour accepter $\vec{x^*}$?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

282. Soit le système linéaire

$$\begin{pmatrix} -0,149\times 10^3 & -0,500\times 10^2 & -0,154\times 10^3 \\ 0,537\times 10^3 & 0,180\times 10^3 & 0,546\times 10^3 \\ -0,270\times 10^2 & -0,900\times 10^1 & -0,250\times 10^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1\times 10^1 \\ 0,2\times 10^1 \\ 0,3\times 10^1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que tous les chiffres de chaque composante a_{ij} de la matrice A sont significatifs. Estimer l'erreur relative sur la solution $\vec{x}$ de ce système linéaire à l'aide de la norme $\| \quad \|_\infty$, sachant que $\|A^{-1}\|_\infty = 515,6667$.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

283. Le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{12} \\ \frac{77}{60} \\ \frac{57}{60} \\ \frac{319}{420} \end{pmatrix}$$

possède la solution exacte $\vec{x} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$. En utilisant l'arithmétique flottante à 3 chiffres, on a résolu le système pour obtenir l'approximation $\vec{x^*} = (1,11 \quad 0,228 \quad 1,95 \quad 0,797)^T$.
Sachant que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}$$

Calculer l'erreur relative en utilisant la norme $\| \, \|_\infty$ et expliquer pourquoi les résultats sont si mauvais.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

284. On a effectué la décomposition LU d'une matrice A donnée à l'aide de Matlab et on a obtenu les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où P est la matrice de permutation.

(a) Calculer la troisième colonne de A^{-1} en indiquant tous les détails de calcul.

(b) En connaissant les 3 autres colonnnes de A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \boxed{?} & 3 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \boxed{?} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \boxed{?} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \boxed{?} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

calculer le conditionnement de la matrice A en utilisant la norme $\| \, \|_1$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

285. Une factorisation matricielle est utilisée pour résoudre un système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, où A est de dimensions 2×2, sur un ordinateur pour lequel *la précision machine* est de l'ordre de 10^{-16}. Sachant que $\|A\|_\infty \simeq 10^4$, $\|A^{-1}\|_\infty \simeq 10^6$ et que

$$\vec{x^*} = \begin{pmatrix} 1,234\,567\,890\,123\,456 \\ 0,000\,012\,345\,678\,901 \end{pmatrix},$$

combien de chiffres significatifs pouvons-nous nous attendre à obtenir pour chaque composante de cette approximation?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

286. Soit la matrice inversible 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} 100 & -1 \\ 0,1 & 0,001 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer le conditionnement de la matrice A en norme $\|.\|_\infty$.

(b) Soit B la matrice obtenue à la suite de la mise à l'échelle (suivant les lignes) de la matrice A. Trouver B et calculer son conditionnement en norme $\|.\|_\infty$.

(c) On désire résoudre numériquement le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$. Proposer une démarche de résolution qui soit numériquement stable.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthodes itératives

287. Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 = 3; \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 9, \end{cases}$$

(a) Faire 2 itérations de la méthode de Jacobi en partant du point $\vec{x}_0 = (0\,0\,0)^T$.

(b) Faire 1 itération de la méthode de Gauss-Seidel en partant du point $\vec{x}_0 = (0\,0\,0)^T$.

(c) Réordonner les équations de façon à assurer la convergence des deux métho–des.

(d) Soit le système linéiare $A\vec{x} = \vec{b}$ suivant:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Écrire la matrice d'itérations T_J de la méthode de Jacobi et en déduire son rayon spectral. Est-ce que la méthode Jacobi converge pour ce système linéaire?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

288. Soit le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer la solution exacte $\vec{x} = (x_1\, x_2)^T$ du système linéaire.

(b) Faire quelques itérations de la méthode de Gauss-Seidel en partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0 = (0\ 0)^T$ pour vérifier que l'algorithme diverge.

(c) Proposer une simple modification du système qui conduise à la convergence de la méthode de Gauss-Seidel en partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0 = (0\ 0)^T$. Verifier en itérant jusqu'à ce que $\|\vec{x}^k - \vec{x}\|_\infty < 10^{-1}$.

(d) Montrer en utilisant deux résultats différents du cours que la méthode de Jacobi converge aussi pour le système modifié obtenu en (c). **(Ne pas faire d'itérations de la méthode de Jacobi).**

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

289. Soit le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où a est un paramètre réel tel que $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(a) Pour $a = -\frac{1}{2}$, faire une itération de la méthode de Gauss-Seidel en partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0 = (0\ 0\ 0)^T$.

(b) Pourqu'elles valeurs de a, la convergence de la méthode de Gauss-Seidel est-elle assurée?

(c) Pour $a = -\frac{1}{2}$, donner la matrice d'itérations T_J de la méthode de Jacobi. Sachant que la matrice T_J possède les valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, est-ce que la méthode **Gauss-Seidel** converge pour ce système linéaire?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

290. Soit $\vec{x} = (1 \quad 1)^T$ la solution du système linéaire d'équations algébriques suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

En partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0 = (0 \quad 0)^T$, on a obtenu successivement avec la méthode de Jacobi

$$\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{x}^2 = \begin{pmatrix} -49 \\ -49 \end{pmatrix}, \vec{x}^3 = \begin{pmatrix} 501 \\ 251 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}^4 = \begin{pmatrix} -2499 \\ -2499 \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi la méthode de Jacobi semble diverger.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

291. Soit A une matrice triangulaire inférieure de dimensions 2×2, dont les coefficients de la diagonale sont non nuls ($A_{ii} \neq 0$). Montrer que la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, converge en une itération quelle que soit l'approximation initiale $\vec{x}^0$ utilisée. Qu'en est-il d'une matrice de dimensions $n \times n$?
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

292. Soit le système d'équations algébriques suivant:

$$\left\{\begin{aligned} 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= -11; \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= -11; \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6; \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25. \end{aligned}\right.$$

(a) Pourquoi ne peut-on pas utiliser directement les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel avec ce système linéaire?

(b) Réordonner les équations de telle sorte que la matrice associée soit à diagonale strictement dominante.

(c) Calculer une itération des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, en partant du point $\vec{x}^0 = (0\,0\,0\,0)^T$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

293. Soit le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Pourquoi ne peut-on pas utiliser directement les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel avec ce système linéaire?

(b) Réordonner les équations de façon à assurer la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-seidel.

(c) Faire 1 itération de la méthode de Jacobi en partant du point $\vec{x}^0 = (0\ 0\ 0\ 0)^T$.

(d) Faire 1 itération de la méthode de Gauss-Siedel en partant du point $\vec{x}^0 = (0\ 0\ 0\ 0)^T$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

294. Soit la matrice A et le membre de droite $\vec{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & -4 \\ 3 & -4 & 18 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer la factorisation LU *la plus adéquate* de A Justifier votre choix ;

(b) Utiliser votre factorisation pour calculer la solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$;

(c) La méthode de Gauss-Seidel appliquée au système $A\vec{x} = \vec{b}$ sera-t-elle convergente si le point de départ $\vec{x}^0$ est bien choisi ?

(d) Effectuer deux itérations de la méthode de Gauss-Seidel à partir de $\vec{x}^0 = (1 \quad 1 \quad 0)^T$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Systèmes d'équations algébriques non linéaires et méthode de Newton

295. On désire utiliser la méthode de Newton pour résoudre le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 2; \\ x_1 x_2 = 2. \end{cases}$$

Dire si l'estimé initial $(x_1^0, x_2^0) = (1, 1)$ est un bon choix et justifier votre réponse.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

296. Soit le système d'équations non-linéaires:

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 &= 4; \\ x - y^2 &= -1. \end{aligned}$$

(a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de ce système.

(b) Écrire le système linéaire à résoudre pour trouver une approximation de (x, y) de façon itérative. Ne pas résoudre le système.

(c) Expliquer pourquoi il serait contre-indiqué d'utiliser le point $(-1, 0)$ comme approximation initiale.

(d) Est-ce qu'on pourrait contourner le problème en démarrant avec l'approximation initiale $(-1 + \varepsilon, 0 + \varepsilon)$, où ε est la précision machine? Pour vous aider à répondre à cette question, trouver une borne supérieure de l'erreur relative $\frac{\|\vec{e}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

297. On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = & +1; \\ y^2 - z^2 & = & +1; \\ y - z^2 & = & -1. \end{cases}$$

(a) Écrire le système linéaire à résoudre à chaque itération lorsqu'on utilise la *méthode de Newton*.

(b) i. Montrer que ce système d'équations algébriques a $\vec{x} = (0 \quad -1 \quad 0)^T$ comme solution. Donner une interprétation géométrique à cette solution.

ii. Nous avons utilisé la fonction `sysnl` de la bibliothèque numérique du cours pour résoudre ce sytème d'équations, en prenant comme approximation initale $\vec{x}_{(0)} = (1 \ \ 1 \ \ 1)^T$. Nous observons les résultats numériques suivants :

```
Arguments initiaux :
------------------
Nombre maximal d'iterations : nmax =      15
Critere d'arret :             epsilon =  1.000000E-06
Differences finies :          h =  1.000000E-03

Iter.                   x_i                      ||R(x_i)||

  0   1.000000E+00   1.000000E+00   1.000000E+00   2.4495E+00
  1  -3.500000E+00   3.000000E+00   2.500000E+00   2.6653E+01
  2  -8.357143E-01   2.200000E+00   1.890000E+00   8.1235E+00
  3   3.185964E+00   2.011765E+00   1.741763E+00   1.6231E+01
  4   6.513373E-01   2.000046E+00   1.732091E+00   6.4246E+00
  5  -4.280240E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   2.4320E+01
  6  -1.439225E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   8.0714E+00
  7   1.364843E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   7.8628E+00
  8  -1.515633E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   8.2971E+00
  9   1.221555E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   7.4922E+00
 10  -1.845108E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   9.4044E+00
 11   7.033674E-01   2.000000E+00   1.732051E+00   6.4947E+00
 12  -3.913513E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   2.1316E+01
 13  -1.190181E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   7.4165E+00
 14   1.925533E+00   2.000000E+00   1.732051E+00   9.7077E+00
 15  -5.952434E-01   2.000000E+00   1.732051E+00   6.3543E+00

  Il n'y a pas de convergence apres 15 iterations.
```

Expliquer pourquoi on observe ce comportement. Est-ce qu'on pourrait obtenir la convergence de l'algorithme en changeant de condition initiale? Pourquoi?

iii. Est-ce qu'on pourrait améliorer la performance de la méthode de Newton en utilisant plutôt `h = 1.000000E-12`? Pourquoi?

(c) Un programmeur/numéricien inexpérimenté a programmé son implémentation de la méthode de Newton en utilisant l'évaluation numérique des composantes de la matrice Jacobienne. Voici une partie de son programme MATLAB :

```
for i =1: nbeq
  acc = zeros(nbeq,1);
  acc(i) = h;
  jac(:,i) = (feval(f,x0 + acc) - feval(f,x0))./h;
end
```

Identifier la méthode numérique utilisée et évaluer le choix qui a été fait. Proposer une alternative qui sera « meilleure » et réécrire la commande MATLAB qui doit être modifiée.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

298. (a) En prenant comme approximation initiale $\vec{x}^0 = (3 \quad -3)^T$ faire une itération de la méthode de Newton pour trouver une nouvelle approximation $\vec{x}^1$ de la solution du

système non linéaire :

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_1 = 0; \\ \\ x_1^2 - 2x_2^2 + 7x_1 = 0. \end{cases}$$

(b) En comparant avec la solution analytique du système non linéaire, on a obtenu les valeurs suivantes pour l'erreur $\|\vec{x} - \vec{x}^k\|_\infty$:

k	$\|\vec{x} - \vec{x}^k\|_\infty$
3	$0,666667 \times 10^{-1}$
4	$0,392157 \times 10^{-2}$
5	$0,152590 \times 10^{-4}$
6	$0,23283 \times 10^{-9}$

Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton dans ce cas?

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

299. On désire utiliser la méthode de Newton pour résoudre le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} 4x_1^2 + x_2^2 = 4; \\ 2x_1^2 - x_2 = 2. \end{cases}$$

Est-ce que la méthode de Newton va converger rapidement vers la racine $\vec{x} = (1\ 0)^T$ de ce système non linéaire? Justifier votre réponse.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

300. On considère la quadrature de Gauss à 2 points

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt \simeq w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2).$$

(a) Soit le système non linéaire :

$$\begin{cases} w_1 + w_2 & = & 2; \\ w_1 t_1 + w_2 t_2 & = & 0; \\ w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 & = & \frac{2}{3}; \\ w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 & = & 0. \end{cases} \tag{10}$$

Montrer que les constantes w_1, w_2, t_1 et t_2 doivent satisfaire le système non linéaire (10) pour que la quadrature de Gauss à 2 points soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur où égal à 3.

(b) On désire résoudre le système non linéaire (10) par la méthode de Newton. Donner le système d'équations linéaires à résoudre à la première itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $(w_1^0,\ w_2^0,\ t_1^0,\ t_2^0) = (1,\ 1,\ -1,\ 1)$. (**Ne pas résoudre le système linéaire**).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

301. Soit la matrice symétrique de dimensions 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Afin de calculer les valeurs propres de la matrice A, ainsi que les vecteurs propres unitaires correspondants, on se propose de résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} A\vec{x} & = & \lambda\vec{x}, \\ \|\vec{x}\|_2^2 & = & 1. \end{cases}$$

(a) Pour $\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, écrire le système non linéaire sous la forme:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \lambda) & = & 0; \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \lambda) & = & 0; \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \lambda) & = & 0; \\ f_4(x_1, x_2, x_3, \lambda) & = & 0. \end{cases}$$

(b) Donner le système d'équations linéaires à résoudre à la première itération de la méthode de Newton, pour l'approximation initiale $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \lambda^0) = (1, 1, 1, 1)$. (**Ne pas résoudre le système linéaire**).

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

302. On considère le système non-linéaire

$$\begin{cases} y - \sin(\pi x) = 0 \\ y + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions et leur position position approximative sur l'intervalle $[-1, 1]$.

(b) Donner le système d'équations *linéaires* à résoudre à la première itération de la *méthode de Newton*, pour l'approximation initiale $(x_0, y_0) = (1/2, 1)$ (ne pas résoudre le système linéaire).

(c) Est-ce que la méthode de Newton va converger rapidement vers la racine $(1, 0)$ de ce système d'équations non linéaires? *Justifier* votre réponse.

(d) Déterminer et identifier graphiquement le lieu des approximations initiales (x^0, y^0) pour lesquelles la méthode de Newton ne fonctionne pas.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

303. On considère le système non-linéaire

$$\begin{cases} ye^x - 2 = 0; \\ y + x^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

(a) Faire une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $(x^0, y^0) = (0, 1)$.

(b) Est-il possible de prendre l'approximation initiale $(x^0, y^0) = (1, 2)$?

(c) Déterminer et identifier graphiquement la position des approximations initiales (x^0, y^0) pour lesquelles la méthode de Newton ne fonctionne pas.

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

304. Soit A une matrice inversible de dimensions $n \times n$. Montrer que la méthode de Newton (pour les systèmes non linéaires) appliquée au système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ converge en 2 itérations quelle que soit l'approximation initiale $\vec{x}^0$ utilisée.
[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

305. La matrice de Hilbert de dimension 3 est donnée par:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

(a) La décomposition LU de *Crout* de la matrice H, obtenue sans permutation de lignes, est partiellement donnée sous forme compacte par

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & ? \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & ? \end{bmatrix}.$$

Calculer les deux éléments manquants et en déduire le déterminant de H.

(b) La matrice H possède l'inverse

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & ? \\ -36 & 192 & ? \\ 30 & -180 & ? \end{bmatrix}.$$

En utilisant la décomposition LU obtenue en (a), compléter le calcul de la matrice H^{-1} et en déduire le conditionnement de la matrice H (on utilisera la norme $\| \quad \|_\infty$).

(c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et en (b), effectuer la première itération de la méthode de Newton, en utilisant l'approximation initiale $\vec{x}^0 = (0 \quad 0 \quad 0)^T$, pour le système non linéaire:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + x_2 x_3 - 1 = 0; \\ \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} + x_1 x_3 - \frac{1}{2} = 0; \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{5} + x_1 x_2 - \frac{1}{3} = 0. \end{cases}$$

[*Indice*] [*Solution*] [*TdM*]

Indices

Introduction et analyse d'erreur

Définitions, développement de Taylor et erreur de troncature

1. Définitions de l'erreur absolue, des chiffres significatifs et de l'erreur relative.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

2. Définition des chiffres significatifs.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

3. Calculer le ratio des erreurs absolues.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

4. Calculer le ratio des erreurs absolues.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

5. Calculer le ratio des erreurs absolues.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

6. Calculer le ratio des erreurs absolues.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

7. Utiliser un développement de Taylor approprié de $\sin x$.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

8. Définition du développement de Taylor $P_n(t)$
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

9. Donner un contre-exemple.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

10. Utiliser un développement de Taylor approprié.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

11. Utiliser un développement de Taylor approprié des fonctions $\sin x$ et $\cos x$.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

12. Définition du développement de Taylor de la forme $P_n(x)$
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

13. Définitions de l'erreur de troncature, du développement de Taylor et des chiffres significatifs.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

14. Définitions de l'erreur de troncature, du développement de Taylor et des chiffres significatifs. Poser $x = \pm 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots \times 10^l$ avec $d_1 \neq 0$ et $l = 0, -1, -2, \cdots$.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

15. (a) Utiliser un développement de Taylor approprié de e^x.
    (b) Définitions de l'erreur absolue, des chiffres significatifs et de l'erreur relative.

(c) Concept d'ordre de précision.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

16. (a) Définitions du développement de Taylor et des chiffres significatifs.
    (b) Concept d'ordre de précision.
    (c) Le développement de Taylor est une série à signes alternés. La valeur absolue du prochain terme de la série est une borne supérieure de l'erreur.
    (d) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.
    (e) Obtenir le développement de Taylor de la fonction à partir des développements de Taylor des fonctions $\ln(x+1)$ et e^x.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

17. Simplement suivre les indications.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

18. Simplement suivre les indications.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

19. (a) Définition du développement de Taylor.
    (b) Définition de l'erreur de troncature, du développement de Taylor.
    (c) Chiffres significatifs.
    (d) Concept d'ordre de précision.
    (e) Concept d'ordre de précision.
    (f) Effectuer un changement de variable et une integration.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

20. (a) Définition du concept d'ordre de précision.
    (b) Définition du développement de Taylor.
    (c) Définitions de l'erreur de troncature, du développement de Taylor et des chiffres significatifs.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

21. Concept d'ordre de précision du développement de Taylor.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

22. Questions (a) et (b) : simplement suivre les indications.
    Question (c) : concept d'ordre de précision du développement de Taylor.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

23. Simplement suivre les indications.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

24. Questions (a), (b) et (c) : simplement suivre les indications.
    Question (d) : concept d'ordre de précision du développement de Taylor.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

25. Questions (a), (b), (c) et (d) : simplement suivre les indications.
Question (e) : définition de l'erreur de troncature du développement de Taylor.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

26. (a) Le développement de Taylor est une série à signes alternés. La valeur absolue du prochain terme de la série est une borne supérieure de l'erreur.
(b) Définition du développement de Taylor.
(c) Définition de l'erreur de troncature du développement de Taylor et des chiffres significatifs.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

27. (a) Obtenir le développement de Taylor de $\frac{1}{1+x^2}$ à partir d'un développement de Taylor aproprié de $\frac{1}{1+x}$ et suivre les indications.
(b) Définition des chiffres significatifs.
(c) Concept d'ordre de précision.
(d) Concept d'ordre de précision du développement de Taylor.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

28. Obtenir le développement de Taylor de $f(x)$ à partir d'un développement de Taylor approprié de $\sin t$ et suivre les indications.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

29. (a) Obtenir le développement de Taylor de $f(x)$ à partir d'un développement de Taylor approprié de $\sin t$.
(b) Suivre la même démarche qu'en (a) pour obtenir une borne supérieure de l'erreur.
Le développement de Taylor est une série à signes alternés. Le prochain terme de la série est une borne supérieure de l'erreur.
(c) La borne supérieure de l'erreur ne dépend que de n.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

30. Obtenir le développement de Taylor de $(1-x^2)^{-3/2}$ à partir d'un développement de Taylor approprié de $(1-x)^{-3/2}$ et en déduire le développement de Taylor des fonctions $h(x)$ et $g(x)$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Norme IEEE et erreur de représentation

31. Opérations risquées.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

32. Opérations risquées.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

33. Opérations risquées.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

34. Opérations risquées.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

35. Définition de la précision machine en double précision $IEEE - 754$.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

36. Concepts des erreurs d'arrondi et de troncature.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

37. Arithmétique flottante.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

38. Arithmétique flottante.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

39. Arithmétique flottante.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

40. Arithmétique flottante.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

41. Erreur de représentation ou d'arrondi.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

42. (a) Arithmétique flottante et opérations risquées.

    (b) Opérations risquées.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

43. Opérations risquées.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

44. Opérations risquées.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

45. Concept de propagation des erreurs et définition des chiffres significatifs.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

46. Concept de propagation des erreurs et définition des chiffres significatifs.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

47. Concept de propagation des erreurs et définition des chiffres significatifs.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

48. Concept de propagation des erreurs et définition des chiffres significatifs.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

49. Concept de propagation des erreurs et définition des chiffres significatifs.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

50. Concept de propagation des erreurs et définition des chiffres significatifs.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

51. Opérations risquées.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

52. L'algorithme de Horner.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

53. Opérations risquées et développement de Taylor.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

54. Opérations risquées.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

55. (a) Définition du développement de Taylor.
    (b) Notion d'approximation.
    (c) Notation flottante.
    (d) Opérations risquées.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

56. (a) Définitions du développement de Taylor et de l'erreur de troncature.
    (b) Définition du développement de Taylor et concept d'ordre de précision.
    (c) Obtenir le développement de Taylor de $g(x)$ à partir du développement de Taylor approprié des fonctions e^x et $\ln(1+x)$.
    (d) Opérations risquées.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Interpolation

Interpolation polynomiale

57. Déterminer le polynôme de degré minimal qui vérifie les 3 conditions.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

58. Déterminer le polynôme de degré 2 qui vérifie les 3 conditions.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Interpolation de Lagrange

59. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (b) Définition du polynôme de Taylor.
    (c) Déterminer le polynôme de degré 2 qui vérifie les 3 conditions.
    (d) Concept de précision du polynôme de Taylor et de l'interpolation polynomiale.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

60. Définitions des polynômes de Lagrange de degré 1.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

61. Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

62. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (b) Concepts de l'interpolation et de l'extrapolation.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

63. (a) Méthode de la matrice de Vandermonde.
    (b) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (c) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (d) Concept de précision de l'interpolation polynomiale.
    (e) Définition du polynôme d'interpolation.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

64. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (b) Concept d'interpolation inverse.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

65. (a) Interpolation de Lagrange.
    (b) Définition des chiffres significatifs.
    (c) Définition de la borne supérieure de l'erreur d'interpolation.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

66. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (b) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (c) La méthode de la matrice de Vandermonde.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

67. Borne supérieure de l'erreur d'interpolation.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

68. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (b) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (c) Borne supérieure de l'erreur d'interpolation.
    (d) Concept d'interpolation polynomiale par morceaux et borne supérieure de l'erreur d'interpolation.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Interpolation de Newton

69. (a) Interpolation de Newton.
    (b) Approximation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton.

(c) Déterminer le polynôme de degré minimal qui vérifie les 4 conditions.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

70. (a) Définition des différences divisées.
    (b) Interpolation de Newton.
    (c) Approximation de l'erreur d'interpolation à l'aide de la méthode de Newton.
    (d) Définition du polynôme d'interpolation.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

71. (a) Estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton.
    (b) Définition de l'erreur d'interpolation.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

72. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (b) Définition de l'erreur d'interpolation.
    (c) Estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de la méthode de Newton.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

73. (a) Concept d'interpolation d'inverse.
    (b) Définition de l'erreur d'interpolation.
    (c) Estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de la méthode de Newton.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

74. Estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

75. (a) Concept d'interpolation d'inverse.
    (b) Estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

76. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
    (b) Approximation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton.
    (c) La fonction $f(x)$ passe par les 4 points.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Splines cubiques

77. Définition de la spline cubique naturelle.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

78. Poser $p_1'(x_0) = f_0'$ et $p_n'(x_n) = f_n'$.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

79. Définition de la spline cubique naturelle.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

80. (a) Définition de la spline cubique naturelle.
    (b) Définition de la spline cubique.
    (c) Définition de la spline cubique.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

81. (a) Définition de la spline cubique naturelle.
    (b) Définition des chiffres significatifs.
    (c) Évaluer la dérivée seconde du polynôme de degré 3 aux extrémités de l'intervalle.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

82. (a) Définition de la spline cubique.
    (b) Poser $p_1'(0{,}0) = 1$ et $p_3'(3{,}0) = 5$.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

83. Définition de la spline cubique.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

84. Définition de la spline cubique.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

85. (a) Définition de la spline cubique.
    (b) Question iii) : Poser $p_1'(0{,}004) = a$ et $p_3'(0{,}020) = b$.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

86. (a) Évaluer $f''(x)$ en $x = 0$ et $x = 1$.
    (b) Définition de la spline cubique.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

87. (a) Poser $p_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.
    (b) Utiliser la formule du polynôme de Lagrange de degré 1.
    (c) Suivre les indications.
    (d) Suivre les indications.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

88. (a) Poser $y_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2$ pour $i = 1, 2$ et vérifier les hypothèses.
    (b) Déterminer les fonctions $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
    (c) Poser $y_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2$ pour $i = 1, 2, 3$ et vérifier les hypothèses.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

89. (a) Interpolation de Newton.
    (b) Estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton.
    (c) Poser $p_1'(0) = 1$.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

90. (a) Définition des différences divisées.

(b) Interpolation de Newton.

(c) Estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton.

(d) Poser $p_1'(0) = 0$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

91. (a) Interpolation de Newton.

(b) Estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton et définition des chiffres significatifs.

(c) Définition du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 3.

(d) Définition de la spline cubique naturelle.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

92. (a) i. Définition des formules de différences divisées.

ii. Interpolation de Newton et estimation de l'erreur d'interpolation à l'aide de l'interpolation de Newton.

(b) Définition de la spline cubique naturelle.

(c) Définitions des splines cubique et quadratique.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Différentiation et intégration numérique

Différentiation numérique

93. $f''(x) \simeq \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

94. Conserver les termes jusqu'au degré 5 dans vos développements de Taylor.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

95. Conserver les termes jusqu'au degré 4 dans vos développements de Taylor.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

96. Utiliser deux formules aux différences d'ordre 2 appropriées.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

97. (a) Conserver les termes jusqu'au degré 4 dans vos développements de Taylor.

(b) Définition de l'ordre de précision.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

98. (a) $|a - b| \leq |a| + |b|$.

(b) Concept de précision des formules de différentiation numérique.

(c) Résoudre $g'(h) = 0$ et appliquer la définition des chiffres significatifs.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

99. (a) Calculer le ratio des erreurs absolues.
    (b) Conserver les termes jusqu'au degré 5 dans vos développements de Taylor.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

100. (a) Calculer le ratio des erreurs absolues.
     (b) Conserver les termes jusqu'au degré 5 dans vos développements de Taylor.
     (c) Concept de précision des formules de différentiation numérique.

     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

101. Conserver les termes jusqu'au degré 4 dans vos développements de Taylor.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

102. Conserver les termes jusqu'au degré 3 dans vos développements de Taylor.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Quadratures de Newton-Cotes

103. $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c$.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

104. $\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

105. Le ratio des erreurs absolues.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

106. Déterminer une borne supérieure du terme de l'erreur de la formule des trapèzes composée et appliquer la définition des chiffres significatifs.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

107. (a) Donner un contre-exemple.
     (b) $\tan(0) = 0$.

     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

108. Déterminer une borne supérieure du terme de l'erreur de la formule de Simpson $\frac{1}{3}$.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

109. Utiliser le terme de l'erreur de la formule de Simpson $\frac{3}{8}$ composée.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

110. Appliquer la formule de la quadrature de Simpson $\frac{1}{3}$ simple et utiliser des formules aux différences d'ordre 2 appropriées.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

111. Utiliser une combinaison de formules de quadrature de Newton-Cotes.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

112. Utiliser une formule ou une combinaison de formules de quadrature de Newton-Cotes.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

113. Calculer le rapport de la différence entre les solutions.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

114. Suivre les indications.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Quadratures de Gauss

115. $\ln x$ n'est pas defini en $x = 0$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

116. Définition du degré de précision d'une quadrature de Gauss-Legendre à n points.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

117. Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

118. Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

119. Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

120. Faire un changement de variable et appliquer la formule de Gauss à 2 points.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

121. (a) Appliquer la formule avec $h = 0{,}5$.
   (b) Trouver une borne supérieure du terme d'erreur associé à la méthode du trapèze composée avec $f(x) = e^{x^2}$.
   (c) Appliquer la formule donnée.
   (d) Concept d'ordre de précision et de degré de précision d'une quadrature.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

122. La fonction $f(u) = \frac{1}{\sqrt{8 \sin u - u}}$ n'est pas définie en $u = 0$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

123. (a) Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
   (b) Appliquer la formule.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

124. Poser respectivement $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ puis approcher l'intégrale avec une quadrature de Gauss à 2 points.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

125. (a) Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
   (b) Appliquer la formule pour $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
   (c) Appliquer la formule de Simpson $\frac{1}{3}$ simple.

(d) Définition des chiffres significatifs et $\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) + c$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

126. (a) Définition du degré de précision d'une quadrature.
   (b) Définition du degré de précision d'une quadrature.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

127. (a) Apppliquer la formule.
   (b) Apppliquer la formule.
   (c) Utiliser le terme d'erreur de la formule du trapèze simple et la définition des chiffres significatifs.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

128. Effectuer un changement de variable et appliquer la formule de Gauss à 2 points.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

129. Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

130. Concepts d'ordre de précision et de degré de précision d'une quadrature.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

131. (a) Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
   (b) Appliquer la formule.
   (c) Faire un changement de variables.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

132. (a) Définir le pas h et appliquer la quadrature du trapèze composée.
   (b) Utiliser le terme de l'erreur de la quadrature du trapèze composée.
   (c) Concepts d'ordre de précision et de degré de précision d'une quadrature.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

133. (a) Définition du degré de précision.
   (b) Utiliser une méthode directe.
   (c) Définition du degré de précision.
   (d) Appliquer la formule de quadrature.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

134. Définition du degré de précision.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

135. Définition du degré de précision de la quadrature de Gauss-Legendre à 5 points.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

136. Définition du degré de précision de la quadrature de Gauss-Legendre à 10 points.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

137. Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

138. (a) Définition du degré de précision d'une formule de quadrature.
(b) Prendre $g(t) = t^3$.
(c) Faire un changement de variables et appliquer la formule de quadrature développée en (b).
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Extrapolation de Richardson

139. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
(b) Utiliser une formule aux différences d'ordre 1 appropriée.
(c) Utiliser une formule aux différences d'ordre 2 appropriée.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

140. (a) Conserver les termes jusqu'au degré 7 dans les développements de Taylor de façon à en déduire les 2 premiers termes de l'erreur.
(b) Appliquer deux fois la formule aux différences avec $h = 0{,}2$ et $0{,}1$.
(c) Utiliser l'extrapolation de Richardson.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

141. (a) Interpolation de Lagrange ou de Newton.
(b) Définition de l'erreur d'interpolation.
(c) Utiliser l'extrapolation de Richardson.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

142. (a) Utiliser une formule aux différences d'ordre 2 appropriée puis appliquer l'extrapolation de Richardson.
(b) Utiliser une formule aux différences d'ordre 2 appropriée.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

143. Utiliser une formule aux différences d'ordre 2 appropriée puis appliquer l'extrapolation de Richardson.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

144. (a) Suivre les indications.
(b) Calculer le ratio des erreurs absolues.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

145. (a) Conserver les termes jusqu'au degré 3 dans les développements de Taylor.
(b) Appliquer la formule avec $h = 0{,}4$.
(c) Utiliser l'extrapolation de Richardson.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

146. (a) Conserver les termes jusqu'au degré 3 dans les développements de Taylor.
    (b) Appliquer la formule avec $h = 0{,}2$.
    (c) Appliquer la formule avec $h = 0{,}1$.
    (d) Appliquer l'extrapolation de Richardson sur les résultats obtenus en (b) et (c).

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

147. (a) Appliquer le principe de l'extrapolation de Richardson.
    (b) Appliquer l'extrapolation de Richardson à 3 reprises.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

148. On peut démontrer que le terme d'erreur de la méthode des trapèzes composée s'écrit :

$$-\frac{(b-a)}{12} f''(\eta)\, h^2 = c_2\, h^2 + c_4\, h^4 + c_6\, h^6 + \cdots$$

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

149. (a) Utiliser l'extrapolation de Richardson.
    (b) Utiliser une combinaison de formules de quadrature de Newton-Cotes.
        i. Utiliser une combinaison appropriée de formules de quadrature d'ordre 2.
        ii. Utiliser une combinaison de formules de quadrature de Newton-Cotes.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

150. (a) $a(t) = v'(t)$.
    (b) Sachant que $a(t) = v'(t)$, appliquer l'extrapolation de Richardson.
    (c) $d(t) = \int_0^{10} v(t)\, dt$ et appliquer une quadrature de Newton-Cotes d'ordre 2.
    (d) Utiliser une combinaison appropriée de formules de quadrature de Newton-Cotes.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Équations différentielles ordinaires

Problèmes de conditions initiales

151. $y(t_{n+1}) = y(t_n + h)$.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

152. $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt$.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

153. Calculer le rapport des erreurs.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

154. (a) Appliquer l'extrapolation de Richardson.
    (b) Calculer le rapport des erreurs.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

155. (a) Appliquer l'algorithme de la méthode d'Euler modifiée.
     (b) Calculer le rapport des erreurs.

     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

156. (a) Utiliser l'équation $y'(t) = y(t) + e^{2t}$.
     (b) Algorithme de la méthode d'Euler explicite et définition des chiffres significatifs.
     (c) Notion d'erreur associée à la méthode d'Euler explicite.

     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

157. (a) $y''(t) = f'(t, y(t))$ et appliquer la règle de dérivation des fonctions composées.
     (b) Définition de l'erreur de troncature locale.
     (c) Suivre les indications.
     (d) Appliquer l'algorithme de la méthode du point milieu.
     (e) Appliquer l'extrapolation de Richardson.

     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

158. Écrire le système sous forme vectorielle et appliquer l'algorithme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

159. Faire un changement de variables.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

160. Faire un changement de variables.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

161. Faire un changement de variables.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

162. Faire un changement de variables.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

163. (a) Faire un changement de variables.
     (b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode du point milieu.

     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

164. (a) Utiliser le changement de variables.
     (b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode d'Euler modifiée.

     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

165. Transformer le système en un système d'ordre 1 équivalent.
     [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

166. (a) Faire un changement de variables.

(b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode d'Euler explicite.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

167. (a) Faire un changement de variables.

(b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode d'Euler modifiée. Définition des chiffres significatifs.

(c) Interpolation de Lagrange ou de Newton.

(d) Utiliser une formule aux différences appropriée et l'extrapolation de Richardson.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

168. (a) Faire un changement de variables.

(b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode d'Euler modifiée. Utiliser la rélation $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{R}\left(\mu \sin\left(\theta(t)\right) - \cos\left(\theta(t)\right)\right) = 0$.

(c) Utiliser l'extrapolation de Richardson.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

169. (a) Faire un changement de variables.

(b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode d'Euler modifiée.

(c) Calculer le rapport des erreurs.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

170. (a) Faire un changement de variables.

(b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode d'Euler modifiée.

(c) Calculer le rapport des erreurs.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

171. (a) Faire un changement de variables.

(b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode du point milieu.

(c) Calculer le rapport des erreurs.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

172. Appliquer l'algorithme de la méthode de Crank-Nicolson.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

173. Appliquer l'algorithme de la méthode d'Euler implicite.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

174. (a) Appliquer l'algorithme d'Euler explicite.

(b) Appliquer l'algorithme d'Euler implicite.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

175. Appliquer l'algorithme de la méthode d'Euler implicite.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

176. (a) Suivres les indications.
(b) Définition de l'erreur de troncature locale.
(c) Déterminer une approximation de la racine de l'équation non linéaire obtenue.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

177. (a) Faire une itération de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
(b) Utiliser une formule aux différences appropriée.
(c) Utiliser une formule aux différences appropriée et l'extrapolation de Richardson.
(d) Utiliser une combinaison de formules de quadrature au moins d'ordre 4.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

178. (a) On a une E.D.O à variables séparables.
(b) Appliquer l'algorithme de la méthode d'Euler explicite.
(c) Suivre les indications.
(d) Il faut montrer que $\lim_{n \to infty} |y_n| \to 0$.
(e) Il faut montrer que $y_n > 0$ et $y_{n+1} < y_n$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

179. (a) Déterminer la méthode la plus précise et estimer numériquement son ordre de précision.
(b) Appliquer l'algorithme de la θ-méthode.
(c) $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$.
(d) Déterminer le signe de $(2\theta - 1)$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

180. (a) Appliquer l'algorithme de la méthode d'Euler explicite.
(b) Il faut montrer que $y_{n+1} < y_n$.
(c) Exprimer le pas de temps en fonction de t_n.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

181. Appliquer l'algorithme de la méthode d'Euler modifiée.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

182. (a) Utiliser une formule aux différences appropriée et l'extrapolation de Richardson.
(b) Écrire le système sous forme vectorielle et faire une itération de la méthode du point milieu.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Équations algébriques non linéaires

Méthode de la bissection

183. Algorithme de la méthode de la bissection.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

184. Principe de la méthode de la bissection.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

185. Algorithme de la fausse position.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

186. Principe et algorithme de la méthode de la bissection.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

187. (a) Principe de la méthode de la bissection.
   (b) Algorithme de la méthode de la bissection.
   (c) Après n itérations de la méthode de la bissection, la longueur de l'intervalle est $\frac{L}{2^n}$, où L est la longueur de l'intervalle de départ.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

188. Après n itérations de la méthode de la bissection, la longueur de l'intervalle est $\frac{L}{2^n}$, où L est la longueur de l'intervalle de départ.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

189. Trouver une fonction qui possède un changement de signe autour des racines.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

190. Après n itérations de la méthode de la bissection, la longueur de l'intervalle est $\frac{L}{2^n}$, où L est la longueur de l'intervalle de départ.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

191. Principe et algorithme de la méthode de la bissection.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

192. Après n itérations de la méthode de la bissection, la longueur de l'intervalle est $\frac{L}{2^n}$, où L est la longueur de l'intervalle de départ.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthodes des points fixes

193. (a) Notion de convergence de la méthode des points fixes.
   (b) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
   (c) Principe de la méthode de la bissection.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

194. Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

195. (a) Notion de converge de la méthode des points fixes.
   (b) Notion du taux de convergence.
   (c) Notion d'ordre de convergence.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

196. (a) Définition du point fixe.
   (b) Notion d'ordre de convergence.
   (c) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

197. (a) Définition du point fixe.
   (b) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

198. (a) Définition du point fixe.
   (b) Notion de convergence de la méthode des points fixes.
   (c) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

199. (a) Définition du point fixe.
   (b) Notion de convergence de la méthode des points fixes.
   (c) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

200. (a) Définition du point fixe.
   (b) Estimer numériquement le taux de convergence.
   (c) Utiliser l'approximation $e_{n+1} \simeq g'(r)e_n$.
   (d) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

201. (a) Poser $f(x) = x^2 - 2$.
   (b) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
   (c) Appliquer l'algorithme de la méthode des points fixes.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

202. Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

203. (a) $d'(p) = 0$.
   (b) Transformer l'équation $d'(p) = 0$ en un problème équivalent de la forme $g(p) = p$.
   (c) Définition de la nature d'un point fixe.
   (d) Notion d'ordre de convergence et définition du taux de convergence.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

204. (a) Définition du point fixe.
   (b) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
   (c) Appliquer l'algorithme de la méthode des points fixes et la définition des chiffres significatifs.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

205. (a) Définition de la nature des points fixes.
   (b) Définition du taux de convergence.
   (c) Interprétation géométrique de la méthode de Newton.
   (d) Évaluer le nombre d'opérations de chaque algorithme.
   (e) Définitions d'un point fixe et de l'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
   (f) Appliquer l'algorithme de la méthode des points fixes et la définition des chiffres significatifs.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

206. (a) Montrer que la méthode des points fixes associée à la fonction $G(x) = g(x) - \frac{\rho}{1-\rho}(g(x) - x)$ converge à l'ordre 2.
   (b) Pour $g'(r) < 1$, on a $(g'(r))^2 \ll 1$.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

207. (a) Appliquer la notion de changement de signe.
   (b) Soit $r \in]a, b[$ si $f'(x)$ est croissante ou décroissante on a selon le cas $f'(r) \in]f'(a), f'(b)[$ ou $f'(r) \in]f'(b), f'(a)[$.
   (c) Définition de l'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

208. Définition du point fixe et notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

209. (a) Notion de convergenence de la méthode des points fixes.
   (b) Notion de convergence de la méthode des points fixes.
   (c) Notions de taux et d'ordre de converge de la méthode des points fixes.
   (d) Notion d'ordre de converge de la méthode des points fixes. Calculer analytiquement $g_i'(r)$ ou estimer numériquement $g_i'(r)$.
   (e) Utiliser l'approximation $e_{n+1} \simeq g'(r)e_n$.
   (f) Utiliser l'approximation $e_{n+1} \simeq \frac{g''(r)}{2}e_n^2$.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

210. (a) Poser $g(x) = 2x - Cx^2$ et transformer le problème $g(x) = x$ en un problème équivalent de la forme $f(x) = 0$.
   (b) Définition de l'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

211. Poser $g(x) = \alpha x + \frac{\beta q}{x^2} + \frac{\gamma q^2}{x^5}$ et appliquer la définition de l'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
   [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

212. (a) Poser $g(x) = (1 - \frac{\omega}{3})x + (1 - \omega)x^3 + \frac{2\omega}{3x^2} + 2(\omega - 1)$ et appliquer la définition du point fixe.

(b) Définition de l'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

(c) Définition de l'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

213. (a) Notion de convergence de la méthode des points fixes.

(b) Définition de l'ordre de convergence de la méthode des points fixes et utiliser l'approximation $e_{n+1} \simeq \frac{g''(r)}{2} e_n^2$.

(c) Définition de l'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

214. Notion de convergence de la méthode des points fixes.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

215. Interprétation géométrique de la méthode des points fixes.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

216. Convergence de la méthode des points fixes et utiliser $(\cos\phi)^2 < 1$ et $1 + \phi^2 > 1$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

217. (a) Transformer l'équation $x = g(x)$ en un problème équivalent de la forme $f(x) = 0$.

(b) Transformer l'équation $f(x) = 0$ en un problème équivalent de la forme $h(x) = x$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

218. (a) Appliquer l'algorithme des points fixes et la définition des chiffres significatifs.

(b) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

219. (a) Définition de la nature d'un point fixe.

(b) Vérifier que r est un point fixe de la fonction $g_{\alpha,\beta}(x)$.

(c) Appliquer l'algorithme de la méthode des points fixes.

(d) Voir question (b).

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

220. Notion de convergence de la méthode des points fixes. Voir exercices **??** et **??**.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

221. (a) Notion de point fixe attractif.

(b) Définition du taux de convergence de la méthode des points fixes.

(c) Utiliser l'approximation $x_{k+1} - x^* \simeq g'(r)(x_n - x^*)$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

222. Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

223. (a) Définition du point fixe.

(b) Notion de convergence de la méthode des points fixes.

(c) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

224. (a) Transformer l'équation $f(x) = 0$ en un problème équivalent de la forme $g(x) = x$.

(b) Faire une itération de la méthode de la bissection.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthode de Newton

225. (a) Principe de la méthode de la bissection.

(b) Notion de multiplicité d'une racine.

(c) La fonction $g'(x)$ est croissante sur l'intervalle $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

226. (a) Interpolation de Lagrange et algorithme de la méthode de l'interpolation inverse.

(b) Interprétation géométrique de la méthode de la sécante.

(c) Interprétation géométrique de la méthode de Newton.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

227. Notion de changement de signe.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

228. (a) Définition de la multiplicité d'une racine et notion de changement de signe.

(b) Notion d'ordre de convergence de la méthode de Newton.

(c) Après n itérations de la méthode de la bissection, la longueur de l'intervalle est $\frac{L}{2^n}$, où L est la longueur de l'intervalle de départ. Définition des chiffres significatifs.

(d) Transformer l'équation $f(\phi) = 0$ en un problème équivalent de la forme $g(\phi) = \phi$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

229. (a) Estimation numérique de l'ordre de convergence de la méthode de Newton.

(b) Appliquer l'algorithme de Newton.

(c) Interprétation géométrique de la méthode de Newton.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

230. Utiliser la relation $g'(r) = 1 - \frac{1}{m}$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

231. $f'(r) = 0$ car la racine est de multiplicité $m \geq 2$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

232. Trouver une fonction $f(x)$ telle que $f(\frac{1}{a}) = 0$ et appliquer l'algorithme de Newton.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

233. r est un point critique de la fonction $h(x)$ si $h'(r) = 0$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

234. Poser $f(x) = x^2 - M$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

235. (a) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
(b) Évaluer le nombre d'opérations de chaque méthode.
(c) Interprétation géométrique de la méthode de Newton.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

236. (a) Poser $f(x) = x^2 - M$.
(b) Poser $f(x) = x^3 - M$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

237. (a) Interprétation géométrique de la méthode de Newton.
(b) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
(c) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

238. (a) Notion de bassin d'attraction de la méthode de Newton.
(b) Notion de convergence de la méthode de Newton.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

239. Déterminer la multiplicité de la racine de l'équation $(x-1)^{10} = 0$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

240. (a) Définition de la multiplicité d'une racine.
(b) Utiliser l'approximation $e_{n+1} \simeq g'(r)e_n$.
(c) Notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes.
(d) Notion de changement de signe.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

241. Appliquer l'algorithme de la méthode de Newton.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthode de la sécante

242. (a) Pour un x_0 donné, faire deux itérations de la méthode de Newton. Voir l'interprétation géométrique de la méthode de Newton.
(b) Algorithme et interprétation géométrique de la méthode de la secante.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

243. Utiliser l'approximation $e_{n+1} \simeq g'(r)e_n$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

244. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

(b) Appliquer l'algorithme de la méthode de Newton.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

245. (a) Déterminer la multiplicité de la racine.
    (b) Appliquer l'algorithme de la méthode de la sécante et la définition des chiffres significatifs.
    (c) i. Utiliser l'approximation $e_{n+1} \simeq g'(r)e_n$.
        ii. Opérations risquées.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

246. Appliquer l'algorithme de la méthode de la sécante.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

247. Algorithme et interprétation géométrique de la méthode de la sécante.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

248. Opérations risquées.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthode de l'interpolation inverse

249. Algorithme de la méthode de l'interpolation quadratique inverse.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Problèmes algébriques non linéaires

250. Identifier un problème de racine $f(t) = 0$.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

251. Identifier un problème de racine $f(T) = 0$.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

252. (a) Utiliser un développpement de Taylor approprié de la fonction e^t autour de $t_0 = 0$.
    (b) Identifier un problème de racine $f(x) = 0$.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Systèmes d'équations algébriques

Factorisations matricielles

253. Définition de la décomposition LU.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

254. Poser $\vec{z} = P^{-1}\vec{x}$ et faire une descente et une remontée triangulaire.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

255. (a) Algorithme de Crout sans permutation de lignes.

(b) Procédure de calcul des colonnes de l'inverse d'une matrice.
(c) Faire une descente et une remontée triangulaire.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

256. Faire une décomposition LU de Crout sans permuation de ligne.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

257. (a) Permuter les lignes avant de calculer le coefficient $L_{3,3}$.
(b) Utiliser la décomposition LU.
(c) Appliquer la procédure de calcul des colonnes de la matrice inverse.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

258. Résoudre le système linéaire approprié.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

259. Permuter les lignes avant de calculer le coefficient $L_{3,3}$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

260. (a) Utiliser la décomposition LU.
(b) Définition de la norme $\| \|_\infty$.
(c) Résoudre les systèmes linéaires appropriés.
(d) Définition du conditionnement d'une matrice.
(e) $PA = LU$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

261. (a) Appliquer l'algorithme de Crout.
(b) $\text{dét}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{dét}(A^{-1})}$.
(c) Résoudre le système linéaire approprié.
(d) $PA = LU$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

262. (a) Appliquer l'algorithme de Crout.
(b) Utiliser la décomposition LU de la matrice.
(c) Faire une descente et une remontée triangulaire.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

263. Appliquer la stratégie de pivot partiel. Cette stratégie consiste à placer en position de pivot le plus grand terme en valeur absolue de cette colonne.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

264. Appliquer l'algorithme de Doolitle.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

265. (a) Appliquer l'algorithme de Doolitle.
(b) Utiliser la décomposition LU.
(c) Appliquer la procédure de calcul des colonnes de la matrice inverse.

(d) Suivre les indications.

(e) $PA = LU$.

(f) Définition du conditionnement d'une matrice.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

266. (a) Suivre les indications.

(b) Analyser la structure de la matrice.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

267. (a) Appliquer l'algorithme de Doolitle avec permutations de lignes.

(b) Utiliser la décomposition LU.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

268. Décomposition de Doolitle sans permutation de ligne et arithmétique flottante.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

269. (a) Appliquer l'algorithme de Thomas.

(b) Utiliser la décomposition LU.

(c) Utiliser la décomposition LU.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

270. (a) Une matrice symétrique à diagonale strictement dominante et positive ($a_{i,i} > 0$) est définie positive.

(b) Une matrice qui possède un coefficient négatif sur la diagonale ($a_{i,i} < 0$) n'est pas définie positive.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

271. (a) Utiliser la décomposition LL^T.

(b) Faire une descente et une remontée triangulaire.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

272. (a) Évaluer le nombre d'opérations.

(b) Appliquer l'algorithme de la décomposition de Cholesky.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

273. (a) Utiliser la décomposition LDL^T de la matrice.

(b) Poser $U = DL^T$ et faire une descente et une remontée triangulaire.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Conditionnement matriciel

274. Définition du conditionnement.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

275. Bornes d'erreurs et conditionnement.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

276. (a) La matrice DA est inversible.
(b) Donner un exemple.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

277. (a) Utiliser la décomposition LU.
(b) Résoudre le système linéaire approprié.
(c) Définition du conditionnement.
(d) Bornes d'erreurs et conditionnement.
(e) $B^2\vec{x} = B(B\vec{x})$.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

278. (a) Appliquer le principe de la décomposition LU.
(b) Faire une descente et une remontée triangulaire.
(c) $[0 \quad 0 \quad 1]^T = [1 \quad 1 \quad 1]^T - [1 \quad 0 \quad 0]^T - [0 \quad 1 \quad 0]^T$.
(d) Définition du conditionnement.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

279. (a) Appliquer l'algorithme de Crout.
(b) Définition du conditionnement.
(c) Bornes d'erreurs et conditionnement.
(d) Donner un contre-exemple.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

280. Bornes d'erreurs et conditionnement.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

281. Bornes d'erreurs et conditionnement.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

282. Bornes d'erreurs, conditionnement et chiffres significatifs.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

283. Bornes d'erreurs et conditionnement.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

284. (a) Résoudre le système linéaire approprié.
(b) Définition du conditionnement.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

285. Bornes d'erreurs, conditionnement et chiffres significatifs.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

286. (a) Définition du conditionnement d'une matrice.
(b) Définition du conditionnement d'une matrice.
(c) Bornes d'erreurs et conditionnement.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Méthodes itératives

287. (a) Appliquer l'algorithme de Jacobi.
    (b) Appliquer l'algorithme de Gauss-Seidel.
    (c) Notion de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
    (d) Définitions de la matrice d'itération de la méthode Jacobi et du rayon spectral d'une matrice.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

288. (a) Résoudre le système linéaire.
    (b) Appliquer l'algorithme de Gauss-Seidel.
    (c) Notion de convergence de la méthode de Gauss-Seidel.
    (d) Notion de convergence de la méthode de Jacobi.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

289. (a) Appliquer l'algorithme de Gauss-Seidel.
    (b) Notion de convergence de la méthode de Gauss-Seidel.
    (c) La méthode de Gauss-Seidel est une variante améliorée de la méthode de Jacobi.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

290. Notion de convergence de la méthode de Jacobi.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

291. Calculer la matrice d'itération T_{GS} de la méthode de Gauss-Seidel.
    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

292. (a) Définitions des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
    (b) Définition d'une matrice à diagonale strictement dominante.
    (c) Appliquer les algorithmes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

293. (a) Définitions des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
    (b) Définition d'une matrice à diagonale strictement dominante.
    (c) Appliquer l'algorithme de Jacobi.
    (d) Appliquer l'algorithme de Gauss-Seidel.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

294. (a) Une matrice symétrique à diagonale strictement dominante et positive ($a_{i,i} > 0$) est définie positive.
    (b) Faire une descente et une remontée triangulaire.
    (c) Notion de convergence de la méthode de Gauss-Seidel.
    (d) Appliquer l'algorithme de Gauss-Seidel.

    [*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Systèmes d'équations algébriques non linéaires et méthode de Newton

295. Écrire le système linéaire à résoudre en partant de l'estimé initial.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

296. (a) Intersection de 2 coniques.
(b) Algorithme de la méthode de Newton appliqué aux systèmes.
(c) Calculer le déterminant de la matrice jacobienne évaluée en $(-1\,,\,0)$.
(d) Calculer le conditionnement de la matrice jacobienne évaluée en $(-1+\epsilon\,,0+\epsilon)$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

297. (a) Algorithme de la méthode de Newton appliqué aux systèmes.
(b) i. Identifier les coniques.
ii. Notion de bassin d'attraction.
iii. Opérations risquées.
(c) Identifier la formule aux différences utilisée.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

298. (a) Algorithme de la méthode de Newton appliqué aux systèmes.
(b) Calculer le rapport des erreurs.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

299. Calculer le déterminant de la matrice jacobienne évaluée en $(1\,,\,0)$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

300. (a) Notion de degré de précision d'une quadrature.
(b) Algorithme de la méthode de Newton appliqué aux systèmes.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

301. (a) Suivre les indications.
(b) Algorithme de la méthode de Newton appliqué aux systèmes.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

302. (a) Déterminer les intersections des 2 courbes.
(b) Algorithme de la méthode de Newton appliqué aux systèmes.
(c) Calculer le déterminant de la matrice jacobienne évaluée en $(1\,,\,0)$.
(d) Calculer le déterminant de la matrice jacobienne évaluée en $(x^0\,,\,y^0)$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

303. (a) Algorithme de la méthode de Newton appliqué aux systèmes.
(b) Calculer le déterminant de la matrice jacobienne évaluée en $(1\,,\,2)$.
(c) Calculer le déterminant de la matrice jacobienne évaluée en $(x^0\,,\,y^0)$.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

304. Montrer que la matrice jacobienne associée au système linéaire $\vec{R}\vec{x} = A\vec{x} - \vec{b} = \vec{0}$ est la matrice A.
[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

305. (a) Appliquer l'algorithme de Crout.
 (b) Résoudre le système linéaire approprié.
 (c) Montrer que la matrice jacobienne évaluée en $\vec{x}^0$ est la matrice H.

[*Question*] [*Solution*] [*TdM*]

Solutions brèves

Introduction et analyse d'erreur

Définitions, développement de Taylor et erreur de troncature

1. (a) Respectivement 5 et 6 chiffres significatifs.
   (b) $\frac{e_1}{e_2} = 16 = 2^n \Rightarrow$ ordre 4.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

2. FAUX : $\Delta x \leq 0{,}7 \times 10^{-5} \leq 0{,}5 \times 10^{-4} \Rightarrow x^\star = 0{,}001\,2345$ a 2 chiffres significatifs.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

3. On a $e_1 = |e^{0,2} - r(0{,}2)| = 0{,}544 \times 10^{-6}$ et $e_2 = |e^{0,1} - r(0{,}1)| = 0{,}15 \times 10^{-7}$. Alors $\frac{e_1}{e_2} = 2^n$ pour $n \simeq 5{,}18 \Rightarrow$ une approximation d'ordre 5.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

4. Ordre 7.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

5. $\frac{e_2}{e_1} = 588{,}011 \simeq 5^4 \Rightarrow$ une approximation d'ordre 4.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

6. $\frac{e(h=0{,}3)}{e(h=0{,}1)} = \frac{|f(0{,}3)-p(0{,}3)|}{|f(0{,}1)-p(0{,}1)|} = 6375 \simeq 3^8$. Le polynôme est d'ordre 8 et au plus de degré 7.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

7. Il s'agit du développement de Taylor d'ordre 3 de $\sin x$ autour de $x_0 = 0$.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

8. $i(t) = 3\,t^2 - t^3 + \ldots = 3\,t^2 + \mathcal{O}(t^3) = p_2(t) + \mathcal{O}(t^3)$. On obtient un polynôme de degré 2.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

9. FAUX : Par exemple, le développement de Taylor de degré n de $\sin x$ autour de $x_0 = 0$ est précis à l'ordre $n + 2$.
   [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

10. $p(x_0 + h) = p_2(h) + \frac{1}{6}\,p'''(\xi(h))\,h^3$ pour $\xi(h) \in [x_0\,, x_0 + h]$. Ici $h = 0{,}5$ et $x_0 = 10$, alors $p(10{,}5) = p(10 + 0{,}5) \simeq p(10 + 0{,}5) \simeq p_2(0{,}5) = 101{,}375$.

    L'erreur absolue est $e = |\frac{1}{6}\,p'''(\xi(h))\,h^3| \leq \frac{1}{6}(0{,}03)(0{,}5)^3 = 0{,}625 \times 10^{-3} < 0{,}5 \times 10^{-2}$.

    L'approximation $p_2(0{,}5) = \boxed{101{,}37}5$ possède 5 chiffres significatifs.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

11. (a) Développements de Taylor autour de $x_0 = 0$:
    $\sin x = x + \mathcal{O}(x^3)$ et $\cos x = 1 + \mathcal{O}(x^2) \Rightarrow f(x) = \sin x + \cos x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$.
    (b) Ordre 2.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

12. $g(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7) = p_3(x) + \mathcal{O}(x^5)$, on obtient un polynôme de degré 3.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

13. L'erreur absolue est $|R_n(x)| = |e^x - p_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}$ pour $-1 \leq x \leq 1$. Cette valeur est inférieure à 10^{-4} dès que $n \geq 7$. Pour $0 \leq x \leq 1$, l'approximation $p_7(x)$ possède au moins 4 chiffres significatifs car $1 \leq p_7(x) \leq 2{,}7183$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

14. (a) $-0{,}310\,723\,25 \times 10^{-1} \leq x \leq 0{,}310\,723\,25 \times 10^{-1}$.
    (b) $-1{,}074\,570 \times 10^{-1} \leq x \leq 1{,}074\,570 \times 10^{-1}$.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

15. (a) $p_3(x) = x + \frac{x^3}{3!}$ et $R_3(x) = \frac{\cosh(\xi(x))x^5}{5!}$ pour $\xi(x) \in]0\,,x[$.
    (b) $\sinh(0{,}1) \simeq p_3(0{,}1) = 0{,}100\,166\,667$. L'approximation $p_3(0{,}1) = 0{,}\boxed{100\,166}\,667$ possède 6 chiffres significatifs.
    (c) On divise h par 4, ce qui revient à réduire l'erreur absolue de 4^5.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

16. (a) i. $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5\,\xi^5(h)}$ pour $\xi(h) \in]1\,,1+h[$.
    ii. $\frac{h^5}{5\,\xi^5(h)} \leq \frac{h^5}{5}$ puisque $\frac{1}{\xi^5(h)} \leq 1$ sur $]1\,,1+h[$.
    iii. $|\ln(1{,}1) - p_4(0{,}1)| \leq 0{,}2 \times 10^{-5} \leq 0{,}5 \times 10^{-5} \Rightarrow p_4(0{,}1) = 0{,}\boxed{953\,0}\,83\,33 \times 10^{-1}$ a 4 chiffres significatifs.
    (b) On divise h par 4, ce qui revient à réduire l'erreur par 4^5.
    (c) $\ln(2) = \ln(1+1) \Rightarrow h = 1 \Rightarrow p_n(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Nous avons une série à signes alternés $\Rightarrow |\ln(2) - p_n(1)| \leq \frac{1}{n+1} < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 10^6 - 1$, ce qui revient à faire beaucoup trop de calculs.
    (d) i. Du développement de Taylor de $\ln(1+h)$ et $\ln(1-h)$, on a :
    $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\,x + \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{2}{5}\,x^5 + \mathcal{O}(x^7)$.
    ii. $x = \frac{1}{3}$.
    iii. 6 termes donnent $0{,}693\,147\,074$ avec $|p - \ln(2)| \simeq 0{,}106 \times 10^{-6} < 0{,}5 \times 10^{-6}$. On a donc 6 chiffres significatifs. Le polynôme est de degré 11 (d'ordre 13). On a donc trouvé l'aproximation de $\ln(2)$ après l'addition/soustraction de 6 termes plutôt que $10^6 - 1$ (cf. (c)).
    (e) $g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + \mathcal{O}(x^3).)$

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

17. (a) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$
    (b) $g(t) = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots$
    (c) $\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} - \cdots$
    (d) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

18. (a) $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$
    (b) $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \cdots$

(c) $f(x) = (\frac{2}{\sqrt{\pi}})\,(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} + \cdots)$

(d) $f(1) \simeq (\frac{2}{\sqrt{\pi}})\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42}) = 0{,}838\,224\,524$.

(e) C'est une approximation d'ordre 9.

(f) 2 chiffres significatifs.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

19. (a) Le développement de Taylor de degré 2 et d'ordre 3 est $p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.

(b) Puisque $f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$, on en déduit que le terme d'erreur est $\frac{1}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}x^3$ pour $\xi \in \,]0\,,x[$.

(c) $|\sqrt{1{,}1} - p_2(0{,}1)| \leq 0{,}588 \times 10^{-4} \leq 0{,}5 \times 10^{-3} \Rightarrow p_2(x) = \boxed{1{,}048}\,75$ a 4 chiffres significatifs. De même, $|\sqrt{1{,}025} - p_2(0{,}025)| \leq 0{,}962 \times 10^{-6} \leq 0{,}5 \times 10^{-5} \Rightarrow p_2(x) = \boxed{1{,}012\,42}\,1\,875$ a 6 chiffres significatifs.

(d) Le rapport $\frac{e_1}{e_2} = 61{,}17 \simeq 64 = 4^3$ puisque l'approximation est d'ordre 3 et h a été divisé par 4.

(e) Puisque le terme d'erreur est $\frac{1}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}x^3$ pour $\xi \in]0\,,x[$, on en déduit qu'une borne supérieure est $e(x) = \frac{1}{16}x^3$. On a alors $e(0{,}1) = \frac{1}{16}(0{,}1)^3 = 0{,}625 \times 10^{-4}$ et $e(0{,}025) = \frac{1}{16}(0{,}025)^3 = 0{,}976\,56 \times 10^{-6}$.

(f) On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 + \mathcal{O}(y^4);$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4 + \frac{5}{16}z^6 + \mathcal{O}(z^8);$$
$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \int_0^x 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4 + \frac{5}{16}z^6 + \mathcal{O}(z^8)\,dz;$$

$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$, un polynôme de degré 5 et d'ordre 7.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

20. (a) $f(2+h) = e^2 + e^2 h + \frac{1}{2}e^2 h^2 + \mathcal{O}(h^3) = p_2(h) + \mathcal{O}(h^3)$.

(b) $x^* = p_2(0{,}1) = 8{,}164\,9113$.

(c) $R_2(h) = e^{\xi(h)}\,\frac{h^3}{3!}$ pour un certain $\xi(h)$ dans l'intervalle $[2\,,\,2{,}1]$.
$|R_2(h)| \leq e^{2{,}1}\,\frac{h^3}{3!} \Rightarrow |R_2(0{,}1)| \leq e^{2{,}1}\,\frac{(0{,}1)^3}{6} = 0{,}136 \times 10^{-2} \leq 0{,}5 \times 10^{-2}$ et donc l'approximation $x^* = \boxed{8{,}16}\,4\,9113$ possède 3 chiffres significatifs.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

21. L'évaluation de π_2 nécessite l'évaluation du polynôme de Taylor aux points $x = \frac{1}{18}, \frac{1}{57}$ et $\frac{1}{239}$. Ces points sont plus près de $x_0 = 0$ que le point $x = 1$ utilisé pour l'évaluation de π_1. L'approximation π_2 est donc plus précise que π_1.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

22. (a) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} = p_4(x) + \mathcal{O}(x^5)$. On a ensuite $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$. On obtient un polynôme de degré 3 et d'ordre 5.

(b) $\ln 2 = \ln(1+1) \simeq p_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0{,}583\,333;$
$\ln 2 = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) \simeq p_3(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^3 = 0{,}691\,358.$

(c) L'approximation ln 2 obtenue avec $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est plus précise parce qu'on l'évalue avec $x = \frac{1}{3}$ qui est plus près de $x_0 = 0$ que $x = 1$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

23. (a) $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \mathcal{O}(t^7)$.
(b) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{18} + \frac{x^4}{600} + \cdots = p_2(x) + \mathcal{O}(x^4)$. On obtient un polynôme de degré 2.
(c) $f(0{,}01) \simeq p_2(0{,}01) = 0{,}999\,994\,444$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

24. (a) $f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) = p_2(x) + \mathcal{O}(x^4)$.
(b) $f(1{,}1) = e^{\sin 1{,}1} \simeq p_2(1{,}1) = 2{,}705$.
(c) $\Delta = 0{,}266\,99 \leq 0{,}5$. L'approximation $\boxed{2}{,}705$ possède 1 chiffre significatif.
(d) Le point $x = 1{,}1$ est trop loin du point de référence $x_0 = 0$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

25. (a) $\operatorname{erf}(0) = 0$;
(b) On a immédiatement

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!} e^{\xi(t)}, \qquad -t^2 \leq \xi(t) \leq 0.$$

(c) Puisque $\int_0^x t^{2k} \mathrm{d}t = x^{2k+1}/(2k+1)$, on obtient

$$\operatorname{erf}(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right).$$

(d) Dans le point précédent, le reste prend la forme

$$R_n(x) = \frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)!} \int_0^x t^{2n+2} e^{\xi(t)} \mathrm{d}t.$$

(e) Puisque $e^{\xi(t)} \leq 1$, on a, pour $x \in [0,1]$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}(n+1)!} \int_0^x t^{2n+2} \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}(n+1)!} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}(n+1)!\,(2n+3)},$$

et une estimation semblable pour $x \in [-1,0]$. Cette valeur est inférieure à 10^{-10} dès que $n \geq 11$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

26. (a) $C(x) = x - \frac{\pi^2 x^5}{2^2 2!\,5} + \frac{\pi^4 x^9}{2^4 4!\,9} + \cdots (-1)^n \frac{\pi^{2n} x^{4n+1}}{2^{2n}(2n)!(4n+1)} + \cdots$ L'erreur absolue associée au polynôme de degré $4n+1$ est $|R_{4n+1}(x)| \leq \frac{\pi^{2n+2}}{(4n+5)2^{6n+7}(2n+2)!}$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$. Cette valeur est inférieure à 10^{-4} dès que $n \geq 1$. On a un polynôme de degré 5.

(b) $C(x) = x - \frac{\pi^2 x^5}{40} + \mathcal{O}(x^9) = p_5(x) + \mathcal{O}(x^9)$ polynôme de degré 5 et d'ordre 9.

(c) $C(\frac{1}{4}) \simeq p_5(\frac{1}{4}) = 0,249\,759\,04$ et la valeur absolue de l'erreur est telle que $|R_5(\frac{1}{4})| \leq \frac{\pi^4}{92^4 4! 4^9} = 0,1 \times 10^{-6} < 0,5 \times 10^{-6}$. L'approximation $p_5(\frac{1}{4}) = 0,\boxed{249\,759}\,04$ possède au moins 6 chiffres significatifs.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

27. (a) $\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots = p_7(x) + \mathcal{O}(x^9)$. On obtient un polynôme de degré 7 et d'ordre 9.

(b) $\pi = 4\tan^{-1}(1) \simeq 4p_7(1) = 2,895\,238\,095 = \pi_1$ et la valeur absolue de l'erreur est $\Delta\pi = 0,246 \leq 0.5 \times 10^0$ et l' approximation $\boxed{2},895\,238\,095$ possède un chiffre significatif.

(c) On divise h par 4, ce qui revient à réduire l'erreur de 4^9.

(d)

$$\pi = 48\tan^{-1}\left(\frac{1}{18}\right) + 32\tan^{-1}\left(\frac{1}{57}\right) - 20\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right);$$

$$\pi \simeq 48 \times p_7\left(\frac{1}{18}\right) + 32 \times p_7\left(\frac{1}{57}\right) - 20 \times p_7\left(\frac{1}{239}\right) = 3,141\,592\,653\,662 = \pi_2.$$

L'évaluation de π_2 nécessite l'évaluation du polynôme de Taylor aux points $x = \frac{1}{18}; \frac{1}{57}$ et $x = \frac{1}{239}$. Ces points sont plus proche de $x_0 = 0$ que le point $x = 1$ utilisé pour l'évaluation de π_1. L'approximation π_2 est donc plus précise que π_1.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

28. (a)

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + \cdots$$

(b) $|R_{2n+1}(x)| \leq \dfrac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)4^{2n+3}}$ pour $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

(c) L'erreur absolue est inférieure à 10^{-4} dès que $m \geq 5$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

29. (a)

$$g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = t - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^3}{3^2} - \frac{t^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n^2} + \cdots$$

(b) $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$

(c) $|R_{14}(x)| \leq 1,355 \times 10^{-7}$, $|R_{15}(x)| \leq 0,961 \times 10^{-7} \Rightarrow n = 15$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

30. $(1-x)^{-3/2} = 1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{15}{8}x^2 + \dfrac{105}{48}x^3 + \cdots$

$f(x) = \frac{4}{15} + \frac{6}{35}x^2 + \dfrac{5}{42}x^4 + \dfrac{35}{396}x^6 + \cdots = p_4(x) + \mathcal{O}(x^6)$. On obtient un polynôme de degré 4 et d'ordre 6.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Norme IEEE et erreur de représentation

31. Ce résultat vient de l'addition de 2 nombres dont les ordres de grandeur sont très différents.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

32. Le problème vient de l'addition de 2 nombres dont les ordres de grandeur sont très différents:
$$\mathrm{fl}(1+\tfrac{1}{n}) = 1 \Rightarrow \tfrac{1}{n} \le \tfrac{\varepsilon_m}{2} \Rightarrow n \ge \tfrac{2}{\varepsilon_m} = 2^{24}.$$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

33. L'addition de 2 nombres dont les ordres de grandeurs sont très différents.
$$\mathrm{fl}(1+10^{-50}) = 1 \text{ et } \mathrm{fl}(10^{-50}4^n + \frac{1}{3^n}) = \frac{1}{3^n} \text{ pour } n \le 31.$$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

34. Une solution de rechange est
$$\left(\sqrt{x+\delta}-\sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+\delta}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\delta}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\delta}{\sqrt{x+\delta}+\sqrt{x}}.$$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

35. $\text{dét}A = \alpha^2 > \varepsilon_m = 2^{-52} \Rightarrow \alpha > 2^{-26}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

36. Pour de petites valeurs de n, l'erreur est grande car la valeur limite est loin d'être atteinte alors que lorsque n est grand, les erreurs d'arrondi dominent. Plus précisément, $1 - n\log(1+1/n) \approx \frac{1}{2n}$, qui est l'erreur de troncature. En arithmétique flottante, $\mathrm{fl}(\log(1+1/n)) = \log(1+1/n)(1+\epsilon)$ où $|\epsilon| \le \varepsilon_{\mathrm{m}}$. L'erreur de représentation de $n\log(1+1/n)$ est donc environ $n\epsilon$. L'erreur totale est ainsi de la forme $\frac{1}{2n} + n\epsilon$, ce qui correspond au graphe.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

37. $\mathrm{fl}\left[\mathrm{fl}(e)\times\mathrm{fl}\left[\mathrm{fl}(\pi)-\mathrm{fl}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right] = 0{,}672\,75\times 10^1$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

38. $\mathrm{fl}(1+10^5) = 10^5$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

39. $\mathrm{fl}\left[\mathrm{fl}(A)\times\mathrm{fl}\left[\mathrm{fl}(B)-\mathrm{fl}(C)\right]\right] = \mathrm{fl}(0{,}087174\times 10^1) = \mathrm{fl}(0{,}87174) = 0{,}872$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

40. En arithmétique flottante à 5 chiffres, on a
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \epsilon & -1 \\ 0 & 1+\epsilon^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

41. Le programme consiste à sommer 10 fois le nombre $(0,1)_{10}$ qui n'a pas de représentation exacte en arithmétique flottante; en double précision norme *IEEE* − 754. Ce programme va donner une boucle inifinie. Voici le programme modifié

```
x = 0.0;
while ( (x-1.0)<0.001 )
%for i =1:10
  x = x + 0.1
end
```

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

42. (a) $\text{fl}\,(f(0,0001)) = 0,2 \times 10^{-1}$ et $f(0,0001) = 0,1920024 \times 10^{-1}$ (valeur exacte). Le manque de précision est causé par une perte de chiffres significatifs par soustraction des nombres voisins $0,\boxed{512}02 \times 10^3$ et $0,\boxed{512} \times 10^3$.
    (b) $f(x) = x(192 + x(24 + x)) = x(64 + (8 + x)(16 + x))$ et $\text{fl}\,(f(0,0001)) = 0,19200 \times 10^{-1}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

43. La soustraction entraine une perte de chiffres significatifs. La solution est d'utiliser l'expression suivante

$$f(x) = \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}\right) \frac{(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3})} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

44. (a) Pour les valeurs de x proches de 0, les opérations suivantes entrainent la perte de chiffres significatifs par la soustraction de nombres voisins.
    i. $\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) \frac{(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$;
    ii. $e^x - e^{-x} = 2\sinh x$.
    (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} - 2\sinh x = \frac{1}{2}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

45. $\Delta f = 0{,}3399 \times 10^{-3} < 0,5 \times 10^{-3}$ et $f(x^*) = \sin(x^*) \simeq 0,\boxed{733}381$ possède 3 chiffres significatifs.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

46. $\Delta f = 0,82 \times 10^{-3} < 0,5 \times 10^{-2}$ et $f(x^*, y^*, z^*) = -0,008\,145$ possède aucun chiffre significatif.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

47. $\Delta f = 0,95\times 10^2 < 0,5\times 10^3 \quad f(x,y) = 0,\boxed{4}60\,910\,899\,748\times 10^4$ possède 1 chiffre significatif.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

48.

$$\Delta V \leq 0,19069 \times 10^1 \leq 0,5 \times 10^1 \quad V = \boxed{1}6,023\,693 \quad \text{possède 1 chiffre significatif.}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

49.

$$\Delta T \leq 0,612 \times 10^{-2} \leq 0,5 \times 10^{-1} \quad T = \boxed{2,0}07\,089 \quad \text{possède 2 chiffres significatifs.}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

50. $\Delta f = 0,339\,91 \times 10^{-3}$, l'approximation $0,\boxed{733}381$ possède 3 chiffres significatifs.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

51. L'addition de 2 nombres dont les ordres de grandeurs sont très différents.

$\mathrm{fl}\,[\mathrm{fl}(10^4) + \mathrm{fl}(10^{-4})] = \mathrm{fl}(0,1 \times 10^5 + 0,0000\,0000\,1 \times 10^5) = \mathrm{fl}(0,1 \times 10^5) = 10^4$.
l'équation devient $\quad x^2 - 10^4 x + 1 = 0$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

52. Algorithme de Horner : $p = e + x(d + x(c + x(b + ax)))$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

53. Pour eviter la perte de chiffres significatifs par soustraction des nombres voisins,

$$(3 - 2\alpha^2)\arcsin(\alpha) = \boxed{0,24463}5 \quad \text{et} \quad 3\alpha\sqrt{1-\alpha^2} = \boxed{0,24463}46.$$

Il faut remplacer $\arcsin(\alpha)$ et $\sqrt{1-\alpha^2}$ pour leur developpement de Taylor autour de $x_0 = 0$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

54. (a) Soustraction de nombres voisins pour x proche de 0.
Solution: $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1-x^2}$;
(b) Addition de termes dont les ordres de grandeur sont très différents.
Solution: $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{100\,000^4} = \frac{1}{100\,000^4} + \cdots + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^4} + 1$;
(c) Soustraction de nombres voisins pour x proche de y.
Solution: $x^2 - y^2 = \ln\left(\frac{e^{x^2}}{e^{y^2}}\right)$.
(d) Soustraction de nombres voisins pour $x \gg 1$.
Solution: $\log(x - \sqrt{x^2-1}) = -\log(x + \sqrt{x^2-1}) = \log(2) - 2\log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$.
La deuxième expression permet d'éviter le calcul de x^2 qui peut entrainer pour $x \gg 1$ un débordement (overflow).

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

55. (a) On a $f(x) = \sqrt{1+x} \simeq p_2(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$.

(b)

$$\sqrt{1,0001} = \sqrt{1 + (0,0001)} \simeq p_2(0,0001) = 1,00005.$$

$$\sqrt{0,9999} = \sqrt{1 - (0,0001)} \simeq p_2(-0,0001) = 0,99995.$$

(c) $q_1 = 1,00005 \Rightarrow \mathrm{fl}(q_1) = 1$ et $q_2 = 0,99995 \Rightarrow \mathrm{fl}(q_2) = 1$.

(d) Pour eviter la perte de chiffres significatifs pour soustraction de nombres voisins, on pose

$$\sqrt{1,0001} - \sqrt{0,9999} = \frac{0,2 \times 10^{-2}}{\sqrt{1,0001} + \sqrt{0,9999}}.$$

$$\mathrm{fl}\left(\frac{0,2 \times 10^{-2}}{\sqrt{1,0001} + \sqrt{0,9999}}\right) = 0,1 \times 10^{-2} \text{ (valeur exacte).}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

56. (a) $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdots = p_4(x) + \mathcal{O}(x^5)$. On obtient un polynôme de degré 4 avec l'erreur $E_4(x) = \dfrac{x^5}{5(1+\xi(x))^5}$ où $\xi(x) \in [0, x]$.

(b) $\ln(1,1) \simeq p_4(0,1) = 0,095\,308\,333$ et l'erreur absolue est $|\ln(1,1) - p_4(0,1)| \simeq 0,185 \times 10^{-5}$. L'approximation $p_4(0,1) = 0,\boxed{95\,30}8\,333 \times 10^{-1}$ possède 4 chiffres significatifs.
On divise h par 4, ce qui revient à réduire l'erreur de 4^5.

(c) $e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + \cdots\right)$.
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \lim_{x\to 0} e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + \cdots\right) = e$.

(d) Pour de grandes valeurs de n, en arithmétique flottante le nombre 1 va absorber le nombre $\dfrac{1}{n}$. On a $\mathrm{fl}(1+\frac{1}{n}) = 1$. On peut remplacer l'expression $(1+\frac{1}{n})^n$ par son développement de Taylor.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Interpolation

Interpolation polynomiale

57. (a) Polynôme de degré 2.
    (b) $p_2(x) = \frac{1}{2}(x + x^2)$.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

58. $p(x) = \frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}x + \frac{1}{2\alpha-1}x^2$ pour $\alpha \neq \alpha_0 = \frac{1}{2}$.
    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Interpolation de Lagrange

59. (a) $p_{L2}(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{16})(x-\frac{\pi}{8})}{(\frac{\pi}{16})(\frac{\pi}{8})} + \cos(\frac{\pi}{16})\frac{x(x-\frac{\pi}{8})}{(\frac{\pi}{16})(\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{8})} + \cos(\frac{\pi}{8})\frac{x(x-\frac{\pi}{16})}{(\frac{\pi}{8})(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{16})}$. Ce qui donne $\cos(\frac{\pi}{32}) \simeq p_{L2}(\frac{\pi}{32}) = 0,995\,104\,019$.
    (b) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$ ce qui donne $\cos(\frac{\pi}{32}) \simeq 1 - \frac{(\frac{\pi}{32})^2}{2} = 0,995\,180\,857$.
    (c) $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, où $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{(-1+\cos\frac{\pi}{8})}{(\frac{\pi}{8})^2} = -0,493\,607\,416$. On a donc $\cos(\frac{\pi}{32}) \simeq p_2(\frac{\pi}{32}) = 0,995\,242\,471$.
    (d) $\cos(\frac{\pi}{32}) = 0,995\,184\,726\,672$. Le développement de Taylor de dégré 2 donne la meilleure approximation. Cela s'explique par le fait que $\frac{\pi}{32}$ soit proche de 0 et que le polynôme de Taylor utilise les valeurs exactes de $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

60. i. $\phi_{i-1}(x) = \dfrac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)}$, c'est la droite passant par les points de coordonnées $(x_{i-1}\,,\,1)$ et $(x_i\,,\,0)$.
    $\phi_i(x) = \dfrac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$, c'est la droite passant par les points de coordonnées $(x_{i-1}\,,\,0)$ et $(x_i\,,\,1)$.
    ii. $\phi_{i-1}(x) + \phi_i(x) = \dfrac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} + \dfrac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} = \dfrac{(x - x_i) - (x - x_{i-1})}{(x_{i-1} - x_i)} = 1$.
    iii. $x_{i-1}\phi_{i-1}(x) + x_i\phi_i(x) = x_{i-1}\dfrac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} + x_i\dfrac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} = \dfrac{x_{i-1}(x - x_i) - x_i(x - x_{i-1})}{(x_{i-1} - x_i)} = x$.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

61. (a) $v(15) \simeq P_2(15) = 1{,}8125$.
    (b) $v(15) \simeq P_3(15) = 1{,}815\,625$.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

62. (a) $p_2(t) = 5,11\frac{(t-30)(t-40)}{(20-30)(20-40)} + 5,06\frac{(t-20)(t-40)}{(30-20)(30-40)} + 5,0\frac{(t-20)(t-30)}{(40-20)(40-30)}$, ce qui donne $P_2(35) = 5,031\,25 \times 10^{-5}$ mol/l.
    (b) Cela revient à faire de l'extrapolation car $35 \notin [20\,,\,30]$.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

63. (a) On obtient le système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 150 & 150^2 & 150^3 \\ 1 & 160 & 160^2 & 160^3 \\ 1 & 170 & 170^2 & 170^3 \\ 1 & 180 & 180^2 & 180^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,426 \\ 1,447 \\ 1,469 \\ 1,492 \end{pmatrix}$$

(b) $Cp(179) \simeq p_1(179) = 1,4897$.

(c) $Cp(179) \simeq p_3(179) = 1,489\,655$.

(d) Les résutats sont similaires en dépit du fait que l'approximation obtenue en (c) est le résultat d'une extrapolation.

(e) On obtient le même résultat car le polynôme d'interpolation de degré 3 qui passe par les 4 premiers points est unique.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

64. (a) $p_2(T) = 0,0075L_0(T) + 0,0099L_1(T) + 0,0147L_2(T)$,
où $L_0(T) = \frac{(T-212)(T-363)}{(115-212)(115-363)}$, $L_1(T) = \frac{(T-115)(T-363)}{(212-115)(212-363)}$ et $L_2(T) = \frac{(T-115)(T-212)}{(363-115)(363-212)}$.
On a donc $k(300) \simeq P_2(300) = 1,2563 \times 10^{-2}$ Btu/hr ft °F.

(b) $p_2(k) = 115L_0(k) + 212L_1(k) + 363L_2(k)$,
où $L_0(k) = \frac{(k-0,0099)(k-0,0147)}{(0,0074-0,0099)(0,0074-0,0147)}$, $L_1(k) = \frac{(k-0,0074)(k-0,0147)}{(0,0099-0,0074)(0,0099-0,0147)}$ et $L_2(k) = \frac{(k-0,0074)(k-0,0099)}{0,0147-0,0074)(0,0147-0,0099)}$. On a donc $T(0,008) \simeq p_2(0,008) = 1,3943 \times 10^2$ °F

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

65. (a) $p_1(x) = f(0,2)\dfrac{x-1}{0,2-1} + f(1)\dfrac{x-0,2}{1-0,2}$.

(b) $f(0,5) \simeq p_1(0,5) = 1,702\,158 \times 10^{-2}$ et $|f(0,5) - p_1(0,5)| = 0,1254 \times 10^{-2}$.
L'approximation $p_1(0,5) = \boxed{1},702\,158 \times 10^{-2}$ possède 1 chiffre significatif.

(c) $E_1(x) \leq \frac{M}{2!}(x-0,2)(x-1)$ où $|f''(x)| \leq M$ pour $x \in [0,2\,,\,1]$. L'erreur d'interpolation est maximale en $x = 0,6$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

66. (a) $P_2(t) = 0,3335\dfrac{(t-2,25)(t-4.5)}{(-2,25)(4,5)} + 0,2965\dfrac{t(t-4,5)}{(2,25)(2,25-4,5)} + 0,2660\dfrac{t(t-2,25)}{(4,5)(4,5-2,25)}$.

(b) $C(3\,\mathrm{s}) = C(\frac{1}{20}\,\mathrm{min}) \simeq P_2(\frac{1}{20}) = 0,3326$ gmol/dm³.

(c) On obtient le système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,00 & 0,00^2 \\ 1 & 2,25 & 2,25^2 \\ 1 & 4,50 & 4,50^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3335 \\ 0,2965 \\ 0,2660 \end{pmatrix}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

67.

$$\begin{aligned} E_9(x) &\leq \frac{1}{40}\left(\frac{1}{9}\right)^{10} \max_{x\in[1,2]} |f^{(10)}(x)| \\ &\leq \frac{1}{40}\left(\frac{1}{9}\right)^{10} 362880 = 2,601\,824\,190 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Les polynômes de degré élévé ont tendance à osciller mais dans ce cas l'approximation est acceptable car les abscisses des points d'interpolation sont proches plus proches les uns des autres.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

68. (a) $p_2(x) = 3\frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2})\pi} + 2\frac{-x(x-\pi)}{\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}} - 3\frac{x(x-\frac{\pi}{2})}{\pi(\frac{\pi}{2})}$.

(b) $f(\frac{\pi}{4}) \simeq P_2(\frac{\pi}{4}) = 3$.

(c)

$|e_2(x)| \leq \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |f^{(3)}(\xi(x))|\frac{h^3}{4\times 3} = \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\cos x + 3\sin x|\frac{\pi^3}{96}$

$\max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\cos x + 3\sin x| \simeq 3,61 \Rightarrow |e_2(x)| \leq \frac{3,61\pi^3}{96} = 1,165\,965.$

Autre solution $|-2\cos x + 3\sin x| \leq 2|\cos x| + 3|\sin x| \leq 5 \Rightarrow |e_2(x)| \leq 1,614\,910.$

(d)

$|e_1(x)| \leq \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |f^{(2)}(\xi(x))|\frac{h^2}{4\times 2} = \max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\sin x - 3\cos x|\frac{\pi^2}{8n^2}$

$\max_{\xi(x)\in]0,\pi[} |-2\sin x - 3\cos x| \simeq 3,61 \Rightarrow |e_1(x)| \leq \frac{0,45125\pi^2}{n^2} \leq 10^{-4}$

$n \geq \sqrt{4,515\times 10^3\pi^2} = 211,037 \Rightarrow n \geq 212$

Autre solution $|-2\sin x - 3\cos x| \leq 2|\sin x| + 3|\cos x| \leq 5 \Rightarrow n \geq 249.$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Interpolation de Newton

69. (a) $f(3) \simeq P_2(3) = 0$.

(b) $E_2(3) \simeq 2$.

(c) $P_3(x) = 3 + 6x - 6x^2 + x^3$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

70. (a) On obtient la table de différences divisées suivante:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$
1,9	0,94 630			
		-0,127 975		
1,5	0,99 749		-0,466 875	
		-0,314 725		0,082 448
2,3	0,74 571		-0,400 917	
		-0,795 824		
2,7	0,42 738			

(b) $f(1,8) \simeq p_2(1,8) = 0,973\,104$.

(c) $|E_2(1,8)| \simeq 0,123\,672 \times 10^{-2} \Rightarrow p_2(1,8) = 0,\boxed{97}3\,104$ possède 2 chiffres significatifs.

(d) $E_2(1,8) \leq \frac{|\cos(2,3)|}{3!}|(1,8-1,9)(1,8-1,5)(1,8-2,3)|$.

(e) On obtient le même résultat car le polynôme de degré 2 qui passe par les points d'abscisses $x = 1,5$; $1,9$ et $2,3$ est unique.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

71. (a) Il faut classer les points par distance croissante par rapport à l'abscisse $x = 3,1$. On prend donc successivement les abscisses: $3,0$, $3,5$, $2,5$, $4,0$ et $1,5$. En prenant le polynôme de degré 0, on trouve:

$$p_0(3,1) = 1,098\,612 \text{ et } |E_0(3,1) \simeq 0,030\,830 > 0,5 \times 10^{-3}.$$

Polynôme de degré 1:

$$p_1(3,1) = 1,129\,4422 \text{ et } |E_1(3,1) \simeq 0,002\,25 > 0,5 \times 10^{-3}.$$

Polynôme de degré 2:

$$p_2(3,1) = 1,131\,6958 \text{ et } |E_2(3,1) \simeq 0,000\,24 < 0,5 \times 10^{-3}.$$

(b)

$$E_2(3,1) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(3,1-3,0)(3,1-3,5)(3,1-2,5) \text{ pour un certain } \xi \in [2,5\,,\,3,5].$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

72. (a) Il faut classer les points par distance croissante par rapport à l'abscisse $t = 1,2$. On prend donc les 3 abscisses: $1,4$, $0,7$ et $2,1$.

$$v(1,2) \simeq p_2(1,2) = 79,25\,\mathrm{km/h}.$$

(b)

$$E_2(1,2) = \frac{v^{(3)}(\xi)}{6}(1,2-1,4)(1,2-0,7)(1,2-2,1) \text{ pour } \xi \in [0,7\,,\,2,1].$$

(c)

$$E_2(1,2) \simeq -4,859\,086\,491 \times 10^{-2}(1,2-1,4)(1,2-0,7)(1,2-2,1) = -4,373\,177\,842 \times 10^{-3}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

73. (a) Il faut classer les points par distance croissante par rapport à l'abscisse $\mathrm{erf}(\bar{x}) = 0.156\,9460$. On prend donc les 3 abscisses: $0,167\,9960$, $0,112\,4629$ et $0,222\,7026$.

$$\bar{x} \simeq p_2(0.156\,9460) = 0,139\,99.$$

(b)

$$E_2(0.156\,9460) = \frac{x^{(3)}(\xi)}{6}(0.156\,9460 - 0,167\,9960)(0.156\,9460 - 0,112\,4629) \times (0.156\,9460 - 0,222\,7026) \text{ pour } \xi \in [0,112\,4629\,,\ 0,222\,7026].$$

(c)

$$E_2(0.156\,9460) \simeq 0,259\,5889(0.156\,9460 - 0,167\,9960)(0.156\,9460 - 0,112\,4629) \times (0.156\,9460 - 0,222\,7026) = 8,390\,402 \times 10^{-6}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

74. On donne le tableau des valeurs des différents polynômes en fonction du degré ainsi que l'approximation de l'erreur commise.

n	$p_n(1,05)$	$E_n(1,05)$
1	$0,852\,839\,300$	$0,299\,125 \times 10^{-3}$
2	$0,853\,138\,425$	$0,410\,000 \times 10^{-5}$

On constate que l'approximation de l'erreur absolue est inférieure à $0,5 \times 10^{-5}$ pour le polynôme de degré 2.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

75. (a) Il faut classer les points par distance croissante par rapport à l'abscisse $v = 18$. On prend donc les 3 abscisses: 20, 15 et 11.
$p_2(v) = 4,8 + 0,32(v-20) - 0,0088(v-20)(v-15)$ ce qui donne $t(18) \simeq p_2(18) = 4,2133$ s.

(b) L'estimé de l'erreur est donné par: $E_2(v) \simeq 0,000\,846\,56(v-20)(v-15)(v-11)$, d'où $E_2(18) \simeq -0,0355$ s.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

76. (a) Il faut classer les points par distance croissante par rapport à l'abscisse $x = 5000$. On prend donc les 3 abscisses: 1500, 100 et 1000.

$$t(5000) \simeq p_2(5000) = 891,5270 \text{ s}.$$

(b) Une approximation de l'erreur d'interpolation est donnée par

$$E_2(x) \simeq -1,993\,039\,64 \times 10^{-9}(x-1500)(x-100)(x-10000) \Rightarrow E_2(5000) \simeq 1,709\,031\,49 \times 10^2.$$

(c) Les paramètres a, b, c et d sont solutions du système non linéaires suivant:

$$\begin{cases} a + b\ln c(-d) &= 0; \\ a + b\ln c(100-d) &= 13; \\ a + b\ln c(1500-d) &= 245; \\ a + b\ln c(10000-d) &= 1980. \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Splines cubiques

77. La spline naturelle $S(x)$ et le polynôme $p(x) = x^3$ coïncideront seulement si $p(x)$ vérifie la propriété $p''(0) = p''(3) = 0$. Or ce n'est pas le cas. On s'attend donc à commettre une erreur d'interpolation.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

78. $p_1'(x_0) = f_0' \Rightarrow -\frac{h_1}{3}f_0'' - \frac{h_1}{6}f_1'' = f_0' + \frac{(f(x_0)-f(x_1))}{h_1}$.
$p_n'(x_n) = f_n' \Rightarrow \frac{h_n}{6}f_{n-1}'' + \frac{h_n}{3}f_n'' = f_n' + \frac{(f(x_{n-1})-f(x_n))}{h_n}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

79.
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \in [0\,,\,1]; \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 & \text{si} \quad x \in [1\,,\,3]. \end{cases}$$
La spline $f(x)$ n'est pas naturelle.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

80. (a) Le point 0, 75 est dans l'intervalle $[0,5\,,\,1,0]$ et l'on doit donc utiliser le polynôme: $p_2(x) = p_2(x) = 0,4773(1-x)^3 + 0,3926(x-0,5)^3 + 2,1359(1-x) + 2,988(x-0,5)$, ce qui donne $f(0,75) \simeq p_2(0,75) = 1,294\,572$.
(b) Les 2 polynômes donnnent le même résultat, car la dérivée première de la spline est continue en $x = 1$.
(c) À l'aide du tableau, on trouve, $f''(1,5) \simeq f_3'' = 3,308$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

81. $f(1,03) \simeq p_2(1,03) = 0,809\,383\,22$. L'approximation $p_2(1,03) = 0,\boxed{809}\,383\,22$ possède 3 chiffres significatifs.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

82. (a) On obtient 2 équations à 2 inconnues:
$$\begin{cases} \frac{5}{2}f_1'' + \frac{1}{2}f_2'' = 6; \\ \frac{1}{2}f_1'' + \frac{5}{2}f_2'' = 6. \end{cases}$$
(b) On obtient 2 équations à 2 inconnues:
$$\begin{cases} \frac{7}{4}f_1'' + \frac{1}{2}f_2'' = 6; \\ \frac{1}{2}f_1'' + \frac{7}{4}f_2'' = 6. \end{cases}$$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

83. (a) $a_2 = S_2(0) = f(0) = 0$.
(b) Pour l'étudiant Y $S_1'(0) = -1 \neq S_2'(0) = 1$.
La dérivée de la spline est discontinue en 0, l'étudiant X a trouvé la bonne réponse.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

84. La fonction $S(x)$ n'est pas une spline cubique car la dérivée seconde de $S(x)$ n'est pas continue ($P_1''(-1) = 12 \neq P_2''(-1) = 0$).
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

85. (a) $x_i(0,01) \simeq p_2(0,01) = 0,0046$.

(b) i.

On obtient 6 équations à 6 inconnues:

$$\begin{cases} f_0'' = a; \\ \frac{2}{5}f_0'' + 2f_1'' + \frac{3}{5}f_2'' = -100; \\ \frac{2}{3}f_1'' + 2f_2'' + \frac{1}{3}f_3'' = \frac{2000}{9}; \\ \frac{3}{5}f_2'' + 2f_3'' + \frac{2}{5}f_4'' = 400; \\ \frac{2}{3}f_3'' + 2f_4'' + \frac{1}{3}f_5'' = 2000; \\ f_5'' = b. \end{cases}$$

ii.

On obtient 6 équations à 6 inconnues:

$$\begin{cases} f_0'' - f_1'' = 0; \\ \frac{2}{5}f_0'' + 2f_1'' + \frac{3}{5}f_2'' = -100; \\ \frac{2}{3}f_1'' + 2f_2'' + \frac{1}{3}f_3'' = \frac{2000}{9}; \\ \frac{3}{5}f_2'' + 2f_3'' + \frac{2}{5}f_4'' = 400; \\ \frac{2}{3}f_3'' + 2f_4'' + \frac{1}{3}f_5'' = 2000; \\ f_4'' - f_5'' = 0. \end{cases}$$

iii.

On obtient 6 équations à 6 inconnues:

$$\begin{cases} -\frac{4\times10^{-3}}{3}f_0'' - \frac{2\times10^{-3}}{3}f_1'' = a - 0,5. \\ \frac{2}{5}f_0'' + 2f_1'' + \frac{3}{5}f_2'' = -100; \\ \frac{2}{3}f_1'' + 2f_2'' + \frac{1}{3}f_3'' = \frac{2000}{9}; \\ \frac{3}{5}f_2'' + 2f_3'' + \frac{2}{5}f_4'' = 400; \\ \frac{2}{3}f_3'' + 2f_4'' + \frac{1}{3}f_5'' = 2000; \\ \frac{10^{-3}}{6}f_4'' + \frac{10^{-3}}{3}f_5'' = b - 2. \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

86. (a) Un polynôme de degré 3 étant entièrement déterminé par 4 valeurs d'interpolation en des nœuds distincts, f et y coïncideront seulement si f vérifie la propriété $f''(0) = f''(1) = 0$. Or ce n'est pas le cas. On s'attend donc à commettre une erreur d'interpolation.

    (b) On impose les conditions d'interpolation, de jonction et de continuité des dérivées premières et secondes pour obtenir $a = 2$, $b = 8$, $c = 6$ et $d = -1$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

87. (a) On a n polynômes à déterminer, ce qui donne $3n$ inconnues.

$$\begin{aligned} P_i(x_{i-1}) &= f(x_{i-1}) \text{ et } P_i(x_i) = f(x_i) \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n; \\ P_i'(x_i) &= P_{i+1}'(x_i) \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

    (b) $P_i'(x) = -f_{i-1}' \dfrac{(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})} + f_i' \dfrac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$.

    (c) $P_i(x) = -f_{i-1}' \dfrac{(x - x_i)^2}{2(x_i - x_{i-1})} + f_i' \dfrac{(x - x_{i-1})^2}{2(x_i - x_{i-1})} + f(x_{i-1}) + \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} f_{i-1}'$.

    (d) $f_{i-1}' + f_i' = \frac{2}{(x_i - x_{i-1})} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

88. (a) $y_1(t) = a_0 + b_0 t + c_0 t^2$ et $y_1(t) = a_1 + b_1 t + c_1 t^2$.
    On obtient le système linéaire de 5 équations à 6 inconnues suivant:

$$\begin{cases} a_0 = 2; \\ a_0 + b_0 + c_0 = 1; \\ a_1 + b_1 + c_1 = 1; \\ a_1 + 2b_1 + 4c_1 = 4; \\ b_0 + 2c_0 = b_1 + 2c_1. \end{cases}$$

    (b) On a $y_1(t) = y_2(t) = p_2(t) = 2 - 3t + 2t^2$. On obtient le polynôme de degré 2 qui passe par les 3 points.

    (c) En imposant les conditions, on voit que la troisième branche est la même que les 2 premières. En l'évaluant en t=3 on trouve la valeur 11. Si on essaie d'interpoler toute autre valeur que 11 en t=3, il n'existe aucune spline quadratique.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

89. (a) $v(2,5) \simeq p_2(2,5) = 58,375\,\mathrm{km/h}$.

    (b) $E_2(2,5) \simeq -0,3125\,\mathrm{km/h}$.

    (c) On obtient 4 équations à 4 inconnues:

$$\begin{cases} f_0'' - f_1'' = 0; \\[2ex] \frac{1}{2} f_0'' + 2 f_1'' + \frac{1}{2} f_2'' = -\frac{42}{50}; \\[2ex] \frac{1}{2} f_1'' + 2 f_2'' + \frac{1}{2} f_3'' = -\frac{6}{25}; \\[2ex] f_3'' = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

90. (a) On obient la table de différences divisées suivante:

i	t_i	$f(t_i)$	$f[t_i,t_{i+1}]$	$f[t_i,\cdots,t_{i+2}]$	$f[t_i,\cdots,t_{i+3}]$
0	0	2,00			
			$-1,1\times10^{-2}$		
1	10	1,89		$-3,0\times10^{-4}$	
			$-1,7\times10^{-2}$		$-8,333\,333\times10^{-6}$
2	20	1,72		$-5,5\times10^{-4}$	
			$-2,8\times10^{-2}$		
3	30	1,44			

(b) De la table de différences divsées on a $p_2(t)=2,00-1,1\times10^{-2}t-3,0\times10^{-4}t(t-10)$, ce qui donne $p_2(15)=1,8125$.

(c) $E_2(t)\simeq f[0,10,20,30]t(t-10)(t-20)$, ce qui donne $E_2(15)\simeq3,123\,74\times10^{-3}$.

(d) On obtient 4 équations à 4 inconnues:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}f_0''+2f_1''+\frac{1}{2}f_2''=-18,0\times10^{-4};\\ \frac{1}{2}f_1''+2f_2''+\frac{1}{2}f_3''=-33,0\times10^{-4};\\ -2f_0''-f_1''=66\times10^{-4};\\ f_3''=1.\end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

91. (a) De la table de différences divsées on a : $p_3(x)=30-10x+-200x(x-0,1)+566,667x(x-0,1)(x-0,2)$, ce qui donne $p_3(0,3)=18,4$. La valeur de $f(0,3)$ n'est pas acceptable car pour cette valeur la fonction n'est plus décroissante.

(b) On peut estimer la valeur de l'erreur par $E_3(x)\simeq a_4x(x-0,1)(x-0,2)(x-0,5)$, où $a_4=\frac{-87,30-566,667}{0,8-0}=-817,4603$. Cette erreur prend la valeur $0,9810$ en $x=0,3$. L'approximation $P_3(0,3)=\boxed{1}8,4$ possède 1 chiffre significatif.

(c) Il faut choisir les abscisses les plus proches de $x=0,3$ à savoir $x_0=0,2$, $x_1=0,5$, $x_2=0,1$ et $x_1=0,0$. Les polynômes de Lagrange sont

$$L_0(x)=\frac{(x-0,5)(x-0,1)x}{(0,2-0,5)(0,2-0,1)0,2},\quad L_1(x)=\frac{(x-0,2)(x-0,1)x}{(0,5-0,2)(0,5-0,1)0,5},$$
$$L_2(x)=\frac{(x-0,2)(x-0,5)x}{(0,1-0,2)(0,1-0,5)0,1}\text{ et }L_3(x)=\frac{(x-0,2)(x-0,5)(x-0,1)}{(0,0-0,2)(0,0-0,5)(0,0-0,1)}.$$

(d) On obtient 2 équations à 2 inconnues:

$$\begin{cases}2f_1''+\frac{1}{2}f_2''=-1200;\\ \frac{1}{4}f_1''+2f_2''=499,98.\end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
0	4				
		1			
2	6		−3		
		−8		1	
3	−2		2		−0,125
		−2		0,25	
5	−6		3		
		7			
6	1				

92. (a) i. Voici la table des différences divisées:
   ii. $p_3(x) = 4 + x - 3x(x-2) + x(x-2)(x-3)$.
   iii. $f(4) \simeq p_3(4) = -8$ et $E_3(4) \simeq -0,125(4(4-2)(4-3)(4-5)) = 1$.
   (b) $f(4) \simeq p_3(4) = -5,928\,571$.
   (c) Contrairement à la spline cubique, cette approximation ne garantit pas la continuité de la seconde au point $(3\,,\,-2)$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Différentiation et intégration numérique

Différentiation numérique

93. $f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, $f'(x+h) \simeq \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}$, $f'(x-h) \simeq \frac{f(x)-f(x-2h)}{2h}$, $f''(x) \simeq \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$ d'où $f''(x) \simeq \frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

94. L'erreur commise est qu'on est limité à un développement de Taylor de degré 2 (ordre 3). Le bon raisonnement: $f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+\mathcal{O}(h^5)$ et $f(x-h) = f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+\mathcal{O}(h^5)$.
Alors $f''(x) = \frac{1}{h^2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x)+\mathcal{O}(h^3)$ et donc l'ordre de cette approximation de $f''(x)$ est 2.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

95. $f(x+3h) = f(x)+3hf'(x)+\frac{9h^2}{2}f''(x)+\frac{27h^3}{6}f'''(x)+\frac{81h^4}{24}f''''(x)+\mathcal{O}(h^5)$;
$-3f(x+2h) = -3f(x)-6hf'(x)-\frac{12h^2}{2}f''(x)-\frac{24h^3}{6}f'''(x)-\frac{48h^4}{24}f''''(x)+\mathcal{O}(h^5)$;
$3f(x+h) = 3f(x)+3hf'(x)+\frac{3h^2}{2}f''(x)+\frac{3h^3}{6}f'''(x)+\frac{3h^4}{24}f''''(x)+\mathcal{O}(h^5)$. On a $f'''(x) = \frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3} - \frac{3h}{2}f''''(x)+\mathcal{O}(h^2)$. L'approximation est d'ordre 1.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

96. La différence avant d'ordre 2 avec $h = 2$ donne $f'(2) \simeq \frac{-f(6)+4f(4)-3f(2)}{4} = -1$. La différence avant d'ordre 1 donne $f'(2) \simeq \frac{f(4)-f(2)}{2} = -1$ pour $h = 2$; $f'(2) \simeq \frac{f(6)-f(2)}{4} = -1$ pour $h = 4$ et $f'(2) \simeq \frac{f(8)-f(2)}{6} = -\frac{3}{2}$ pour $h = 6$. Ensuite, on applique l'extrapolation de Richardson sur la différence avant d'odre 1 pour obtenir des approximations d'ordre 2. Ainsi sur les resultats obtenus avec $h = 2$ et $h = 4$, on obtient $f'(2) \simeq \frac{2\times(-1)-(-1)}{2-1} = -1$; et avec $h = 2$ et $h = 6$, on obtient $f'(2) \simeq \frac{3\times(-1)-(-\frac{3}{2})}{3-1} = -\frac{3}{4}$ qui sont des approximations d'ordre 2.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

97. (a) L'expression des deux premiers termes de l'erreur : $\frac{(a-b)h}{2}f''(x)+\frac{(a^2+b^2-ab)h^2}{6}f'''(x)$
(b) Si $a \neq b$, l'approximation est d'ordre 1. Si $a = b$, l'approximation est d'ordre 2.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

98. (a)

$$\begin{aligned}\left|\frac{e(x+h)-e(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)\right| &\leq \frac{|e(x+h)|+|e(x-h)|}{2h} + \frac{h^2}{6}M \\ &\leq \frac{\epsilon+\epsilon}{2h} + \frac{h^2}{6}M = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M = g(h).\end{aligned}$$

(b) La formule centrée donne $f'(0,9) \simeq 0,62250$ pour $h_1 = 0,002$ et $f'(0,9) \simeq 0,6220$ pour $h_2 = 0,005$. Les erreurs absolues sont respectivement $E_{h_1} = 0,00089$ et $E_{h_2} = 0,00039$. Bien que $h_1 < h_2$, l'approximation de $f'(0,9)$ obtenue avec h_2 est plus précise que celle obtenue avec h_1. Cette apparente contradiction est due au fait que l'erreur $g(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$ ne tend pas nécessairement vers 0 quand h tend vers 0. En effet quand $h \Rightarrow 0$ $\quad \frac{h^2}{6}M \Rightarrow 0$ $\quad$ mais $\quad \frac{\epsilon}{h} \Rightarrow \infty$.

(c) Il sagit de trouver la valeur de h qui minimise la fonction erreur $g(h)$. On résout l'équation $g'(h) = -\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{h}{3}M = 0$ et on trouve $h = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{M}}$. On note que $g''\left(\sqrt{\frac{3\epsilon}{M}}\right) > 0$, ce qui confirme $h = h_{min} = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{M}}$.
On a $M = \max_{0,8\leq x\leq 0,950} |\cos(x)| =\leq \cos(0,8)$. De plus, puisque tous les chiffres des approximations de $f(x)$ du tableau sont significatifs, $\epsilon = 0,5\times 10^{-5}$ (10^{-5} correspond à la position du dernier chiffre significatif). On a dans ce cas $h_{min} = 0,02782$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

99. (a) La formule aux différences donne $f''(1) \simeq -0,8495$ pour $h = 0,1$ et $f''(1) \simeq -0,875\,675$ pour $h = 0,2$. Les erreurs absolues sont respectivement $E(h = 0,1) = 0,008\,029$ et $E(h = 0,2) = 0,034\,204$. Le ratio des erreurs absolues est $\frac{E(h=0,2)}{E(h=0,1)} = 4,26 \simeq 2^2$. La formule est d'ordre 2.

(b)

$$\begin{aligned}
-f(x+3h) &= -f(x) - 3hf'(x) - \frac{9h^2}{2}f''(x) - \frac{27h^3}{3!}f'''(x) - \frac{81h^3}{4!}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)\\
4f(x+2h) &= 4f(x) + 8hf'(x) + \frac{16h^2}{2}f''(x) + \frac{32h^3}{3!}f'''(x) + \frac{64h^3}{4!}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)\\
-5f(x+h) &= -5f(x) - 5hf'(x) - \frac{5h^2}{2}f''(x) - \frac{5h^3}{3!}f'''(x) + \frac{5h^3}{4!}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)\\
2f(x) &= 2f(x)
\end{aligned}$$

$$h^2app(h) = h^2f''(x) - \frac{11h^4}{12}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$$

$$app(h) = f''(x) - \frac{11h^2}{12}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f''(x) = app(h) + \frac{11h^2}{12}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3) \Rightarrow f''(x) = app(h) + \mathcal{O}(h^2)$$

$\Rightarrow$ approximation d'ordre 2.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

100. (a) La formule aux différences donne $f'''(1) \simeq -1,119\,159\,99$ pour $h = 0,05$ et $f'''(1) \simeq -1,167\,984\,99$ pour $h = 0,1$. Les erreurs absolues sont respectivement $E(h = 0,05) = 0,015\,724\,93$ et $E(h = 0,1) = 0,0645\,499\,3$. Le ratio des erreurs absolues est $\frac{E(h=0,1)}{E(h=0,05)} = 4,105 \simeq 2^2$. La formule est d'ordre 2.

(b)

$$\begin{aligned}
f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \frac{16h^4}{4!}f''''(x)\\
&\quad + \frac{32h^5}{5!}f^{(5)}(x) + \frac{64h^6}{6!}f^{(6)}(x) + \mathcal{O}(h^7)\\
-2f(x+h) &= -2f(x) - 2hf'(x) - \frac{2h^2}{2}f''(x) - \frac{2h^3}{3!}f'''(x) - \frac{2h^4}{4!}f''''(x)\\
&\quad - \frac{2h^5}{5!}f^{(5)}(x) - \frac{2h^6}{6!}f^{(6)}(x) + \mathcal{O}(h^7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f(x-2h) &= -f(x)+2hf'(x)-\tfrac{4h^2}{2}f''(x)+\tfrac{8h^3}{3!}f'''(x)-\tfrac{16h^4}{4!}f''''(x)\\
&\quad +\tfrac{32h^5}{5!}f^{(5)}(x)-\tfrac{64h^6}{6!}f^{(6)}(x)+\mathcal{O}(h^7)\\
2f(x-h) &= 2f(x)-2hf'(x)+\tfrac{2h^2}{2}f''(x)-\tfrac{2h^3}{3!}f'''(x)+\tfrac{2h^4}{4!}f''''(x)\\
&\quad -\tfrac{2h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\tfrac{2h^6}{6!}f^{(6)}(x)+\mathcal{O}(h^7)
\end{aligned}$$

$$2h^3app(h) = 2h^3f'''(x)+\tfrac{60h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\mathcal{O}(h^7)$$

$$app(h) = f^{(3)}(x)+\tfrac{h^2}{4}f^{(5)}(x)+\mathcal{O}(h^4)$$

$$f^{(3)}(x) = app(h)-\tfrac{h^2}{4}f^{(5)}(x)+\mathcal{O}(h^4) = app(h)+\mathcal{O}(h^2).$$

Approximation d'ordre 2.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

101. Si $\lambda \neq 0$: $f'(x) = \frac{3f(x)-(4+\lambda)f(x-h)+(1+\lambda)f(x-2h)}{(2-\lambda)h} + \mathcal{O}(h)$, approximation d'ordre 1.
Si $\lambda = 0$: $f'(x) = \frac{3f(x)-(4+\lambda)f(x-h)+(1+\lambda)f(x-2h)}{(2-\lambda)h} + \mathcal{O}(h^2)$, approximation d'ordre 2.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

102. $f(x+h) = f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2}+\frac{f'''(x)h^3}{3!}+\ldots,$
$f(x-h) = f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2}-\frac{f'''(x)h^3}{3!}+\ldots.$
D'où

$$\begin{aligned}
App_\theta(h) &= (1-\theta)\Big[f'(x)+\tfrac{f''(x)h}{2}+\tfrac{f'''(x)h^2}{3!}+\ldots\Big]+\theta\Big[f''(x)-\tfrac{f''(x)h}{2}+\tfrac{f'''(x)h^2}{3!}-\ldots\Big]\\
&= f'(x)+(1-2\theta)\tfrac{f''(x)h}{2}+\tfrac{f'''(x)h^2}{3!}+\ldots.
\end{aligned}$$

D'où $f'(x) = (1-\theta)\Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big)+\theta\Big(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\Big)+(2\theta-1)\frac{f''(x)h}{2}-\frac{f'''(x)h^2}{6}+\ldots$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Quadratures de Newton-Cotes

103. Simpson 3/8 ($h=\frac{4}{3}$): 17,327 866 29 avec une erreur absolue de $0,54\times10^{-2}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

104. Boole ($h=\frac{\pi}{32}$): 0,881 374 32 avec une erreur absolue de $0,733\times10^{-6}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

105. $\frac{\text{Erreur}(h=0{,}2)}{\text{Erreur}(h=0{,}1)} = \frac{0{,}009\,872}{0{,}001\,234} = 7,99 \simeq 2^3$. La méthode est donc d'ordre 3.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

106. $\int_{1,8}^{3,4} e^x\,dx = 23,91445$. 46 intervalles assurent une approximation de I avec au moins 4 chiffres significatifs.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

107. (a) **Faux**. Par exemple l'approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$ sera, en général, moins précise avec Trapèze simple (ordre 3), qu'avec Trapèze composée (ordre 2).

(b) **Faux**. La méthode de Simpson 1/3 nécessite l'évaluation de la fonction $\frac{1}{\tan(x)}$ en $x = 0$, qui n'est pas définie à cet endroit.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

108. Au moins 46 sous-intervalles.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

109. $S_n - I = -E = \frac{-3(\alpha-1)}{40}\frac{h^4}{\eta^4} < 0 \quad$ où $\quad \eta \in [1,\ \alpha]$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

110. La méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ simple donne

$$L \simeq \frac{50}{3}\left(\sqrt{1+(H'(0))^2} + 4\sqrt{1+(H'(50))^2} + \sqrt{1+(H'(100))^2}\right).$$

Pour obtenir les approximations d'ordre 2 des dérivées les plus précises pour $H'(0)$, $H'(50)$ et $H'(100)$, on prend $h = 10$ et on utilise respectivement la formule avant d'ordre 2 , la formule centrée d'ordre 2 et la formule arrière d'ordre 2. On a alors $L \simeq 155{,}3616552$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

111. Il s'agit de calculer une approximation de $\int_0^{0,25} s(e)\,de$ en utilisant les 6 points du tableau. On peut construire le polynôme de degré 5 qui passe par les 6 points et l'integrer ou encore utiliser la méthode de Simpson 1/3 avec les 3 premiers points et celle de Simpson 3/8 sur les 4 derniers points pour avoir une approximation d'ordre 4.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

112. L'ordre le plus élevé est 5 car il faut combiner deux règles parmi Simpson $\frac{1}{3}$, Simpson $\frac{3}{8}$ et Boole simples. Il y a donc trois possibilités :

1. Simpson $\frac{1}{3}$ sur $\{x_0, x_1, x_2\}$ puis Boole sur $\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, ce qui donne
$$0,18730793978365406 + 0,210613307037542 = 0,39792124682119606;$$
2. Boole sur $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ puis Simpson $\frac{1}{3}$ sur $\{x_4, x_5, x_6\}$, ce qui donne
$$0,21061330703754208 + 0,18730793978365395 = 0,39792124682119601;$$
3. Simpson $\frac{3}{8}$ sur $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ puis encore sur $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, ce qui donne
$$0,19844878174314534 + 0,19844878174314526 = 0,39689756348629057.$$
Ici, les deux estimations de Simpson $\frac{3}{8}$ auraient dû être rigoureusement identiques car la fonction est paire. Les différences sont dues à l'ordre de sommation.

Les trois sont d'ordre 5. La troisième peut également être considérée comme étant d'ordre 4 puisqu'elle est équivalente à une règle de Simpson $\frac{3}{8}$ composée.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

113. Le ratio est $\frac{d(2h)}{d(h)} = \frac{|App(h=1,0)-App(h=0,5)|}{|App(h=0,5)-App(h=0,25)|} = \dfrac{|0,772\,127 - 0,703\,023|}{|0,703\,023 - 0,694\,384|} = 7,999\,07 \simeq 2^3$.
La méthode est ordre $n = 3$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

114. (a) Le terme de droite devient:

$$hf(x_0) + \frac{h^2 f'(x_0)}{2} + \frac{h^3 f''(x_0)}{6} + \frac{h^4 f'''(x_0)}{27} + \frac{h^5 f^{(4)}(x_0)}{162} + \mathcal{O}(h^6).$$

(b) Le terme de gauche devient, après intégration

$$hf(x_0) + \frac{h^2 f'(x_0)}{2} + \frac{h^3 f''(x_0)}{6} + \frac{h^4 f'''(x_0)}{24} + \frac{h^5 f^{(4)}(x_0)}{120} + \mathcal{O}(h^6).$$

(c) Le premier terme de l'erreur:

$$h^4 f'''(x_0)\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{27}\right)$$

et la méthode est d'ordre 4.

(d) Degré 2.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Quadratures de Gauss

115. Il faut utiliser la méthode de Gauss, car la fonction $\ln(x)$ n'est pas définie en $x = 0$. Les formules à 2, à 3 et à 5 points donnent respectivement les approximations $-0,405\,465$, $-0,509\,050\,405$ et $-0,571\,707\,615$. La valeur exacte est $-0,613\,705\,639$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

116. La formule à 3 points est exacte pour les polynômes de degré 5.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

117. Il suffit de prendre successivement $f(t) = 1$, $f(t) = t$ et $f(t) = t^2$ et l'on obtient un système de 3 équations en 3 inconnues. La solution est $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = \frac{3}{2}$ et $t_2 = \frac{1}{3}$. Ceci nous assure d'un degré de précision d'au moins 2. Avec ces valeurs, on vérifie que la formule de quadrature n'est pas exacte pour $f(t) = t^3$. On a donc un degré de précision de 2.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

118. Il suffit de prendre successivement $f(x) = 1$ et $f(x) = x$ et l'on obtient un système de 2 équations en 2 inconnues. La solution est $w_1 = 1$ et $x_1 = \frac{1}{4}$. Ceci nous assure d'un degré de précision d'au moins 1. Avec ces valeurs, on vérifie que la formule de quadrature n'est pas exacte pour $f(x) = x^2$. On a donc un degré de précision de 1.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

119. Il suffit de prendre successivement $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ et on obtient $A = 2h$, $B = 0$ et $C = \frac{h^3}{3}$. On a donc un degré de précision de 2.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

120. $\int_0^1 e^x\,dx \simeq 1,717\,896\,37$. L'erreur absolue est $\Delta = 0,385\,4504 \times 10^{-3} \leq 0,5 \times 10^{-3}$. L'approximation $\boxed{1,717}\,896\,37$ possède 4 chiffres significatifs.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

121. (a) $I \simeq 3,143\,166\,33$

(b) $n = 33$

(c) $I \simeq 3{,}035\,419\,52$

(d) Oui.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

122. La fonction $f(u) = \frac{1}{\sqrt{8\sin(u)-u}}$ n'est définie pour $u = 0$. Par conséquent, on doit avoir recours à une quadrature de Gauss car les quadratures de Gauss ne requièrent pas l'évaluation de la fonction à intégrer aux bornes d'intégration. On peut donc choisir une quadrature de Gauss à 15 points (par exemple). Bien entendu, étant donné que $\lim_{u\to 0} f(u) = \infty$, il est préférable de prendre un grand nombre de points.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

123. (a) Il suffit de prendre successivement $f(x) = 1$ et $f(x) = x$ et l'on obtient un système de 2 équations en 2 inconnues. La solution est $a = b = 2$. Ceci nous assure d'un degré de précision d'au moins 1. Avec ces valeurs, on vérifie que la formule de quadrature n'est pas exacte pour $f(x) = x^2$. On a donc un degré de précision de 1.

(b) $I \simeq 2f(1) + 2f(3) = 48$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

124. On pose $\phi_1 = \phi(\frac{-1}{\sqrt{3}})$ et $\phi_2 = \phi(\frac{1}{\sqrt{3}})$, alors le système non linéaire est donné par:

$$\begin{cases} 3\,e^{\frac{1}{3}}\phi_1 - 5\ln(\phi_1) - 5\ln(\phi_2) - 9 = 0; \\ 3\,e^{\frac{1}{3}}\phi_2 - 5\ln(\phi_1) - 5\ln(\phi_2) - 9 = 0. \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

125. (a) Il suffit de prendre successivement $f(x) = 1$ et $f(x) = x$ et l'on obtient un système de 2 équations en 2 inconnues. La solution est $a = b = \frac{3h}{2}$.

(b) Avec cette quadrature, on a $\int_0^3 \frac{1}{1+x}\,dx \simeq \frac{5}{4}$.

(c) Avec Simpson $\frac{1}{3}$, on a $\int_0^3 \frac{1}{1+x}\,dx \simeq 1{,}425$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

126. (a) Il faut 4 points de Gauss.

(b) Impossible d'intégrer exactement avec Simpson $\frac{1}{3}$ car cette méthode a un degré de précision inférieur au degré du polynôme.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

127. (a) $\text{erf}(0,5) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,5} e^{-u^2}\,du \simeq 0{,}570\,500\,2$

(b) $\text{erf}(0,5) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0,5} e^{-u^2}\,du \simeq 0{,}501\,790\,4$

(c) L'erreur absolue est $E(0,5) \leq 0{,}2083\times 10^{-1} \leq 0{,}5\times 10^{-1}$. L'approximation $0{,}\boxed{5}01\,790\,4$ possède un chiffre significatif.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

128. $I = \int_{-2}^{2} e^x\,dx = 2\int_{-1}^{1} e^{2t}\,dt \simeq 2\left(e^{2\sqrt{\frac{1}{3}}} + e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}}\right) = 6{,}976\,449\,920.$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

129. La formule sera exacte pour les polynômes de degré au plus 2. Si elle est exacte pour $g(t) = 1$, $g(t) = t$ et $g(t) = t^2$, w_1, w_2 et t_2 sont solution du système

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2; \\ -w_1 + w_2 t_2 = 0; \\ w_1 + w_2 t_2^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

On trouve $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{1}{3}$ et donc la quadrature est $\int_{-1}^{1} g(t)dt \simeq \frac{1}{2}g(-1) + \frac{3}{2}g(\frac{1}{3})$. Pour déterminer le degré de précision de la quadrature. on vérifie pour $g(t) = t^3$. La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{1} t^3 dt$ est 0, alors que on obtient $-\frac{1}{3}$. Le degré de précision est donc 2.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

130. Comme la fonction e^{-x^2} n'a pas de primitive, on ne peut pas l'intégrer exactement avec une méthode numérique. Il est cependant possible d'obtenir une approximation très précise avec la méthode des trapèzes composée (en utilisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) ce qui n'est le cas avec la quadrature de Gauss à 2 points qui permet d'obtenir seulement une approximation.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

131. (a) La formule sera exacte pour les polynômes de degré au plus 1. Si elle est exacte pour $g(t) = 1$ et $g(t) = t$, w_1 et w_2 sont solution du système

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2; \\ -w_1 + w_2 = 0. \end{cases}$$

On trouve $w_1 = w_2 = 1$ et donc la quadrature est $I(g) = g(-1) + g(1)$ Pour déterminer le degré de précision de la quadrature. on vérifie pour $g(t) = t^2$. La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{1} t^2 dt$ est $\frac{2}{3}$, alors que on obtient 2. Le degré de précision est donc 1.

(b) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} \simeq \frac{1}{1+(-1)^2} + \frac{1}{1+(1)^2} = 1.$

(c) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{(b-a)t+a+b}{2})\,dt \simeq \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$. On retrouve la formule du trapèze simple.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

132. (a) On pose $h = \frac{2}{3}$, $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, et $x_3 = 1$ et on obtient

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dz \simeq \frac{h}{2}(e + 2e^{\frac{1}{9}} + 2e^{\frac{1}{9}} + e) = 3,302\,213\,310.$$

(b) Pour $h = \dfrac{2}{n}$, l'erreur absolue est $|E| = \dfrac{2}{12}|f''(\eta)|h^2 = \dfrac{4}{6n^2}|e^{\eta^2}(2 + 4\eta^2) \leq \dfrac{4e}{n^2}$. Cette erreur est inférieure à 10^{-2} dès que $n \geq 33$.

(c) La quadrature est au moins de degré de précision 5 si elle est exacte pour $f(x) = x^p$ pour $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Vu que la quadrature est par hypothèse exacte pour $p =$

1, 3, 5, il faut juste montrer qu'elle est exacte pour $p = 0, 2, 4$. On obtient le système suivant:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1; \\ w_1 + w_2 x_1^2 = \frac{1}{3}; \\ w_1 + w_2 x_1^4 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

(d) La notion d'ordre n'est pas associée à la quadrature de Lobatto. Si la quadrature n'est pas exacte, on ne peut pas améliorer l'approximation. Cependant on peut améliorer l'approximation de l'integrale avec la méthode du trapèze composée en utilisant un nombre suffisament grand d'intervalles.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

133. (a) Avec 3 nœuds, il y a 4 inconnues. On impose donc 4 conditions avec $f(x) = x^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} 2 &= 3w \\ 0 &= w(x_0 + x_1 + x_2) \\ 2/3 &= w(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ 0 &= w(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3). \end{aligned}$$

(b) On trouve immédiatement $w = 2/3$. On voit ensuite facilement que $x_1 = 0$ puis que $x_0 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$;

(c) Par construction, la règle est au moins de degré 3 puisqu'elle intègre x^k exactement pour $k = 0, 1, 2, 3$. Elle n'est pas de degré 4 car

$$\frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x \neq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}\right).$$

(d) On obtient l'approximation

$$\int_{-1}^{1} \sin(x)^2 \cos(x) \mathrm{d}x \quad \simeq \quad 0,42779283045482863.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

134. (a) 2 points d'intégration.

(b) 3 points d'intégration.

(c) 4 points d'intégration.

(d) Impossible d'intégrer exactement avec la méthode des Trapèzes car cette méthode à un degré de précision qui inférieur au degré du polynôme.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

135. L'erreur est nulle car la formule de Gauss à 5 points est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 9.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

136. La formule à 10 points est exacte pour les polynômes de degré 1, pour $g(t) = 1$, on a $\int_{-1}^{1} 1 dt = 2 = w_1 + w_2 + \cdots + w_{10}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

137. Il suffit de prendre successivement $f(t) = 1$, $f(t) = t$ et $f(t) = t^2$ et l'on obtient un système de 3 équations en 3 inconnues. La solution est $a_0 = a_2 = \frac{4}{3}$ et $a_1 = -\frac{2}{3}$. Ceci nous assure d'un degré de précision d'au moins 2. Avec ces valeurs, on vérifie que la formule de quadrature est exacte aussi pour $f(t) = t^3$ mais pas pour $f(t) = t^4$. On a donc un degré de précision de 3.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

138. (a) Il suffit de prendre successivement $g(t) = 1$, $g(t) = t$ et $g(t) = t^2$ et l'on obtient un système de 3 équations en 3 inconnues. La solution est $w_1 = \frac{1+3\alpha}{3(1+\alpha)}$, $w_2 = \frac{4}{3(1-\alpha^2)}$ et $w_3 = \frac{1-3\alpha}{3(1-\alpha)}$.
(b) Il suffit de prendre $g(t) = t^3$, on obtient $\alpha = 0$ comme seule solution dans $]-1\,,1[$.
(c) Pour $\alpha = 0$, on a $w_1 = w_3 = \frac{1}{3}$ et $w_2 = \frac{4}{3}$, ce qui donne la formule de Simpson $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \simeq \frac{b-a}{2}\Big(\frac{1}{3}(g(-1)+4g(0)+g(1)\Big);\\ &\simeq \frac{h}{3}(f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)).\end{aligned}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Extrapolation de Richardson

139. (a) En utilisant les nœuds $\{5, 10, 15\}$, le polynôme de Lagrange est donné par :

$$p_2(x) = y_5\frac{(x-10)(x-15)}{50} - y_{10}\frac{(x-5)(x-15)}{25} + y_{15}\frac{(x-5)(x-10)}{50},$$

de sorte de $p_2(12) = 955,13$.
(b) En utilisant la différence finie arrière d'ordre 1 avec $h = 5$:

$$a_{25}(h=5) \approx \frac{795,94 - 2\cdot 448,98 + 0,0}{25} = -4.0808.$$

(c) En utilisant à nouveau la différence finie arrière d'ordre 1 avec $h = 10$:

$$a_{25}(h=10) \approx \frac{1183,76 - 2\cdot 795,94 + 0,0}{100} = -4,0812.$$

En combinant ces deux approximations d'ordre 1 via l'extrapolation de Richardson,

$$a_{25} \approx 2a_{25}(h=5) - a_{25}(h=10) = -4,0804.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

140. (a) On montre que: $\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{2h^2 f^{(4)}(x)}{4!} + \frac{2h^4 f^{(6)}(x)}{6!} + \mathcal{O}(h^6)$ et l'approximation est donc d'ordre 2.

(b) Pour $h = 0,2$, on obtient $f''(2,0) \simeq -0,251\,2575$ tandis que, pour $h = 0,1$, on obtient $f''(2,0) \simeq -0,250\,3200$.

(c) Une extrapolation de Richardson (avec $n = 2$) donne $f''(2,0) \simeq -0,250\,0075$ qui est une approximation d'ordre 4 puisque le deuxième terme de l'erreur obtenue en a) est de degré 4 en h.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

141. (a) Il faut utiliser les points dont les abscisses sont les plus rapprochées de $t = 1,2$ soit dans l'ordre $t = 1,0$, $t = 1,5$ et $t = 0,5$. Obtient ainsi le polynôme $p_2(x) = 75,5 + 13,4(t-1,0) - 0,8(t-1,0)(t-1,5)$ qui vaut 78,228 km/h en $t = 1,2$.

(b) $E_2(t) = \frac{1}{3!}v'''(\xi)(t-1,0)(t-1,5)(t-0,5)$ pour un certain $\xi \in [0,5\,,\,1,5]$.

(c) Pour $h = 1,0$, la différence centrée donne $14,7\text{km/(h.s)} = 4,083\,333\text{m/s}^2$, tandis que pour $h = 0,5$, on obtient $3,833\,333\text{m/s}^2$. Une extrapolation de Richardson avec $n = 2$ donne $a = 3,75\text{m/s}^2$ qui est une approximation d'ordre 4.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

142. (a) On peut prendre une différence centrée d'ordre 2 avec $h = 0,1$ et l'on trouve $P'(X \leq 1,2) \simeq 0,194\,328$. En prenant ensuite $h = 0,2$, on trouve $P'(X \leq 1,2) \simeq 0,194\,7465$. On fait ensuite une extrapolation de Richardson (avec $n = 2$) pour obtenir $P'(X \leq 1,2) \simeq 0,194\,1885$ qui est une approximation d'ordre 4. La valeur exacte est $P'(X \leq 1,2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(1,2)^2}{2}} = 0,194\,186\,055$ et l'erreur commise est $0,555 \times 10^{-5}$.

(b) On prend directement une différence centrée d'ordre 2 (pour la dérivée seconde) pour obtenir $P''(X \leq 1,2) \simeq -0,232\,720$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

143. On se place en $t = 15$. Une différence centrée d'ordre 2 avec $h = 10$ donne $T'(15) \simeq -1,835$. Prenant ensuite $h = 5$, on obtient $T'(15) \simeq -1,63$. Une extrapolation de Richardson donne l'approximation d'ordre 4: $T'(15) \simeq -1,561\,6667$. On a alors en divisant, $k \simeq 0,1001$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

144. (a) La différence centrée s'écrit en prenant respectivement h et $2h$: $f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ et $f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{4h}$. Puisqu'il s'agit d'une approximation d'ordre 2, l'extrapolation de Richardson donne alors: $\frac{2^2\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\right)-\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{4h}\right)}{2^2-1}$ et l'on obtient en simplifiant la formule donnée.

(b) En utilisant $h = 0,1$, on trouve 0,999 996 66 tandis qu'avec $h = 0,3$ on trouve 0,999 727 092. Les erreurs absolues respectives obtenues en comparant avec la valeur exacte 1 sont respectivement $3,3375 \times 10^{-6}$ et $2,7291 \times 10^{-4}$. Le rapport des valeurs de h est 3 et le rapport des erreurs est $81,77 \simeq 3^4$, ce qui donne un ordre $n = 4$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

145. (a) Les développements de Taylor donnent
$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$,
et

$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$.
On a alors

$$\frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h} = f'(x) - \frac{1}{3}h^2 f'''(x) + O(h^3) = f'(x) + \mathcal{O}(h^2),$$

donc une approximation d'ordre 2.

(b) $f'(0,2) \simeq \frac{-f(1,0)+4f(0,0)-3f(0,2)}{2(0,4)} \simeq -0,114\,787\,375$.

(c) $h = 0,4$: $f'(0,2) \simeq -0,114\,787\,375$,
$h = 0,2$: $f'(0,2) \simeq \frac{-f(0,6)+4f(0,4)-3f(0,1)}{2(0,2)} \simeq -0,191\,366$
Richardson: $f'(0,2) \simeq \frac{2^2 f'_{h=0,2}(0,2) - f'_{h=0,4}(0,2)}{2^2-1} = -0,216\,8922$
De (a), $E(h) = -\frac{1}{3}h^2 f'' - \frac{1}{4}h^3 f^{(4)}$, donc une approximation d'ordre 3

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

146. (a) En remplacant $f(x-h)$ et $f(x-2h)$ par leurs développement de Taylor d'ordre 5 dans le membre de droite, on a alors

$$\frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h} = f'(x) - \frac{h^2}{3}f^{(3)}(x) + \frac{h^3}{4}f^{(4)(x)} + O(h^4)$$

, donc l'ordre de précision de la méthode est 2.

(b) $f'(1,4) \simeq \frac{3f(1,4)-4f(1,2)+f(1,0)}{0,4} = 0,148\,25$

(c) $f'(1,4) \simeq \frac{3f(1,4)-4f(1,3)+f(1,2)}{0,2} = 0,148\,5$

(d) On applique l'extrapolation de Richardson, on a une meilleure approximation: $\frac{2^2 \times 0,148\,5 - 0,148\,25}{2^2-1} = 0,148\,583\,33$. L'ordre d'approximation est 3. En effet, il faut voir que le second terme de l'erreur est d'ordre 3.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

147. (a)

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + c_n h^n + c_{n+1}h^{n+1} + c_{n+2}h^{n+2} + \cdots \tag{11}$$

$$Q_{exa} = Q_{app}(\tfrac{h}{3}) + c_n \frac{h^n}{3^n} + c_{n+1}\frac{h^{n+1}}{3^{n+1}} + c_{n+2}\frac{h^{n+2}}{3^{n+2}} + \cdots \tag{12}$$

$$3^n Q_{exa} = 3^n Q_{app}(\frac{h}{3}) + c_n h^n + c_{n+1}\frac{h^{n+1}}{3} + c_{n+2}\frac{h^{n+2}}{9} + \cdots \tag{13}$$

En soustrayant l'équation (1) de l'equation (3) on a:

$$Q_{exa} = \frac{3^n Q_{app}(\frac{h}{3}) - Q_{app}(h)}{3^n - 1} + \frac{-c_{n+1}\frac{2}{3}h^{n+1} - c_{n+2}\frac{8}{9}h^{n+2} + \cdots}{3^n-1}.$$

$$Q_{exa} = \frac{3^n Q_{app}(\frac{h}{3}) - Q_{app}(h)}{3^n - 1} + \mathcal{O}(h^{n+1}).$$

(b) En se servant des 3 approximations d'ordre 2, on obtient avec l'extrapolation de Richardson 2 approximations d'odre 4.

$$App_R(\tfrac{h}{3}) = \frac{3^2 App(0,01) - App(0,03)}{3^2-1} = 1{,}175\,201\,159;$$

$$App_R(h) = \frac{3^2 App(0,03) - App(0,09)}{3^2-1} = 1{,}175\,201\,120.$$

Des 2 approximations d'ordre 4, on obtient avec l'extrapolation de Richardson une approximation d'ordre 6.

$$\frac{3^4 App_R(\frac{h}{3}) - App_R(h)}{3^4 - 1} = 1{,}175\,201\,159.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

148. Trapèzes: 1,734 162 460 123 43 pour 3 intervalles ($h = \frac{1}{3}$) ordre 2 et 1,720 049 244 881 pour 9 intervalles ($h = \frac{1}{9}$) ordre 2.

Richardson: $\frac{(3^2(1{,}720\,049\,244\,881)-(1{,}734\,162\,460\,123\,43)}{(3^2-1)} = 1,718\,285\,092\,976$

(ordre 4). L'erreur est $\triangle x = \left|1,718\,285\,092\,976 - (e-1)\right| = 0,326 \times 10^{-5} \leq 0,5 \times 10^{-5}$. Donc 6 chiffres significatifs.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

149. (a) On utilise 2 fois la différence centrée d'ordre 2 avec $h = 5$ et $h = 15$. On utilise ensuite l'extrapolation de Richardson pour obtenir une aproximation d'ordre 4 $a(15) = v'(15) \simeq -0,0167\,9167$.

(b) i. On utilise la méthode des trapèzes dans les 3 premiers intervalles avec $h = 10$ et dans les 2 derniers avec $h = 5$:

$$\begin{aligned} v_{moy} &= \tfrac{1}{40}\int_0^{40} v(s)ds = \tfrac{1}{40}(\int_0^{30} v(s)ds + \int_{30}^{40} v(s)ds); \\ &\simeq \tfrac{1}{40}(\tfrac{10}{2}(v(0) + 2(v(10) + v(20)) + v(30)) + \tfrac{5}{2}(v(30) + 2v(35) + v(40))). \end{aligned}$$

ii. Pour obtenir une approximation d'ordre 4, on peut utiliser le méthode de Simpson $\frac{3}{8}$ dans les 3 premiers intervalles et la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ dans les intervalles suivants .

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

150. (a) La différence centrée d'ordre 2 donne $a(4) = v'(4) \simeq 1,075$ avec $h = 4$.

(b) On calcul une autre différence centrée d'ordre 2 avec $h = 2$ et on utilise l'extrapolation de Richardson pour obtenir l'aproximation d'ordre 4 $a(4) = v'(4) \simeq 1,00833333$.

(c) La méthode des trapèzes avec $h = 2$ donne $d(10) = \int_0^{10} v(s)ds \simeq= 64,5$.

(d) Pour obtenir une approximation d'ordre 4, on peut utiliser le méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ dans les 2 premiers intervalles et la méthode de Simpson $\frac{3}{8}$ dans les intervalles suivants ou encore la méthode de Simpson $\frac{3}{8}$ dans les 3 premiers intervalles et ensuite la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$. Les approximations respectives sont

$$d(10) = \int_0^{10} v(s)ds = \int_0^{4} v(s)ds + \int_4^{10} v(s)ds \simeq 65,175.$$

$$d(10) = \int_0^{10} v(s)ds = \int_0^{6} v(s)ds + \int_6^{10} v(s)ds \simeq 65,3250.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Équations différentielles ordinaires

Problèmes de conditions initiales

151. Du développement de Taylor de la solution au temps $t_{n+1} = t_n + h$, on a

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n);$$
$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)).$$

On pose ensuite $y_{n+1} \simeq y(t_{n+1})$, $y_n \simeq y(t_n)$ et on obtient ainsi la méthode d'Euler, qui consiste à calculer, de proche en proche, les valeurs approchées y_{n+1} à l'aide de la formule de réccurence

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

152. La méthode d'Euler explicite provient du schéma de quadrature de la formule du rectangle. Cette quadrature revient à remplacer la fonction $f(t, y(t))$ pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$ par la constante $f(t_n, y(t_n))$. On a ainsi

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \simeq hf(t_n, y(t_n));$$

$y(t_{n+1}) - y(t_n) \simeq hf(t_n, y(t_n))$.
On pose $y(t_{n+1}) \simeq y_{n+1}$, $y(t_n) \simeq y_n$, et on obtient la méthode d' Euler explicite:
$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

153. La méthode utilisée est d'ordre 2.

$$\frac{E(h = 0,05)}{E(h = 0,025)} = \frac{|0,460\,633 - 0,460\,857|}{|0,460\,804 - 0,460\,857|} = 4,226 \simeq 2^2.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

154. (a) On utilise les approximations obtenues avec $h = 0,0125$ et $h = 0,0250$ pour obtenir à l'aide de l'extrapolation de Richardson une approximation d'ordre 5 au moins $R_1 = 4,559\,408\,470 \times 10^{-3}$.
   (b) On utilise les approximations obtenues avec $h = 0,025$ et $h = 0,05$ pour obtenir à l'aide de l'extrapolation de Richardson une approximation d'ordre 5 au moins $R_2 = 4,559\,360\,973 \times 10^{-3}$. Le ratio des erreurs $\frac{|R_2 - 5e^{-7}|}{|R_1 - 5e^{-7}|} = 35,98 \simeq 2^5$ ce qui entraine que l'approximation obtenue en (a) est d'ordre 5.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

155. (a) On obtient $y(0,1) \simeq y_1 = 2,326\,071\,38$ avec une erreur absolue $\Delta(0,1) = 0.503538 \times 10^{-3}$.
   (b) Le rapport des erreurs est $\dfrac{\Delta(0,1)}{\Delta(0,025)} = \dfrac{|y_1 - y(0,1)|}{|2,326\,539 - y(0,1)|} = 14,52 \simeq 4^2$, ce qui confirme que la méthode d'Euler-modifiée est d'ordre 2.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

156. (a) $y(0,2) \simeq y_1 = 2,6$. On obtient ensuite à l'aide de l'équation différentielle $y'(0,2) \simeq y_1 + e^{0,4} = 4,091\,824\,697\,641\,270$.

(b) On obtient $y(0,1) \simeq y_1 = 2,3$ avec une erreur absolue $E1 = 2,657\,367\,624 \times 10^{-2}$. $y(0,2) \simeq y_2 = 2,652\,140\,276$ avec une erreur absolue $E2 = 6,108\,717\,999 \times 10^{-2}$. L'approximation $y_2 = \boxed{2},652\,140\,276$ possède un chiffre significatif.

(c) On a une méthode à un pas. Les erreurs s'accumulent d'une itération à l'autre, puisque nous utilisons l'approximation de la solution précédente dans le calcul de l'itération courante.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

157. (a) $y''(t) = f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t,y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y(t))}{\partial y} f(t, y(t))$.

(b) $\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1})-y(t_n)}{h} - f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)))$

(c) i.

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \\ &\quad \frac{h^2}{2}\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} f(t_n + \tfrac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n))) &= f(t_n, y(t_n)) + \frac{h}{2}\tfrac{\partial f(t_n,y(t_n))}{\partial t} + \\ &\quad \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n))\tfrac{\partial f(t_n,y(t_n))}{\partial y}) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

(d) $y_1 = 2,018\,185\,949$. En se servant de l'extrapolation de Richardson, on obtient l'approximation d'ordre 3 au moins, $y(0,2) \simeq 2,018\,109\,598$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

158. $y_{1,1} = 2,331\,733$, $y_{2,1} = 1,321\,041$, $y_{1,2} = 2,734\,468$, $y_{2,2} = 1,688\,708$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

159. (a)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & (y_1(0) = 2) \\ y_2'(t) = y_3(t) & (y_2(0) = 2) \\ y_3'(t) = y_3(t) + y_2(t) - y_1(t) + 1 & (y_3(0) = 1) \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & (y_1(1) = 0) \\ y_2'(t) = (y_1(t))^2 + t^2 + 1 & (y_2(1) = 2) \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & (y_1(0) = 2) \\ y_2'(t) = y_3(t) & (y_2(0) = 1) \\ y_3'(t) = y_4(t) & (y_3(0) = 0) \\ y_4'(t) = e^t y_3(t) + (y_4(t))^3 & (y_4(0) = 4) \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

160. En posant $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, $x_3(t) = y(t)$, $x_4(t) = y'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) & x_1(0) = 0,4 \\ x_2'(t) = \frac{-x_1(t)}{((x_1(t))^2+(x_3(t))^2)^{\frac{3}{2}}} & x_2(0) = 0,0 \\ x_3'(t) = x_4(t) & x_3(0) = 0,0 \\ x_4'(t) = \frac{-x_3(t)}{((x_1(t))^2+(x_3(t))^2)^{\frac{3}{2}}} & x_4(0) = 2,0 \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

161. En posant $z_1(t) = x(t)$, $z_2(t) = x'(t)$, $z_3(t) = y(t)$ et $z_4(t) = y'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} z_1'(t) &=& x'(t) = z_2(t) & z_1(0) = x(0) = 1 \\ z_2'(t) &=& x''(t) = 2wz_4(t)\sin\psi - k^2z_1(t) & z_2(0) = x'(0) = 0 \\ z_3'(t) &=& y'(t) = z_4(t) & z_3(0) = y'(0) = 0 \\ z_4'(t) &=& y''(t) = -2wz_2(t)\sin\psi - k^2z_3(t) & z_4(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

162. En posant $u_1(t) = z(t)$, $u_2(t) = z'(t)$, $u_3(t) = x(t)$, $u_4(t) = x'(t)$, $u_5(t) = y(t)$ et $u_6t) = y'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} u_1'(t) &=& z'(t) = u_2(t) & u_1(1) = z(1) = 2 \\ u_2'(t) &=& z''(t) = 2tu_2(t) + 2te^{u_3(t)u_1(t)} & u_2(1) = z'(1) = 3 \\ u_3'(t) &=& x'(t) = u_4(t) & u_3(1) = x(1) = 3 \\ u_4'(t) &=& x''(t) = 2u_3(t)u_1(t)u_4(t) + 3u_3(t)^3u_5(t)t^2 & u_4(1) = x'(1) = 2 \\ u_5'(t) &=& y'(t) = u_6(t) & u_5(1) = y(1) = 3 \\ u_6'(t) &=& y''(t) = e^{u_5(t)}u_6(t) + 4u_3(t)t^2u_1(t) & u_6(1) = y'(1) = 2 \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

163. (a) En posant $u_1(t) = u(t)$ et $u_2(t) = u'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} u_1'(t) &=& u_2(t) & u_1(0) = u(0) = 0 \\ u_2'(t) &=& \frac{2k}{m}\left(\sqrt{2 - u_1(t) + u_1^2(t)} - 1\right) & u_2(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\vec{U}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t,\vec{U}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t,u_1(t),u_2(t)) = u_2(t) \\ f_2(t,u_1(t),u_2(t)) = \frac{2k}{m}\left(\sqrt{2 - u_1(t) + u_1^2(t)} - 1\right) \end{pmatrix}.$$

$$\vec{U}'(t) = \vec{F}(t,\vec{U}(t)) \quad \vec{U}_0 = \vec{U}(0) = \begin{pmatrix} u_{1,0} = u_1(0) = 0 \\ u_{2,0} = u_2(0) = 0 \end{pmatrix}$$

On fait 1 itération de la méthode d'Euler modifiée avec $h = 0,01$.

$$\begin{cases} x(0,01) = l_0u(0,01) \simeq 0,5 \times u_{1,1} = 0,051\,776\,\mathrm{m} \\ x'(0,01) = l_0u'(0,01) \simeq 0,5 \times u_{2,1} = 10,35534\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

164. (a)

$$\begin{cases}\Psi'(x) = -\frac{J(x)}{D(x)} = -3e^{-x}J(x) & \Psi(0) = 1\\ J'(x) = 1 - e^{-x}\Psi(x) & J(0) = 0\end{cases}$$

(b) Euler-Modifiée: $J_0 = J(0)$; $\Psi_0 = \Psi(0)$; $h = 0,1$

$$\begin{cases}\hat{\Psi} = \Psi_0 + h(-3e^{-0}J_0) = 1 + 0 = 1\\ \hat{J} = J_0 + h(1 - e^0\Psi_0) = J_0 + h(1-1) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Psi_1 = \Psi_0 + \frac{h}{2}\Big(-3e^0J_0 - 3e^{-0,1}\hat{J}\Big) = \Psi_0 = 1\\ J_1 = J_0 + \frac{h}{2}\Big((1 - e^{-0}\Psi_0) + (1 - e^{-0,1}\hat{\Psi})\Big) = \frac{0,1}{2}(1 - e^{-0,1})\end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

165. En posant $u_1(t) := x(t)$, $u_2(t) := x'(t)$; $u_3(t) := y(t)$ et $u_4(t) := y'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases}u_1' = u_2 & u_1(0) = x_0\\ u_2' = u_1 + 2u_4 - (1-\mu)\left(\frac{u_1+\mu}{((u_1+\mu)^2+u_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \mu\left(\frac{u_1-1+\mu}{((u_1-1+\mu)^2+u_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right) & u_2(0) = x_0'\\ u_3' = u_4 & u_3(0) = \eta_0\\ u_4' = u_3 - 2u_2 - (1-\mu)\left(\frac{u_3}{((u_1+\mu)^2+u_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \mu\left(\frac{u_3}{((u_1-1+\mu)^2+u_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right) & u_4(0) = \eta_0'\end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

166. (a) En posant $y_1(t) = y(t)$ et $y_2(t) = y'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases}y_1'(t) &=& y_2(t) & y_1(-0,5) = y(-0,5) = -0,125\\ y_2'(t) &=& \frac{2t}{1-t^2}y_2(t) - \frac{6}{1-t^2}y_1(t) & y_2(-0,5) = y'(-0,5) = -1,5.\end{cases}$$

(b)

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t,\vec{Y}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t,y_1(t),y_2(t)) = y_2(t)\\ f_2(t,y_1(t),y_2(t)) = \frac{2t}{1-t^2}y_2(t) - \frac{6}{1-t^2}y_1(t)\end{pmatrix}.$$

$$\vec{Y}'(t) = \vec{F}(t,\vec{Y}(t)) \quad \vec{Y}_n = \vec{Y}(t_n) = \begin{pmatrix} y_{1,n} = y_1(-0,5) = -0,125\\ y_{2,n} = y_2(10) = -1,5\end{pmatrix}$$

On fait 1 itération de la méthode d'Euler avec $h = 0,1$ et on obtient respectivement $y(-0,4) \simeq y_{1,1} = -0,275 = y_1$ et $y'(-0,4) \simeq y_{1,2} = -1,2 = y_1'$. L'approximation $y_1 = -0,\boxed{2}75$ possède un chiffre significatif et tous les chiffres de $y_1' = -1,2$ sont significatifs.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

167. (a) En posant $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = x'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases}x_1'(t) &=& x_2(t) & x_1(0) = x(1) = 1\\ x_2'(t) &=& -x_2(t) - 17,8y_1(t) & x_2(0) = y'(0) = 0.\end{cases}$$

(b)

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t, \vec{X}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t), x_2(t)) = x_2(t) \\ f_2(t, x_1(t), x_2(t)) = -x_2(t) - 17{,}8x_1(t) \end{pmatrix}.$$

$$\vec{X}'(t) = \vec{F}(t, \vec{X}(t)) \quad \vec{X}_0 = \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} y_{1,0} = x_1(0) = 1 \\ y_{2,0} = x_2(0) = 0 \end{pmatrix}$$

On fait 1 itération de la méthode d'Euler avec $h = 0,1$ et on obtient respectivement $x(0,1) \simeq x_{1,1} = 0,911$ et $x'(0,1) \simeq x_{1,2} = -1,691$. L'approximation $y_{1,1} = 0,\boxed{91}1$ possède 2 chiffres significatifs.

(c) Il s'agit du polynôme de degré 2 qui passe par les 3 points de coordonnées $(0,0116\,,\, 0,4)$, $(-0,3088\,,\, 0,5)$ et $(0,3636\,,\, 0,3)$. Le temps requis $t_0 \simeq p_2(0) = 0,403\,471$.

(d) En considérant le point supplémentaire de coordonées $(-0,5473\,,\, 0,6)$, on obtient $E_2(0) \simeq -0,214\,612 \times 10^{-3}$.

(e) On calcul 2 approximations d'ordre 2 de $x'(0,8)$ en utilisant la formule centrée d'ordre 2 avec respectivement $h = 0,1$ et $h = 0,2$ et ensuite obtient de l'extrapolation de Richardson l'approximation d'ordre 4, $x'(0,8) \simeq 0,5902$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

168. (a) En posant $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \theta'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) & x_1(0) = \theta(0) = 0 \\ x_2'(t) &= \frac{g}{R}(-\mu \sin x_1(t) + \cos x_1(t)) & x_2(0) = \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t, \vec{X}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t), x_2(t)) = x_2(t) \\ f_2(t, x_1(t), x_2(t)) = -0,294 \sin x_1(t) + 49 \cos x_1(t) \end{pmatrix}.$$

$$\vec{X}'(t) = F(t, \vec{X}(t)) \quad \vec{X}_0 = \vec{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} = x_1(0) = 0 \\ x_{2,0} = x_2(0) = 0 \end{pmatrix}$$

On fait 1 itération de la méthode d'Euler modifiée avec $h = 0,1$ et on obtient $\theta(0,1) \simeq x_{1,1} = 0,245$. De l'équation différentielle $\frac{d^2\theta}{dt^2}(0,1) \simeq -0,294 \sin x_{1,1} + 49 \cos x_{1,1} = 47,465\,417$.

(c) On peut utiliser l'extrapolation de Richardson pour obtenir une approximation d'ordre 3 au moins.

$$\theta(0,1) \simeq \frac{4^2\theta^* - x_{1,1}}{4^2 - 1} = 0,224\,570.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

169. (a) En posant $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = x'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) & x_1(0) = x(0) = 1 \\ x_2'(t) &= -0,6x_1(t) - 10(x_2(t))^2 & x_2(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t,\vec{X}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1(t),x_2(t)) = x_2(t) \\ f_2(t,x_1(t),x_2(t)) = -0,6x_1(t) - 10(x_2(t))^2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{X}'(t) = \vec{F}(t,X(t)) \quad \vec{X}_0 = \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} = x_1(0) = 1 \\ x_{2,0} = x_2(0) = 0 \end{pmatrix}$$

On fait 1 itération de la méthode d'Euler modifiée avec $h = 0,2$, on obtient

$$\begin{cases} x(0,2) \simeq x_{1,1} = 0,988 \\ x'(0,2) \simeq x_{2,1} = -0,1344 \end{cases}$$

(c) La méthode d'Euler modifiée étant d'ordre 2, l'erreur sera reduite approximativement d'un facteur de $(\frac{0,2}{0,02})^2 = 100$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

170. (a) En posant $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = x'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& x_2(t) & x_1(0) = x(0) = 1200 \\ x_2'(t) &=& -9,81 - k(t)x_2(t) & x_2(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t,\vec{X}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1(t),x_2(t)) = x_2(t) \\ f_2(t,x_1(t),x_2(t)) = -9,81 - k(t)x_2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\vec{X}'(t) = \vec{F}(t,\vec{X}(t)) \quad \vec{X}_n = \vec{X}(t_n) = \begin{pmatrix} x_{1,n} = x_1(10) = 909,3 \\ x_{2,n} = x_2(10) = -45,2 \end{pmatrix}$$

On fait 1 itération de la méthode d'Euler modifiée avec $h = 0,1$.

$$\begin{cases} x(10,1) \simeq x_{1,n+1} = 904,772\,041 \\ x'(10,1) \simeq x_{2,n+1} = -41,234\,172 \end{cases}$$

(c) La méthode d'Euler modifiée étant d'ordre 2, l'erreur sera reduite approximativement d'un facteur de $(\frac{0,1}{0,01})^2 = 100$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

171. (a) En posant $y_1(t) = y(t)$ et $y_2(t) = y'(t)$, on obtient le système:

$$\begin{cases} y_1'(t) &=& y_2(t) & y_1(0) = y(0) = 0 \\ y_2'(t) &=& \frac{24}{25}y_1(t) - 2y_1^3(t) & y_2(0) = y'(0) = 0,04 \end{cases}$$

(b)

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t,\vec{Y}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t,y_1(t),y_2(t)) = y_2(t) \\ f_2(t,y_1(t),y_2(t)) = \frac{24}{25}y_1(t) - 2y_1^3(t) \end{pmatrix}.$$

$$\vec{Y}'(t) = F(t,Y(t)) \quad \vec{Y}_0 = \vec{Y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_{1,0} = y_1(0) = 0 \\ y_{2,0} = y_2(0) = 0,04 \end{pmatrix}$$

On fait 1 itération de la méthode du point milieu avec $h = 0,1$ et on obtient

$$\begin{cases} y(0,1) \simeq y_{1,1} = 0,004 \\ y'(0,1) \simeq y_{2,1} = 0,0401912 \end{cases}$$

(c) La méthode du point milieu étant d'ordre 2, l'erreur sera reduite approximativement d'un facteur de $(\frac{0,1}{0,01})^2 = 100$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

172. $y_1 = 1,004\,762$ et $y_2 = 1,018594$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

173. y_1 est une racine de la fonction $f(x) = 1 + 0,01\sin(x)$ et on obtient $y_1 = 0,9916$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

174. (a) Après une itération de la méthode d'Euler explicite on obtient $y(0,1) \simeq y_1 = 0$.

(b) y_1 est une solution de l'équation $x = x - 0,01e^{x+0,005} = 0$. En partant de l'approximation initiale $x_0 = 0$, on obtient après 2 itérations de la méthode de Newton $y_1 \simeq x_2 = 1,015\,268\,06 \times 10^{-2}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

175. y_1 est une racine de la fonction $f(x) = 1 - x - 0,25e^{-(0,25+x)} \Rightarrow y_1 = 0,9926$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

176. (a)

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))\,dt \simeq \frac{h}{2}\left(f(t_n,y(t_n)) + f(t_{n+1},y(t_{n+1}))\right)$$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \simeq \frac{h}{2}\left(f(t_n,y(t_n)) + f(t_{n+1},y(t_{n+1}))\right)$$

On pose $y(t_{n+1}) \simeq y_{n+1},\ y(t_n) \simeq y_n,$ et on obtient la méthode de Cranck-Nicholson:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},y_{n+1})\right).$$

(b) $\tau_{n+1}(h) = \dfrac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2}\left(f(t_n,y(t_n)) + f(t_{n+1},y(t_{n+1}))\right).$

(c) y_1 est une racine de la fonction $f(x) = x - 0,005e^x$. En partant de l'approximation initiale $x_0 = 0$, on obtient après 3 itérations de la méthode de Newton $y_1 \simeq x_3 = 5,025\,189\,183 \times 10^{-3}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

177. (a) On fait une itération de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec $h = 1$, ce qui donne $y_{10} = 41,525\,827\,03\, m/s$.

(b) On prend une différence centrée d'ordre 2 avec $h = 0,5$ et l'on trouve:

$$v'(4,5) \simeq \frac{v(5) - v(4)}{2 \times 0,5} = 3,887\,15\, m/s^2.$$

(c) De l'approximation d'ordre 4 de la vitesse en $t = 10s$, (y_{10}), On a d'après l'équation différentiellle:

$$v'(10) \quad = \quad g - \frac{c}{m} v(10) \simeq 9,8 - \frac{c}{m} y_{10} = 1,250\,546\, m/s^2.$$

Ou encore on peut calculer 3 approximations ($h = 1$, $h = 2$ et $h = 4$) à l'aide de la différence arrière d'ordre 2 et faire 3 extrapolations de Richardson.

0,700 3838	1,153 148	1,229 856	ordre 2
1,304 069	1,255 425		ordre 3
1,1248 476			ordre 4

(d) Si l'on souhaite une approximation d'ordre 4, on peut utiliser la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ dans les 2 premiers intervalles et la méthode de Simpson $\frac{3}{8}$ dans les 3 intervalles suivants (S_1) ou encore la méthode de Simpson $\frac{3}{8}$ dans les 3 premiers intervalles et ensuite la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ (S_2).

$$S_1 \quad = \quad 17,163\,031\,33 + 72,220\,7325 = 89,383\,763\,83\, m,$$

ou encore:

$$S_2 \quad = \quad 36,261\,7155 + 53,121\,813\,33 = 89,383\,528\,83\, m.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

178. (a) $y(t) = 5e^{-7t}$.

(b) $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n - 7hy_n = (1 - 7h)y_n$.

(c) On obtient $y(0,5) \simeq y_1 = -12,5$ avec une erreur absolue $E_1 = 12,349013$.
On obtient $y(1) \simeq y_2 = 31,25$ avec une erreur absolue $E_2 = 31,245\,441$.

(d) $y_n = (1 - 7h)^n y_0$ on a $|y_n| \to 0$ si $|1 - 7h| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - 7h < 1 \Rightarrow h < \frac{2}{7}$.

(e) Pour $h < \frac{1}{7}$ la solution numérique tend vers la solution analytique.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

179. (a) La méthode de Crank-Nicholson est d'ordre 2 tandis que la méthode d'Euler implicite est d'ordre 1.

$$\frac{E(h = 0,125)}{E(h - 0,0625)} = \frac{6,189\,158 \times 10^{-5}}{1,543\,977 \times 10^{-5}} = 4,008\,581 \simeq 2^2.$$

La deuxieme colonne a été calculée à l'aide de la méthode de Crank-Nicholson.

(b) on pose $f(t, y(t)) = -\beta y(t)$ et on obtient $y_{n+1} = \frac{1-(1-\theta)h\beta}{1+h\theta\beta} y_n$.

(c) De $y_{n+1} = \frac{1-(1-\theta)h\beta}{1+h\theta\beta} y_n$, on a par induction $y_n = \left[\frac{1-(1-\theta)h\beta}{1+h\theta\beta}\right]^n y_0$.
$\lim_{n\to\infty} |y_n| = 0 \Rightarrow |\frac{1-(1-\theta)h\beta}{1+h\theta\beta}| < 1$, ce qui donne $(2\theta - 1)\beta h + 2 > 0$.

(d) Pour $\theta \geq \frac{1}{2}$, la méthode est inconditionnellement stable. Par contre pour $\theta < \frac{1}{2}$, la méthode est stable si $h < \frac{2}{(1-2\theta)\beta}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

180. (a) $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n - h\lambda t_n y_n = (1 - h\lambda t_n) y_n$.

(b) $y_n = (1 - h\lambda t_0)(1 - h\lambda t_1)\cdots(1 - h\lambda t_{n-1}) y_0$. La suite y_n est décroissante si $|(1 - h\lambda t_n)| < 1 \Rightarrow h < \frac{2}{\lambda t_n}$.

(c) Le pas de temps h dépend du temps t_n.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

181. À partir de l'historique on obtient, en se servant des splines cubiques, $y(-0,95) \simeq p_1(-0,95) = 1,1415$. On a ensuite $y(0,1) \simeq y_1 = y_0 + 0,1(2,04482 - y(-0,95)) = 2,090332$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

182. (a) On calcul 2 approximations d'ordre 2 de $y_2'(-0,5)$ en utilisant la formule centrée d'ordre 2 avec respectivement $h = 0,25$ et $h = 0,5$ et ensuite obtient de l'extrapolation de Richardson l'approximation d'ordre 4 ,$y_2'(-0,5) \simeq 0,229$.
Du système d'équations différentielles on a, $y_1''(0) = y_2'(-0,5) \simeq 0,229$.

(b) À partir de l'historique, on obtient en se servant des splines cubiques les approximations $y_1(-0,9) \simeq p_1(-0,9) = 1,1518$ et $y_2(-0,4) \simeq p_4(-0,4) = 0,9226$. Pour $h = 0,2$, on a

$$\begin{cases} y_1(0,2) \simeq y_{1,1} = y_{1,0} + 0,2 y_2(-0,4) = 2,1845; \\ y_2(0,2) \simeq y_{2,1} = y_{2,0} + 0,2 \times (2y_{2,0} + 0,17928 - y_1(-0,9)) = 1,2055. \end{cases}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Équations algébriques non linéaires

Méthode de la bissection

183. (a) $x_m = 2{,}9,\ 2{,}85,\ 2{,}875$ (9 itérations)
(b) $x_m = 1{,}75,\ 1{,}625,\ 1{,}6875$ (10 itérations)
(c) $x_m = 2{,}0,\ 3{,}0,\ 3{,}5$ (13 itérations)
(d) $x_m = 1{,}5,\ 1{,}25,\ 1{,}125$ (11 itérations)
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

184. $x_m^* = x_1 - \frac{f(x_1)(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

185. (a) 2,857 95, 2,860 03, 2,860 10
(b) 1,67, 1,641 95, 1,639 57
(c) 1,354 38, 1,946 33, 2,084 07
(d) 1,016 13, 1,030 67, 1,043 72
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

186. (a) On obtient la racine $r = -1$.
(b) Pas de convergence car ce n'est pas un intervalle avec changement de signe.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

187. (a) $f(0) \times f(0,5) < 0$ donc l'intervalle initial est avec changement de signe.
(b) La racine $r \in [0,25,\ 0,50]$. En effet à la deuxième itération, la méthode de la bissection considère l'intervalle avec changement de signe $[0,25,\ 0,50]$.
(c) Au moins 19 itérations.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

188. $f(2) = -1 < 0$ et $f(2,4) = 0,9040 > 0$ et $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[2,\ 2,4]$, donc la fonction possède une racine dans l'intervalle $[2,\ 2,4]$. L'erreur absolue est $\Delta r \leq 0,4 \times 2^{-10} = 0,3906 \times 10^{-3}$, donc 4 chiffres significatifs.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

189. Soit $u = (u_1, u_2)^t$ et $v = (v_1, v_2)^t$, alors on a $\| \vec{u} \times \vec{v} \|_e = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$ et $f(t) = \frac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|_e}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e} = \frac{|u_1v_2-u_2v_1|}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e} \geq 0$, par consequent, il n'existe pas d'intervalle avec changement de signe. Pour pouvoir utiliser la bissection, on pose $f(t) = \frac{(u_1v_2-u_2v_1)}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e}$, ou $f(t) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e} - 1$ (conjoction) ou $f(t) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|_e\|\vec{v}\|_e} + 1$ (opposition).
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

190. La racine est dans l'intervalle $[1\ ,\ 2]$, car $f(1) \times f(2) < 0$. Il faut au moins $n = 34$ itérations
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

191. La méthode de la bissecton converge vers la racine r_1 si $f(a) \times f(x_m) < 0$, sinon elle converge vers la racine r_3. La méthode converge vers r_2 seulement si $f(x_m) = 0$ ou $x_m = r_2$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

192. Il faut au moins 13 itérations.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Méthodes des points fixes

193. (a) r_1 est attractif ($g_1'(r_1) = -0,2294$), r_1 est attractif ($g_2'(r_1) = 0$) et r_1 est attractif ($g_3'(r_1) = -0,099$).
(b) La fonction $g_2(x)$ converge quadratiquement.
(c) Oui, car il y a un changement de signe.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

194. (a) $|g'(x)| = |1 - 2\rho x| < 1$ pour $0 < \rho < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
(b) $g'(\frac{\sqrt{2}}{4}) = 0$, convergence quadratique.
(c) $g'(3\sqrt{2}) > 1$, divergence.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

195. (a) $g'(r) \simeq 0,51 < 1$.
(b) $g'(1,365\,23(= 0,511\,96$.
(c) La convergence est linéaire car $g'(1,365\,23) \neq 0$ et $|g'(1,365\,23)| < 1$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

196. (a) On pose $g(x) = \frac{2x}{3} + \frac{N}{3x^2}$ et on vérifie aisément que $g(\sqrt[3]{N}) = \sqrt[3]{N})$.
(b) On a aussi
$$g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2N}{3x^3} \quad g''(x) = \frac{2N}{x^4}$$
de sorte que $g'(\sqrt[3]{N})) =$ et $g''(\sqrt[3]{N})) = \frac{2}{\sqrt[3]{N})} \neq 0$. On a donc une convergence quadratique.
(c) On complète le tableau La colonne $|\frac{e_{n+1}}{e_n}|$ converge vers $g'(r)$ qui est 0. La colonne

n	$\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n}\rvert$	$\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\rvert$
0	0,069 9670	0,195 21
1	0,005 3642	0,213 91
2	0,000 0289	0,215 44

$|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}|$ converge $\frac{g''(r)}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}} = 0,215\,44$. La correspondance est très bonne.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

197. (a) Le seul point fixe dans l'intervalle $]0\,,\,\infty[$ est $r = \sqrt{a}$.

(b) Il faut montrer que $g'(r) = g''(r) = 0$, ce qui est le cas puisque:

$$g'(x) = \frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2} \text{ et } g''(x) = \frac{48ax(x^2-a)}{(3x^2+a)^3}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

198. (a) Les points fixes sont $r_1 = 0$ et $r_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

(b) Le point fixe r_1 est attractif ($|g'(r_1)| < 1$) pour λ dans l'intervalle $]-1\,,\,1[$ et le point r_2 est attractif ($|g'(r_2)| < 1$) pour λ dans l'intervalle $]1\,,\,3[$.

(c) La convergence est quadratique ($g'(r_1) = 0$) pour $\lambda = 0$ (mais alors on a $g(x) = 0$, ce qui est peu intéressant). Par contre, $g'(r_2) = 0$ pour $\lambda = 2$ (on note que, dans ce dernier cas, $g''(r_2) = -2\lambda \neq 0$).

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

199. (a) Les points fixes ont $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$.

(b) Le point fixe r_1 est attractif ($|g'(r_1)| < 1$) pour λ dans l'intervalle $]-2\,,\,0[$ et le point r_2 est attractif ($|g'(r_2)| < 1$) pour λ dans l'intervalle $]0\,,\,2[$.

(c) La convergence est quadratique ($g'(r_1) = 0$) pour $\lambda = -1$ et $g'(r_2) = 0$ pour $\lambda = 1$ (on note que, dans les 2 cas, $g''(r) = -2\lambda \neq 0$).

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

200. (a) $g(-1) = -1$, car -1 est un point fixe de $g(x)$.

(b) La suite $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ tend vers $g'(-1)$. Par exemple, on a $\frac{e_{15}}{e_{14}} \simeq \frac{e_{16}}{e_{15}} \simeq -0,333$ ce qui est une bonne approximation de $g'(-1)$.

(c) Les itérations oscillent de part et d'autre du point fixe, car $-1 < g'(-1) < 0$ et , en vertu de l'approximation $e_{n+1} \simeq g'(r)e_n$, l'erreur change de signe à chaque itération.

(d) La convergence est d'ordre 1, car $-1 < g'(-1) < 0$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

201. (a) Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x^2 - 2 = 0$. On a ensuite $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$. En remplaçant et en simplifiant, on trouve l'algorithme:

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{8} + \frac{3}{2x_n^3} - \frac{1}{2x_n^3} = g(x_n).$$

(b) C'est donc une méthode des points fixes et l'on a $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. De plus

$$g'(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{2x^4} \quad g''(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{6}{x^5} \quad g'''(x) = -\frac{9}{x^4} + \frac{30}{x^6}$$

de sorte que $g'(\sqrt{2}) = g''(\sqrt{2}) = 0$ et $g'''(\sqrt{2}) = \frac{3}{2} \neq 0$. la convergence est donc cubique.

(c) $x_1 = 1,4375$ et $x_2 = 1,414\,216\,606$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

202. Le point fixe $r = 1$ est repulsif pour la fonction $g_1(x)$ car $g_1(1) = 1$ mais $|g_1'(1)| > 1$. La méthode des points fixes associée à la fonction $g_2(x)$ converge à l'ordre 1 vers $r = 1$ car $g_2(1) = 1$, $|g_2'(1)| = \frac{1}{e+1} < 1$. Finalement La méthode des points fixes associée à la fonction $g_3(x)$ converge à l'ordre 2 vers $r = 1$ car $g_3(1) = 1$, $g_3'(1) = 0$ et $g_3''(1) \neq 0$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

203. (a) La valeur optimale p^* est solution de l'équation $\pi'(p) = 0$, c'est à dire

$$10\, e^{\frac{-p^2}{100}} \left(200p - 500 - 2p^3 + 10p^2\right) = 0.$$

(b) De l'équation $200p - 500 - 2p^3 + 10p^2 = 0$, on a $200p = 500 + 2p^3 - 10p^2$, dont on obtient $p = g_1(p) = \frac{500+2p^3-10p^2}{200}$
De l'équation $200p - 500 - 2p^3 + 10p^2 = 0$, on $2p^3 = -200p + 500 - 10p^2$, dont on obtient $p = g_2(p) = g_2(p) = \sqrt[3]{\frac{200p-500+10p^2}{2}}$.

(c) Le Point fixe p^* est repulsif pour la fonction $g_1(p)$, car $|g_1'(p*)| > 1$. Le point fixe p^* est repulsif pour la fonction $g_2(p)$, car $|g_2'(p*)| < 1$.

(d) La suite $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ tend vers $g_2'(p^*)$. Par exemple, on a $\frac{e_5}{e_4} \simeq \frac{e_6}{e_5} \simeq 0,52$. On a ainsi $|g_2'(p*)| < 1$ et $g_2'(p^*) \neq 0$ ce qui donne une converge d'ordre 1.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

204. (a) Le point fixe est $r = \sqrt{a}$.

(b) La méthode converge à l'ordre 2 car $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, $g'(\sqrt{a}) = 0$ et $g''(\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \neq 0$.

(c) On pose $a = 5$. En partant de $x_0 = 2$, on obtient après 3 itérations $x_3 = \boxed{2,236\,067977}$ avec 10 chiffres significatifs.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

205. (a) Le point fixe est attractif pour a dans l'intervalle $]0\,,2[$. Si $a = 2$, c'est un cas indéterminé.

(b) la convergence est d'ordre 1 pour a dans les intervalles $0\,,1[$ et $]1\,,2[$, et la convergence est d'ordre 2 pour $a = 1$.

(c) La fonction $g_2(x)$ correspond à une variante de la méthode de Newton appliquée à la fonction $f(x)$. La prochaine itération x_{n+1} est obtenue en déterminant l'intersection de la droite $y = 0$ (l'axe des x) avec de la droite passant par le point de coordonnée $(x_n\,, f(x_n))$ et de pente fixée à $f'(\ln a) = a$.

(d) On choisit la fonction $g_2(x)$ car la convergence est d'ordre 2 mais contrairement à la méthode de Newton, elle ne nécessite pas l'évaluation de la dérivée à chaque itération.

(e) Les coefficients α et β sont les solutions des équations

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1; \\ \alpha - \beta = 0. \end{cases}$$

On trouve $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et on note que $g'''_{\alpha,\beta}(\ln a) = -1 \neq 0$ ce qui confirme que la méthode est d'ordre 3.

Pour $a = 2$, en partant de $x_0 = 0,5$,l'algorithme des points fixes associé łа fonction $g_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x)$ après 2 itérations $x_2 = 0,\boxed{69314718}0269$ avec 8 chiffres significatifs.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

206. (a) On pose $G(x) = g(x) + \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)(g(x) - x)$ et on montre que $G'(r) \simeq 0$. Ce qui donne une convergence d'ordre 2.

 (b) Pour $g'(r) < 1$, on a $(g'(r))^2 \ll 1$ e qui entraine que $\frac{g'(r)}{1-g'(r)} \simeq g'(r)$. Par la suite, on obtient
 $x_{k+2} = x_{k+1} + \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)(x_{k+1} - x_k) \Rightarrow \frac{x_{k+2}-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) \simeq \frac{g'(r)}{1-g'(r)} \simeq g'(r)$.
 D'où $\frac{x_{k+2}-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k} \simeq \rho$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

207. (a) De $f(r) = 0$, on a $r = \frac{r^3+1}{3}$, ce qui entraine que la racine r est un point de la fonction $g(x)$.
 $-2 < r_1 < -1$ car $f(-2) \times f(-1) < 0$, $0 < r_2 < 1$ car $f(0) \times f(-1) < 0$ finalement $1 < r_3 < 2$ car $f(1) \times f(2) < 0$.

 (b) Le point r_1 est repulsif car $1 < |g'(r_1)| < 4$. Le point r_2 est attractif car $0 < |g'(r_2)| < 1$. Le point r_3 est repulsif, car $1 < |g'(r_4)| < 4$.

 (c) La méthode des points fixes converge à l'ordre 1 vers r_2 car $g'(r_2) \neq 0$ et $|g'(r_2)| < 1$.

La fonction $g_3(x)$ est la plus adéquate.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

208. (a) La racine $r = 1$ n'est pas un point fixe de $g_1(x)$ car $g_1(1) = 5 \neq 1$.

 (b) La racine $r = 1$ est un point fixe repulsif de $g_2(x)$ car $g_2(1) = 1$ mais $|g_2'(1)| > 1$.

 (c) La racine $r = 1$ est un point fixe attractif de $g_3(x)$ car $g_3(1) = 1$ et $|g_3'(1)| < 1$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

209. (a) La racine semble être $r \simeq 1,365\,230\,0134$. La méthode $g_1(x)$ diverge car $|g_1'(r)| \simeq 15,4 > 1$. La méthode $g_3(x)$ converge car $|g_3'(r)| \simeq 0,51 < 1$.

 (b) La méthode $g_2(x)$ diverge car $|g_3'(r)| \simeq 3,43 > 1$. De plus, $g_2(x_2) = \sqrt{-8,65}$ ce qui donne un nombre compexe, d' où le NaN.

 (c) i. La méthode $g_4(x)$ converge moins vite que la méthode $g_3(x)$ car $|g_4'(r)| \simeq 0,13 < |g_3'(r)| \simeq 0,51$.
 ii. La méthode $g_4(x)$ converge moins vite que la méthode $g_5(x)$ car $|g_5'(r)| \simeq 0 < |g_4'(r)| \simeq 0,13$.

 (d) La méthode $g_3(x)$ converge à l'ordre 1, car $|g_3'(r)| < 1$ et $g_3'(r) \neq 0$. La méthode $g_4(x)$ converge à l'ordre 1, car $|g_4'(r)| < 1$ et $g_4'(r) \neq 0$. La méthode $g_5(x)$ converge à l'ordre 2, car $g_5'(r) = 0$.

 (e) Les valeurs de x_n semblent supérieures à la racine à une itération et inférieures à la racine à l'autre itération pour les méthodes $g_3(x)$ et $g_4(x)$, car on a respectivement $-1 < g_3(r) < 0$ et $-1 < g_4'(r) < 0$. En vertu de l'approximation $e_{n+1} \simeq g'(r)e_n$, l'erreur change de signe à chaque itération.

 (f) La méthode des points fixes associée à la fonction $g_5(x)$ converge à l'ordre 2. En vertu de l'approximation $e_{n+1} \simeq \frac{g''(r)}{2}{e_n}^2$, on a $|e_{n+1}| \simeq 4,9 \times 10^{-7}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

210. (a) $x = 2x - x^2C \iff x = x^2C \iff x = \frac{1}{C}$ (si $C \neq 0$). L"agorithme calcul l'inverse de C.
    (b) On pose $g(x) = 2x - x^2C$ et on a $g'(\frac{1}{C}) = 0$ et $g''(\frac{1}{C}) = -2C \neq 0$, ce qui confirme que l'algorithme est précis à l'ordre 2.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

211. On pose $g(x) = \alpha x + \frac{\beta q}{x^2} + \frac{\gamma q^2}{x^5}$. Les coefficients α, $beta$ et γ sont les solutions du système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1; \\ \alpha - 2\beta - 5\gamma = 0; \\ 6\beta + 30\gamma = 0 \end{cases}$$

On trouve $\alpha = \frac{5}{9}$, $\beta = \frac{5}{9}$ et $\gamma = -\frac{1}{9}$. La méthode de points fixes est d'ordre 3.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

212. (a) On pose $g(x) = (1 - \frac{\omega}{3})x + (1 - \omega)x^3 + \frac{2\omega}{3x^2} + 2(\omega - 1)$. Il suffit ensuite de montrer que $g(r) = r$, ce qui est le cas car de $f(r) = r^3 - 2 = 0$, on a $r^3 = 2$ et $r = \frac{2}{r^2}$.
    (b) Pour $\omega = 1$, la méthode est au moins d'ordre 2 car $g(r) = r$ et $g'(r) = 0$.
    (c) La méthode est d'ordre 2 car $g(r) = r$, $g'(r) = 0$ mais $g''(r) = \frac{4}{r^4} \neq 0$.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

213. (a) La méthode associée à $g_1(x)$ diverge car $g_1(2) = 2$ et $|g_1'(2)| = 3 > 1$. La méthode associée à $g_2(x)$ converge car $g_2(2) = 2$ et $|g_2'(2)| = 0 < 1$. Finalement, la racine $r = 2$ n'est pas un point fixe de la fonction $g_3(x)$ car $g_3(2) = 0 \neq 2$.
    (b) $x_1 = 1,795$ et l'erreur absolue est $E = |2 - x_1| 0,205 \leq 0,5 \times 10^0$ l'approximation $x_1 = \boxed{1},795$ possède un chiffre significatif.
    (c) i. $|e_n| \to 0 \quad \left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right| \to 0$ et $\left|\frac{e_n}{e_{n-1}^2}\right| \to \left|\frac{1}{2}g''(2)\right| = 0,25$.
        ii. $|e_n| \to 0 \quad \left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right| \to 0$ et $\left|\frac{e_n}{e_{n-1}^2}\right| \to \left|\frac{1}{2}g''(2)\right| = 0,25 \neq 0$, la convergence est quadratique (ordre 2).

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

214. L'algorithme diverge car $g'(r) = e^r = 3,1462 > 1$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

215. Il s'agit des abscisses des trois points d'intersection de la droite $y = x$ et de la fonction $g(x) = 2\sin x$ sur l'intervalle $[-\pi\,,\,\pi]$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

216. Le point fixe est repulsif pour la fonction $g_1(\phi)$ car $g_1'(\phi_r) = \dfrac{1}{\cos^2(\phi_r)} \geq 1$. Le point fixe est attractif pour la fonction $g_2(\phi)$ car $g_2'(\phi_r) = \dfrac{1}{1 + (\phi_r + c)^2} < 1$.

    [*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

217. (a) De l'équation $f(x) = e^x - 4x^2 = 0$, ona $4x^2 = e^x$, on prend ensuite la racine carrée et on obtient $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = g(x)$.

(b) On pose $h(x) = \ln(4x^2)$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

218. (a) En partant de $x_0 = 1$, on obtient $x_2 = \boxed{1,4}$ avec 2 chiffres significatifs et $x_2 = \boxed{1,414\,213}\,19$ avec 7 chiffres significatifs.

(b) Il suffit de montrer que $g'(r) = g''(r) = 0$ et $g'''(r) \neq 0$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

219. (a) Le point fixe $r = 3$ est attractif pour la fonction $g_1(x)$ car $g_1(3) = 3$ et $|g_1'(3)| = \frac{1}{3} < 1$. Le point fixe $r = 3$ est repulsif pour la fonction $g_2(x)$ car $|g_1'(3)| = 3 > 1$.

(b) Les coefficients α et β sont solutions du système:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1; \\ \frac{\alpha}{3} + 3\beta = 0. \end{cases}$$

On trouve $\alpha = \frac{9}{8}$ et $\beta = -\frac{1}{8}$.

(c) En partant de $x_0 = 4$, on obtient les itérations $x_1 = 2,918\,702\,889$ et $x_2 = 2,999\,479\,73$.

(d) Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ 2 fonctions qui conduisent l'une à un point fixe r attractif et l'autre au même point fixe répulsif. C'est -à -dire $f_1(r) = f_2(r) = r$ avec $|f_1'(r)| = |a| < 1$ et $|f_2'(r)| = |b| > 1$. Selon (b), on cherche α et β solutions du système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1; \\ a\alpha + b\beta = 0. \end{cases}$$

Comme $a \neq b$, ce système a une solution unique. Donc, la réponse est oui.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

220. Il faut choisir la fonction $h(x)$ telle que $h'(r) = \frac{1}{f'(r)}$. On peut par exemple prendre $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$ ou $h(x) = \frac{f(x)}{f[x+f(x)]}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

221. (a) La méthode de $g_1(x)$ diverge tandis que les méthodes $g_2(x)$ et $g_3(x)$ convergent.

(b) Les taux de convergence des méthodes $g_2(x)$ et $g_3(x)$ sont respectivement $|g_2'(r)| = 0,51$ et $|g_2'(r)| = 0,216$.

(c) i. Les valeurs de x_n sont supérieures à la racine à une itération et inférieures à l'autre itération. En vertu de l'approximation $e_{n+1} \simeq g'(r)e_n$, l'erreur change de signe à chaque itération.

ii. La suite $|\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}|$ tend vers le taux de convergence $|g_2'(x^*)|$. Par exemple, on a $|\frac{x_8-x^*}{x_7-x^*}| \simeq |\frac{x_9-x^*}{x_8-x^*}| \simeq 0,51$.

iii. La méthode $g_2(x)$ converge à l'ordre 1, le rapport $\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2} \to \infty$ lorsque $k \to \infty$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

222. La méthode converge à l'ordre 1 pour α dans les intervalles $]0\,,\,1[$ et $]1\,,\,2[$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

223. (a) On pose $g(x) = \frac{x^3+7x^2+(7+\omega)x-15}{\omega}$, il suffit ensuite de montrer que $g(1) = 1$.

(b) L'algorithme de points fixes converge si ω est dans l'intervalle $]-\infty\,,\,-12[$.

(c) La converge est rapide (ordre 2) car $g'(1) = 0$ et $g''(1) = -\dfrac{20}{24} \neq 0$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

224. (a) Il suffit de montrer que $g(r) = \frac{r^2+1}{r^2} = r$, ce qui est le cas car de l'équation $f(r) = r^3 - r^2 - 1 = 0$, on a $r^3 = r^2 + 1$.

(b) En partant de l'intervalle $[\frac{5}{4}\,,\,\frac{3}{2}]$, on obtient après une itération de la méthode de la bissection que $r \in [\frac{11}{8}\,,\,\frac{3}{2}]$. On a alors $-1{,}068 \leq g'(r) < -0{,}592\,592$. ce qui confirme que le point fixe est attractif et la convergence est linéaire.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Méthode de Newton

225. (a) On ne peut pas utiliser la méthode de bissection pour trouver la racine près de -1 car il n ' y a pas d'intervalle avec changement de signe tout près de cette racine. On peut cependant l'utiliser pour l'autre racine car la fonction possède de signe dans l'intervalle $[2\,,\,2{,}5]$.

(b) Pour la racine r_1 près de -1, la convergence est d'ordre 1 car $f'(r_1) = 0$. Pour la racine r_2 près de $2{,}3$, la convergence eat au moins d'ordre 2 car $f'(r_2) \neq 0$ (racine simple).

(c) Le point fixe $r \in [\frac{2\pi}{3}\,,\,\pi]$ est attractif car $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x dans l'intervalle $[\frac{2\pi}{3}\,,\,\pi]$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

226. (a) $L_0(y) = \frac{1}{4}(y+1)(y-2), \quad L_1(y) = -\frac{1}{3}(y+2)(y-2)$ et $L_2(y) = \frac{1}{12}(y+2)(y+1)$. L' itération est $x_3 = P_2(0) = \frac{5}{3} = 1{,}666\,666\,666$.

(b) L'itération x_2 est l'abscisse du point d'intersection de la droite joignant les points $(x_0\,,\,f(x_0))$ et $(x_1\,,\,f(x_1))$ avec l'axe des x.

(c) L'itération x_1 est l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ de pente $f'(x_0)$ avec l'axe des x.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

227. Pour une racine de multiplicité 2, $f(r) = 0$ et $f'(r) = 0$, la fonction ne change pas de signe autour de la racine. La méthode de la bissection de s'applique pas.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

228. (a) Les fonctions $f(\phi)$ et $f'(\phi)$ sont décroissantes sur l'intervalle $94\,,\,95]$ et $f'(94) \times f'(95) > 0$, cela entraine que la fonction $f'(\phi)$ne possède pas de racine dans l'intervalle $[94\,,\,95]$. La racine est multiplicité 1 car $f(\phi_r) = 0 \quad$ mais $f'(\phi_r) \neq 0$.

(b) La racine étant de multiplicité 1, cela implique que la méthode de Newton pour ce problème est au moins d'ordre 2.

(c) En partant d'un intervalle de longueur $L = 1$, après 10 itérations de la méthode de la bissection, la racine et son approximation son dans un intervalle de longueur $\frac{1}{2^{10}}$. On a ainsi $|\phi_r - \phi^*| \leq \frac{1}{2^{10}} = 0{,}97656 \times 10^{-3} \leq 0{,}5 \times 10^{-2} \Rightarrow \phi^* = \boxed{94{,}34}08$ possède 4 chiffres significatifs.

(d) La méthode de Newton.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

229. (a) $e_n \to 0$, $\left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right| \to 0,5 \neq 0$, convergence d'ordre 1. La racine est de multiplicité $m = 2$.

(b) $x_1 = 2$. La méthode de Newton convergence une itération.

(c) Belle coïncidence! La droite qui passe par le point de coordonnées $(1,5\,,f(1,5))$ et de pente $f'(1,5)$ coupe l'axe $y = 0$ en $x_1 = 2$, la méthode de Newton converge en une itération en partant de $x_0 = 1,5$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

230. $e_n \to 0$, $\left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right| \to 0,6666 \neq 0$, convergence d'ordre 1. La racine est de multiplicité $m = 3$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

231. La nature du point fixe est indéterminée car $g'(r) = 1$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

232. Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$ à l'aide de la méthode de Newton. Cela revient à l'algorithme

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

233. Le maximun de la fonction $f(x)$ est solution de l'équation $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0$. L'algorithme de Newton est donné par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(1-\ln x_n)}{-3+2\ln x_n}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

234. Le calcul de $f(x_n) = x_n^2 - M$ peut entrainer la perte de chiffres significatifs. L'algorithme de Newton sinplifiée donne

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{M}{x_n}\right).$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

235. (a) On pose $G(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}$. La méthode des points fixes $G(x)$ est au moins d'ordre 2 car $G(r) = r$ et $G'(r) = 0$.

(b) La méthode converge à l'ordre 2 mais à chaque itération il faut calculer $f(x_n)$ et $f[x_n + f(x_n)]$.

(c) Pour $f(x)$ proche de 0, le développement de Taylor de la fonction $f[x+f(x)]$ autour de x donne

$$f[x+f(x)] = f(x)+f'(x)f(x)+\mathcal{O}(f(x))^2 \Rightarrow f'(x) \simeq \frac{f[x+f(x)]-f(x)}{f(x)} = g(x).$$

La méthode des points fixes est une variante de celle de Newton où la dérivée $f'(x)$ est remplacée par l'approximation $g(x)$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

236. (a) Il suffit de résoudre à l'aide de la méthode de Newton, l'équation $f(x) = x^2 - N = 0$. En remplaçant $f(x)$ et $f'(x) = 2x$ dans l'algorithme de Newton et en simplifiant, on trouve algorithme
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right).$$
(b) Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x^3 - N = 0$à l'aide de la méthode de Newton. Cela revient à l'algorithme
$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{N}{x_n^2}\right).$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

237. (a) La pente est fixée une fois pour toutes à $f'(x_0)$. Par conséquent, les droites sont toutes parallèles.
(b) On pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} = x - \frac{x^2-2}{2x_0}$. La condition de convergence est alors $|g'(\sqrt{2})| < 1$ et on obtient $\frac{\sqrt{2}}{2} < x_0 < \infty$.
(c) $x_0 = \sqrt{2}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

238. (a) La converge n'est pas assurée car l'approximation initiale $x_0 = b$, ne fait pas partie du bassin d'attraction de la racine de la fonction $f(x)$ pour la méthode de Newton.
(b) La converge de la méthode de Newton est quadratique si $f'(r) = 1 - a\cos r \neq 0$. Ce qui est le cas puisque pour $0 < a < 1$, on a $\cos r \neq \frac{1}{a}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

239. La méthode de Newton est d'ordre 1 et le taux de convergence $|g'(r)| = \frac{9}{10}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

240. (a) $f(x)$ est de la forme $(x-1)^2 h(x)$ avec $h(1) = e \neq 0 \Rightarrow r = 1$ est de multiplicité $m = 2$.
(b) Le ratio $|\frac{e_{n+1}}{e_n}| \to 0,5$, la convergence est linéaire et le taux de convergence $|g'(r)| = 0,5$.

n	$\lvert\frac{e_{n+1}}{e_n}\rvert$
8	4.994963331318167e-01
9	4.997485470223553e-01
10	4.998743683459937e-01
11	4.999372078471372e-01
12	4.999686098374866e-01
13	4.999843063966225e-01
14	4.999921535661964e-01
15	4.999960768780633e-01
16	4.999980384554781e-01
17	4.999990192486539e-01
18	4.999995096445901e-01

(c) Le ratio $|\frac{e_{n+1}}{e_n}| \to 0$ et le ratio $|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}| \to 0,5 \neq 0 \Rightarrow$ convergence quadratique.

n	$\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n} \rvert$	$\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \rvert$
1	0,6	0,799 999
2	$1,836\,734 \times 10^{-1}$	0,468 163
3	$3,968\,643 \times 10^{-2}$	0,480 756
4	$1,637\,416 \times 10^{-3}$	0,499 181

(d) La fonction $f(x) = (x-1)^2 e^x \geq 0$, donc ne change pas de signe. La méthode de la bissection ne peut pas être utilisée pour approcher la racine $r = 1$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

241. En partant de x_0, on obtient $x_1 = -x_0$ et $x_2 = x_0$. La méthode de Newton cycle.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Méthode de la sécante

242. (a) La méthode de Newton cycle. Cela est dû au fait que la fonction est impaire par rapport à $x = a$.

(b) La droite passant par les points de coordonnées $(1\,,\,-1)$ et $(3\,,\,1)$ intersecte l'axe des x en $x = 2$, la racine de $f(x)$. Cela est dû au fait que la fonction est impaire par rapport à 2.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

243. La méthode 1 est celle de Newton, la méthode 2 est celle de la sécante et la méthode 3 est celle de point fixe.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

244. (a) La racine est $r = -2$.

(b) L'algorithme de la méthode de Newton est donné par $x_{n+1} = g(x_n)$ où $g(x) = -\frac{3}{2}x - 5$. La méthode de Newton diverge car $|g'(-2)| = \frac{3}{2} > 1$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

245. (a) La méthode de Newton converge à l'ordre 1 car la racine $r = 1$ est de multiplicité 2.

(b) L'itérée $x_2 = 0,65061 \times 10^{-1}$ ne possède aucun chiffre significatif.

(c) i. $x_n \to 1$ $\left|\dfrac{e_n}{e_{n-1}}\right| \to 0$ et $\left|\dfrac{e_n}{e_{n-1}^2}\right| \to 0,08 \neq 0$, la méthode des points fixes converge à l'ordre 2.

ii. Le comportement bizarre de la dernière ligne des colonnes 2 et 3 du tableau est du à perte de chiffres significatifs par soustraction de nombres voisins. Quand x_n est proche de la racine $r = 1$, le calcul de l'erreur err, entraine une perte de chiffres significatifs.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

246. On obtient $x_2 = 1,433\,812$ et $x_3 = 1,413\,777$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

247. La prochaine itération est $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(f(x_k)-f(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}} = r - \frac{0}{r - x_{k-1}} = r$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

248.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))} = \frac{x_n f(x_n) - x_n f(x_{n-1}) - f(x_n)x_n + x_{n-1}f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= \frac{f(x_n)x_{n-1} - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Pour x_n près de r, $f(x_n) \simeq 0$ comparé à $f(x_{n-1})$. L'algorithme de la Sécante donne: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{(f(x_n)-f(x_{n-1}))} \longrightarrow x_{n+1} \simeq x_n$. On a convergé. Pour la nouvelle formulation: on a
$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1}-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \longrightarrow x_{n+1} \simeq \underbrace{\frac{-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}_{\text{Opération risquée}}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Méthode de l'interpolation inverse

249. $L_0(y) = \frac{1}{224}(y-51)(y+1)$, $L_1(y) = \frac{1}{2912}(y+5)(y+1)$ et $L_2(y) = -\frac{1}{208}(y+5)(y-51)$. On a $x_3 = P_2(0) = 2,458$ où $P_2(y) = 0L_0(y) + 4L_1(y) + 2L_2(y)$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Problèmes algébriques non linéaires

250. Il faut résoudre $y(t) = 9600(1 - e^{-t/15}) - 480t = 0$. Il ya plusieurs possibilités:

   1. Newton: Il faut $y'(t) = \frac{9600}{15}e^{-t/15} - 480$ et l'approximation initiale $t_0 = 9$.
   2. Secante: on prend les approximations initiales $t_0 = 9$ et $t_1 = 9,1$ ou $8,9$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

251. Le temps T est une racine de la fonction $N(t) = N_5(t) - N_9(t)$. On peut utiliser les méthodes suivantes pour calculer plus précisement T:

   1. Méthode de la bissection et méthode de Brent-Dekker sur l'intervalle $[200\,,\,250]$ avec la fonction $N(t)$ Selon le graphique,

$$\begin{array}{lll} N_5(t) > N_9(t) & \text{pour} & 200 < t < T \Rightarrow N(t) = N_5(t) - N_9(t) > 0 \\ N_5(t) < N_9(t) & \text{pour} & t > T < 250 \Rightarrow N(t) = N_5(t) - N_9(t) < 0 \end{array}$$

   2. Méthode de la sécante avec les conditions initiales $x_0 = \frac{200+250}{2}$ et $x_1 = x_0 + 1$ et la fonction $N(t)$.

3. Méthode de Newton avec la condition initiale $x_0 = \frac{200+250}{2}$ et les fonctions $N(t)$ et $N'(t)$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

252. (a) $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \mathcal{O}(x^5) = p_3(x) + \mathcal{O}(x^5)$.

(b)

$$\begin{cases} T_0 = 0\,^0\mathrm{C}, \quad T_i = 10\,^0\mathrm{C} \text{ et } T_S = -40\,^0\mathrm{C} \\ \alpha = 0,138 \times 10^{-6} \text{ et } t = 30\,\text{jours} = 2592 \times 10^3\ \mathrm{s}. \end{cases}$$

La profondeur x à laquelle devront se trouver les conduites est une solution de l'équation

$$f(x) = -40 + \frac{50}{\sqrt{\pi\alpha t}}\left[x - \frac{x^3}{12\alpha t}\right] = 0.$$

La méthode de Newton est la plus appropriée parce que la fonction est facile à dériver.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Systèmes d'équations algébriques

Factorisations matricielles

253. Cette affirmation est fausse. Toute matrice carrée A peut seulement s'écrire sous la forme $PA = LU$, où P est une matrice de permutation de lignes.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

254. La résolution se fait en 3 étapes: On résout d'abord $L\vec{z} = P\vec{b}$, pour obtenir $\vec{z}$ ensuite on résout $U\vec{y} = \vec{z}$ pour obtenir $\vec{y}$ et finalement on obtient la solution $\vec{x} = P^{-1}\vec{y}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

255. (a)

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) En résolvant respectivement $A\vec{x} = [1 \quad 0]^T$ et $A\vec{x} = [0 \quad 1]^T$, on obtient respectivement $[\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3}]^T$, la première et $[-\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}]^T$ la deuxième colonne de A^{-1}.

(c) La décomposition LU en arithmétique flottante à 2 chiffres

$$L = \begin{bmatrix} 0,2\times 10^1 & 0 \\ 0,1\times 10^1 & 0,15\times 10^1 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 0,1\times 10^1 & 0,5\times 10^0 \\ 0 & 0,1\times 10^1 \end{bmatrix}.$$

On résout $L\vec{y} = \vec{b}$, pour obtient $\vec{y} = [0,6 \quad -0,15\times 10^1]^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = [0,14\times 10^1 \quad -0,15\times 10^1]^T$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

256. Il est pas possible de factoriser la matrice A sans effectuer une permutation de ligne.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'affirmation est fausse car la matrice B possède une décomposition LU en dépit du fait qu'elle ne soit pas inversible.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

257. (a) $\mathrm{fl}(l_{33}) = -0,17\times 10^{-1}$.

(b) $\mathrm{dét}(A) = (-1)^1\mathrm{dét}(L)\times\mathrm{dét}(U) = -0,3536\times 10^{-2}$.

(c) Il faut résoudre les systèmes suivants: $L\vec{y} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ et $U\vec{x} = \vec{y}$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

258. Il faut résoudre le système $B\vec{x} = \vec{e}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$. En se servant de la décomposition LU et du vecteur de permutation cela revient à résoudre le système $LU\vec{x} = P\vec{e}_3 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$. On résout $L\vec{y} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ pour obtenir $\vec{y} = [0 \quad 1 \quad 1]^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = [7 \quad -5 \quad 1]^T$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

259. En se servant du vecteur de permutation de lignes on a, $L_{33} = A_{13} - U_{12}L_{31} - U_{23}L_{32}$ et on obtient $L_{33} = 6$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

260. (a) $\text{dét}A = (1)(3)(6) = 18$.
   (b) $\|A\|_\infty = \max(6,\ 27,\ 55) = 55$.
   (c) Ces deux vecteurs sont les deux premières colonnes de A^{-1}. En resolvant $A\vec{x} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, on obtient la dernière colonnne qui est $[\frac{5}{6} \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}]^T$.
   (d) $\|A\|_\infty = \max(4,666\,53,\ 2,333,\ 0,555\,55) = 4,666\,53$ et donc $\text{cond}_\infty A = 256,659$.
   (e) Le produit des matrices L et U donne

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{bmatrix}$$

et on obtient à l'aide du vecteur de permutation de de lignes la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

261. (a) La décomposition LU de *Crout* de A, sous forme compacte est donnée par

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{-2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{-12} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{4} & \boxed{-2} \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{2} & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \vec{O} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   (b) $\text{dét}A = (-1)^1 \text{dét}L \times \text{dét}U = 48$.
   (c) $\text{dét}A^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét}A} = \dfrac{1}{48}$.
   (d) Le produit des matrices L et U donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 8 & -6 \\ 3 & 12 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

et on obtient à l'aide du vecteur de permutation de de lignes la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 12 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

262. (a)

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & -5 & 0 \\ -3 & 7 & \frac{19}{2} & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\text{dét}A = \text{dét}L \times \text{dét}U = (1)(-4)(-5)(-9) = -180$.

(c) On résout $L\vec{y} = [13 \quad 28 \quad 20 \quad 6]^T$ pour obtenir $\vec{y} = [-13 \quad -\frac{1}{2} \quad 7 \quad 2]^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = [3 \quad -1 \quad 4 \quad 2]^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

263. La décomposition LU de Crout **(notation compacte)** et le vecteur de permutation sont

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \vec{O} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

264. La décomposition LU de Doolitle de la matrice A sans permutation de lignes est donnée par

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

265. (a) La décomposition LU de Doolitle de la matrice A sans permutation de lignes est donnée par

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

(b) Pour obtenir les colonnes $\vec{c}_i$ de la matrice A^{-1}, il faut résoudre à l'aide de la décomposition LU les 3 systèmes linéaires suivants:

(c) Les diagonales des matrices L et U ne contiennent pas de coeffients nuls.

(d)

$$A\vec{c}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T, \quad A\vec{c}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T \text{ et } A\vec{c}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

(e) Le calcul de l'inverse de la matrice A de dimensions $n \times n$ nécessite $\frac{4}{3}n^3$ opérations.

(f) Il faut d'abord permuter le vecteur $\vec{b}$ en faisant $P\vec{b}$. On résout $L\vec{y} = P\vec{b}$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$.

(g) $\|A\|_1 = \max\{6; 1; 9\} = 9 \quad \|A^{-1}\|_1 = \max\{2,4; 1; 0,4\} = 2,4$ et $\text{cond}_1 A = 21,6$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

266. (a) La système $A\vec{x} = \vec{b}$ est donné par

$$\begin{bmatrix} -(1+\delta) & 1 & 0 & 0 \\ \delta & -(1+\delta) & 1 & 0 \\ 0 & \delta & -(1+\delta) & 1 \\ 0 & 0 & \delta & -(1+\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K(y_f - b) \\ 0 \\ 0 \\ -x_f \end{bmatrix}$$

(b) la décomposition de Thomas est la plus adéquate car la matrice A est tridiagonale. Les matrices L et U sont

$$L = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5294 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0,7051 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & -0,7923 & 1,0000 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -2,1250 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5956 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & -1,4199 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -1,3327 \end{bmatrix}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

267. (a) La représentation compacte et le vecteur de permutation sont

$$PA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{O} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) La solution de $L\vec{y} = P\vec{b}$ donne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \implies \vec{y} = \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \\ -32/3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ensuite, la solution de $U\vec{x} = \vec{y}$ donne

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \\ -32/3 \\ 8 \end{bmatrix} \implies \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

268. Factorisation sans permutation de ligne.

$$A \neq \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 \\ 1,3 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7,0 & 6,0 \\ 0,0 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,0 & 6,0 \\ 9,1 & 8,0 \end{bmatrix}$$

Factorisation avec pivot partiel (permutation de lignes)

$$PA = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 \\ 0,78 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9,0 & 8,0 \\ 0,0 & -0,2 \end{bmatrix}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

269. (a) La décomposition LU de Thomas est donnée par:

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{56} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28}{15} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{209}{112} \end{bmatrix}$$

(b) $\text{dét} = \text{dét}L \times \text{dét}U = \frac{209}{16}$.

(c) On résout $L\vec{y} = [2,5 \quad 3 \quad 3 \quad 2,5]^T$ pour obtenir $\vec{y} = [\frac{5}{2} \quad \frac{19}{8} \quad \frac{71}{30} \quad \frac{209}{112}]^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

270. (a) La décomposition de Crout est la plus appropriée pour les matrices A_1 et A_4.

(b) La décomposition de Cholesky est la plus appropriée pour A_3 car elle symétrique et définie positive.

(c) La décomposition de Thomas est la plus appropriée pour A_2 car elle est tridiagonale.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

271. (a) $\text{dét}B = \text{dét}L \times \text{dét}L^T = (\text{dét}L)^2 = (3 \times 2 \times 2)^2 = 144$.

(b) On doit résoudre $B^2\vec{y} = B(B\vec{y}) = \vec{b}$, cela revient à résoudre $B\vec{y} = \vec{x}$. Ce système est ensuite résolu au moyen de la décomposition LL^T de B et on trouve la solution $\vec{y} = [\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0]^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

272. (a) La décomposition de Cholesky nécessite 2 fois moins d'opérations que celle de Crout et de Doolitle et le stockage d'une seule matrice.

(b)

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

On résout $L\vec{y} = [15 \quad 9 \quad 9]^T$ pour obtenir $\vec{y} = [5 \quad 5 \quad 2]^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

273. (a) $\text{dét}B = \text{dét}L \times \text{dét}D \times \text{dét}L^T = 1$.

(b) Il faut résoudre le système $B\vec{x} = LDL^T\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b}$ où $U = DL^T$. On résout $L\vec{y} = \vec{b}$ pour obtenir $\vec{y} = [-6 \quad 5 \quad -1]^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Conditionnement matriciel

274. Des propriétes (b), (c) et (d) on obtient la matrice inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 83,077 & 64,615 & 0,461\,54 \\ 156,92 & -115,38 & -1,538\,4 \\ -57,692 & 41,538 & 1,153\,8 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Cond}_\infty A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 958,4344.$
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

275. L'énoncé est faux car la norme du résidu est seulement une bonne mesure de précision si la matrice est bien conditionnée.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

276. (a) Non, car la matrice D est inversible.

$$DA\vec{x} = D\vec{b} \equiv D^{-1}DA\vec{x} = D^{-1}D\vec{b} \iff A\vec{x} = \vec{b}.$$

(b) Oui. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Cond}_\infty A = 100$ mais $\mathrm{Cond}_\infty DA = 1$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

277. (a) On obtient $A = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU \Rightarrow \text{dét}A = \text{dét}L \times \text{dét}U = 1 \times 1 = 1.$$

(b) On doit résoudre $A\vec{x} = \vec{e}_2$. La solution de $L\vec{y} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ donne $\vec{y} = [0 \quad 1 \quad 1]^T$ et ensuite la solution de $U\vec{x} = \vec{y}$ donne la deuxième colonne de A^{-1}, $\vec{x} = [-1 \quad 1 \quad 1]^T$.

(c)

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_\infty = \max_{ligne}\{|1| + |1| + |0|; |0| + |1| + |0|; |1| + |0| + |1|\} = \max\{2; 1; 2\} = 2.$
$\mathrm{cond}_\infty A = \|A\|_\infty \times \|A^{-1}\|_\infty \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = \frac{6}{2} = 3.$

(d) Vu que la matrice A est bien conditionnée, la norme du résidu est une bonne mesure de convergence.
$\|\vec{r}\|_\infty = \|\vec{b} - A\vec{x}^*\|_\infty = 10^{-10} \Rightarrow \vec{x}^*$ est une bonne approximation.

(e) Pour résoudre $B^2\vec{x} = B(B\vec{x}) = (1 \quad 2 \quad 3)^T$, on pose $B\vec{x} = \vec{y}$ et la résolution du système se fait alors en deux étapes: On résout $B\vec{y} = (1 \quad 2 \quad 3)^T$ pour obtenir $\vec{y} = (1 \quad 2 \quad 3)^T$ et ensuite $B\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = (1 \quad 2 \quad 3)^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

278. (a)

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La décomposition LU a nécessité 2 permutations de lignes, on a donc le déterminant $\text{dét}(A) = (-1)^2\text{dét}(L) \times \text{dét}(U) = -2$. Le produit des matrices L et U donne

$$LU = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et on obtient à l'aide du vecteur de permutation de de lignes la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) On résout $L\vec{y} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ pour obtenir $\vec{y} = [\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad -2]^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = [1 \quad \frac{3}{2} \quad -2]^T$.

(c) Pour trouver la troisième colonne de A^{-1}, il faut résoudre le système

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $\|A\|_\infty = 4$, $\|A^{-1}\|_\infty = 4$ et $\text{Cond}_\infty A = 16$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

279. (a) On a $U = A$, $\quad L = I$ et $P = I$ où I est la matrice identité.

(b) $\text{cond}_1 A_n = n(1 + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2}) = n2^{n-1}$.

(c) $\|\vec{r}\|_1 \leq \epsilon 2^{1-n}$. Pour $n = 10^4$, on obtient en simple précision $\|\vec{r}\|_1 \leq 2^{-23}2^{1-10^4} \simeq 0$.

(d) La matrice A est inversible (dét$A = 1$) mais le conditionnement de A est grand pour n grand. Donc l'énoncé est faux.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

280. $\|A\|_\infty = \max\{0,780 + 0,563; 0,913 + 0,659\} = 1,572$ et $\mathrm{cond}_\infty A = 2,661\,396 \times 10^6$.

La matrice est mal conditionnée, la norme du résidu n'est pas une bonne mesure de convergence. La solution approximative n'est pas acceptable en dépit du fait que $\|\vec{b} - A\vec{x}^*\|_\infty = 0,1 \times 10^{-5}$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

281. $E_r(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}-\vec{x}^*\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} < \mathrm{Cond}_\infty A \frac{\|\vec{r}\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} \leq 10^{-5}\mathrm{Cond}_\infty A \leq 10^{-4} \Rightarrow \mathrm{Cond}_\infty A \leq 10$. La valeur maximale du conditionnement est 10.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

282. la matrice erreur absolue est donnée par:

$$E = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,05 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,05 & 0,005 & 0,05 \end{pmatrix}$$

car tous les chiffres de chaque composante de la matrice sont significatifs. Une approximation de l'erreur relative est donnée par:

$$E_r(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \simeq \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|_\infty}{\|\vec{x}^*\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty A \frac{\|E\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \|E\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 773{,}50005.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

283. L'erreur relative $E_r(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}-\vec{x}^*\|}{\|\vec{x}\|} = 95\%$ et $\mathrm{cond}_\infty A = \frac{25}{12} \times 13620 = 28375$. Les résultats sont si mauvais parce que la matrice est mal conditionnée.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

284. (a) On cherche la solution du système $A\vec{x} = \vec{e}_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$. De $PA = LU$, on a $LU\vec{x} = P\vec{e}_3 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$. On résout $L\vec{y} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$ pour obtenir $\vec{y} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer $\vec{x} = [-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$, la troisième colonne de A^{-1}.

(b) On a

$$A = PLU = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\|A\|_1 = 6$, $\|A^{-1}\|_1 = 5$ et $\mathrm{Cond}_1 A = 30$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

285.

$$\frac{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|_\infty}{\|\vec{x}^*\|_\infty} \leq \epsilon \mathrm{cond}_\infty A \leq 10^{-6} \times 10^4 \times 10^6 = 10^{-6}.$$
$$\|\vec{x} - \vec{x}^*\|_\infty \leq 10^{-6}\|\vec{x}^*\|_\infty \simeq 1,234\,567\,890\,123\,456 \times 10^{-6} \leq 0,5 \times 10^{-5}$$

La composante $x_1^* = \boxed{1,234\,56}7\,890\,123\,456$ possède au moins 6 chiffres significatifs.
La composante $x_2^* = 0,\boxed{1}2\,345\,678\,901 \times 10^{-4}$ possède au moins 1 chiffre significatif.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

286. (a) $\|A\|_\infty = 101$, $\|A^{-1}\|_\infty = 500,5$ et $\mathrm{Cond}_\infty A = 50550,5$.

(b) Aprés la mise à l'échelle des lignes de la matrice A, on a

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{100} \\ 1 & \frac{1}{100} \end{bmatrix}.$$

$\|B\|_\infty = 1,01$, $\|B^{-1}\|_\infty = 100$ et $\mathrm{Cond}_\infty B = 101$.

(c) Au lieu de résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$, il serait préférable de résoudre le système $B\vec{x} = \vec{c} = [\frac{b_1}{100} \quad 10b_2]^T$, car le conditionnement de la matrice B est nettement inférieur au conditionnemnet de la matrice A.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Méthodes itératives

287. (a) En partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0$, on obtient avec la méthode de Jacobi les itérations $\vec{x}^1 = [-3 \quad -4 \quad 1]^T$ et $\vec{x}^2 = [-24 \quad -17 \quad \frac{4}{9}]^T$.

(b) En partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0$, on obtient avec la méthode de Gauss-Siedel l' itération $\vec{x}^1 = [-3 \quad -\frac{35}{2} \quad -\frac{23}{9}]^T$.

(c)

$$\begin{cases} \boxed{9}x_1 - 2x_2 + x_3 = 8; \\ -x_1 + \boxed{5}x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - 2x_2 + \boxed{9}x_3 = 9, \end{cases}$$

On obtient une matrice à diagonale strictement dominante.

(d) On sait que

$$T_J = -D^{-1}(T_I + T_S) = I - D^{-1}A = T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Son rayon spectral est $\rho(T_J) = \sqrt{\frac{2}{15}} < 1$ et donc la méthode de Jacobi converge.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

288. (a) La solution est $\vec{x} = (1 \quad 1)^T$.

(b) En partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0 = (0 \quad 0)^T$, on obtient avec la méthode de Gauss-Seidel les itérations suivantes: $\vec{x}^1 = (3 \quad -3)^T$, $\vec{x}^2 = (9 \quad -15)^T$ et $\vec{x}^3 = (33 \quad -63)^T$ ce qui confirme que la méthode de Gauss-Seidel diverge.

(c) En partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0 = (0 \quad 0)^T$, on obtient avec la méthode de Gauss-Seidel les 3 itérations suivantes: $\vec{x}^1 = (\frac{3}{2} \quad \frac{3}{4})^T$, $\quad \vec{x}^2 = (\frac{9}{8} \quad \frac{15}{16})^T$ et $\vec{x}^3 = (\frac{33}{32} \quad \frac{63}{64})^T$ avec $\|\vec{x}^{(3)} - \vec{x}\|_\infty = 0,031 < 0,1$.

(d) La méthode de Jacobi converge car la matrice A est à diagonale strictement dominante. En plus le rayon spectral de la matrice d'itérations $\rho(T_J) = \frac{1}{2} < 1$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

289. (a) En partant de l'itération initiale $\vec{x}^0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on obtient avec la méthode de Gauss-Seidel l'itération suivante: $\vec{x}^1 = [1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{4}]^T$.

(b) Pour $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, la convergence de la méthode de Gauss-Seidel est assurée car la matrice A est à diagonale strictement dominante.

(c) La matrice d' itération de Jacobi est

$$T_J = -D^{-1}(T_I + T_S) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

En se servant des valeurs propres de la matrice T_J, on a $\rho(T_J) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. La méthode de Jacobi converge, ce qui entraine la convergence de la méthode de Gauss-Seidel car elle est plus rapide.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

290. La matrice d'itération de la méthode de Jacobi est

$$T_J = -D^{-1}(T_I + T_S) = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son rayon spectral est $\rho(T_J) = 5\sqrt{2} > 1$ donc la méthode de Jacobi diverge.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

291. On considère le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$. À partir de $\vec{x}_0$, on obtient après une itération de la méthode de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1^1 = \frac{b_1}{A_{11}} \\ A_{12}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2^1 = \frac{1}{A_{22}}\left(b_2 - A_{12}x_1^1\right). \end{cases}$$

Pour une matrice triangulaire de dimensions $n \times n$ dont les coefficients de la diagonale sont non nuls, la méthode de Gauss-Siedel revient à faire une descente triangulaire.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

292. (a) On ne peut pas appliquer directement les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel puisque l'un des coefficients diagonaux est nul ($A_{11} = 0$).

(b) On obtient le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25; \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = -11; \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = -11. \end{cases}$$

(c) En partant de $\vec{x}^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, la méthode de Jacobi donne l'itération $\vec{x}^1 = [\frac{3}{5} \quad \frac{25}{11} \quad -\frac{11}{10} \quad -\frac{11}{8}]^T$ et la méthode de Gauss-Seidel donne l'itération $\vec{x}^1 = [\frac{3}{5} \quad \frac{128}{55} \quad -\frac{543}{550} \quad -\frac{726}{349}]^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

293. (a) On ne peut pas appliquer directement les méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel puisque les coefficients diagonaux sont nuls ($a_{ii} = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, 4$).

(b) Pour s'assurer de la convergence, il faut que la matrice soit à diagonale strictement dominante.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) En partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, on obtient la méthode de Jacobi l'itération suivante: $\vec{x}^1 = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]$.

(d) En partant de l'approximation initiale $\vec{x}^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, on obtient la méthode de Gauss-Seidel l'itération suivante: $\vec{x}^1 = [\frac{1}{2} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{13}{16}]$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

294. (a) La matrice A est symétrique et définie positive, la décomposition de Cholesky est la plus adéquate.

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) On résout $L\vec{y} = [3 \quad -4 \quad 18]^T$ pour obtenir $\vec{y} = [1 \quad -1 \quad 4]^T$ et ensuite $L^T\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la solution $\vec{x} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$.

(c) La convergence de la méthode de Gauss-Seidel est assurée qu'elle que soit la solution de départ utilisée car la matrice A est à diagonale strictement dominante.

(d) En partant de $\vec{x}^0 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$, on trouve $\vec{x}^1 = [\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{38}{40}]^T$ et ensuite $\vec{x}^2 = [-\frac{2}{135} \quad -\frac{1}{15} \quad \frac{80}{81}]^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

Systèmes d'équations algébriques non linéaires et méthode de Newton

295. Soit $\vec{x}^0 = [1 \quad 1]^T$, le vecteur correction $\vec{\delta}$ est solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est singulière et le système ne possède aucune solution, $\vec{x}^0 = [1 \quad 1]^T$ n'est pas un bon estimé.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

296. (a) 3 solutions.
(b) Le vecteur correction $\vec{\delta}$ est solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 8x^0 & 2y^0 \\ 1 & -2y^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4(x^0)^2 + (y^0)^2 - 4 \\ x^0 - (y^0)^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite $x \simeq x^0 + \delta_x$ et $y \simeq y^0 + \delta_y$.
(c) La matrice jacobienne évaluée en la solution $(-1\,,\,0)$ n'est pas pas inversible.
(d) On a $\|A\|_\infty = 8 - 6\epsilon$ et $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{4{,}5-4\epsilon}{\epsilon(7-8\epsilon)}$. Avec$\epsilon = 2^{-23}$, on a $\mathrm{Cond}_\infty A \simeq 2{,}3 \times 10^{16}$, la matrice est mal conditionnée.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

297. (a) La matrice jacobienne et le vecteur résidu s'écrivent:

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 2y & -2z \\ 0 & 1 & -2z \end{pmatrix} \quad \vec{R}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ y^2 - z^2 - 1 \\ y - z^2 + 1 \end{pmatrix}$$

On doit résoudre $\quad J(x^0, y^0, z^0)\vec{\delta} = -\vec{R}(x^0, y^0, z^0)$.

(b) Le point $[0 \quad -1 \quad 0]^T$ est le point d'intersection des 3 coniques.
(c) i. L'approximation initiale $\vec{x}^0 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ n'est pas dans le bassin d'attraction de la solution.
ii. le choix de $h = 10^{-12}$, pourrait entrainer l'élimination de chiffres significatifs par la soustraction de nombres voisins lors du calcul de la matrice jacobienne.
(d) La formule aux différences utilisée est d'ordre 1, la formule aux différences d'ordre 2 est plus appropriée. Le programme modifié est le suivant:

```
for i =1: nbeq
  acc = zeros(nbeq,1);
  acc(i) = h;
  jac(:,i) = (feval(f,x0 + acc) - feval(f,x0 - acc) )./(2*h);
end
```

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

298. (a) $x_1^1 = 3$ et $x_2^1 = -4$.
(b) Le ratio $\frac{\|\vec{x}-\vec{x}^{k+1}\|_\infty}{\|\vec{x}-\vec{x}^k\|_\infty} \to 0$ et le ratio $\frac{\|\vec{x}-\vec{x}^{k+1}\|_\infty}{\|\vec{x}-\vec{x}^k\|_\infty^2} \to 0{,}99 \neq 0$. La méthode de Newton converge à l'ordre 2.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

299. La méthode de Newton converge rapidement vers la racine $(1\,,\,0)$ (ordre 2) car la matrice jacobienne est non singulière en $[1 \quad 0]^T$.
[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

300. (a)

$$g(t) = 1, \int_{-1}^{1} g(t)dt = 2 \Rightarrow w_1 g(-1) + w_2 g(1) = w_1 + w_2$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 + w_2 = 2}$$

$$g(t) = t, \int_{-1}^{1} g(t)dt = 0 \Rightarrow w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2) = w_1 t_1 + w_2 t_2$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 t_1 + w_2 t_2 = 0}$$

$$g(t) = t^2, \int_{-1}^{1} g(t)dt = \frac{2}{3}, w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2)) = w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 = \frac{2}{3}}$$

$$g(t) = t^3, \int_{-1}^{1} g(t)dt = 0, w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2)) = w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 = 0}$$

(b)

La matrice jacobienne et le vecteur résidu s'écrivent:

$$J(w_1, w_2, t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ t_1 & t_2 & w_1 & w_2 \\ t_1^2 & t_2^2 & 2t_1 w_1 & 2t_2 w_2 \\ t_1^3 & t_2^3 & 3t_1^2 w_1 & 3t_2^2 w_2 \end{pmatrix} \quad \vec{R}(w_1, w_2, t_1, t_2) = \begin{pmatrix} w_1 + w_2 - 2 \\ w_1 t_1 + w_2 t_2 \\ w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 - \frac{2}{3} \\ w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 \end{pmatrix}$$

On doit résoudre $\quad J(w_1^0, w_2^0, t_1^0, t_2^0)\vec{\delta} = -\vec{R}(w_1, w_2, t_1, t_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta t_1 \\ \delta t_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

301. (a)

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1,x_2,x_3,\lambda) & = & (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ f_2(x_1,x_2,x_3,\lambda) & = & -2x_1 + (3-\lambda)x_2 - 4x_3 = 0; \\ f_3(x_1,x_2,x_3,\lambda) & = & 3x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0; \\ f_4(x_1,x_2,x_3,\lambda) & = & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0. \end{array}$$

(b) La matrice jacobienne et le vecteur résidu s'écrivent:

$$J(x_1,x_2,x_3,\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 & -x_1 \\ -2 & 3-\lambda & -4 & -x_2 \\ 3 & -4 & 5-\lambda & -x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{R}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + (3-\lambda)x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Le système linéaire à résoudre est

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -4 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

302. (a) Il s'agit de trouver graphiquement sur l'intervalle $[-1\,,1]$, les intersections de la courbe $y = \sin(\pi x)$ et la parabole $y = 1-x^2$. On trouve 3 intersections $(-1\,,\,0)$ $(1\,,\,0)$ et proche de $(1/2\,,\,1)$.

(b) Le vecteur résidu et la matrice jacobienne s'écrivent:

$$\vec{R}(x,y) = \begin{pmatrix} y - \sin(\pi x) \\ y + x^2 - 1 \end{pmatrix} \quad J(x,y) = \begin{pmatrix} -\pi\cos(\pi x) & 1 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Il faut résoudre le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice jacobienne est inversible en la solution $[1 \quad 0]^T$ donc la méthode de Newton converge á l'ordre 2.

(d) Pour une approximation initiale (x^0, y^0) donnée, la méthode de Newton ne fonctionne pas si $\text{dét}(J(x^0, y^0)) = 0$. Il s'agit de trouver graphiquement l'intersection entre la droite $y = 2x_0$ et la courbe $y = -\pi\cos(\pi x^0)$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

303. (a) En partant de l'approximation initiale $[0 \quad 1]^T$, on obtient après une itération de la méthode de Newton l'approximation $[-2 \quad 4]^T$.

(b) Il n'est pas possible d'utiliser l'approximation initiale $[1 \quad 2]^T$ car la matrice jacobienne $J(1,2)$ est singulière.

(c) Tous les points de la droite $y^0 = 2x^0$ car la matrice jacobienne $J(x^0, 2x^0)$ est singulière.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

304.

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{R}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b} \quad \text{et} \quad J(\vec{x}) = A.$$

À partir de $\vec{x}^0$, on obtient après une itération de la méthode de Newton :

$$A\vec{\delta x} = -R(\vec{x}^0) = \vec{b} - A\vec{x}^0 \Rightarrow \delta x = A^{-1}\vec{b} - \vec{x}^0;$$

$$\vec{x}^1 = \vec{x}^0 + \vec{\delta x} = \vec{x}^0 + A^{-1}\vec{b} - \vec{x}^0 = A^{-1}\vec{b}.$$

À partir de $\vec{x}^1$, on obtient après la 2^{ieme} itération de la méthode de Newton :

$$A\vec{\delta x} = -R(\vec{x}^1) = \vec{b} - A\vec{x}^1 = \vec{b} - AA^{-1}\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \delta x = \vec{0};$$

$$\vec{x}^2 = \vec{x}^1 + \vec{\delta x} = \vec{x}^1 = A^{-1}\vec{b}.$$

$\delta x = \vec{0}$ et $\vec{x}^2 = \vec{x}^1 \Rightarrow$ convergence en 2 itérations.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]

305. (a) On a $u_{23} = 1$ et $l_{33} = \frac{1}{2160}$. Le déterminant est détA = dét$L \times$ dét$U = \frac{1}{2160}$.

(b) Il faut résoudre le système linéaire $A\vec{x} = \vec{e_3} = (0 \quad 0 \quad 1)^T$. On résout $L\vec{y} = \vec{e_3}$ pour obtenir $\vec{y} = (0 \quad 0 \quad 180)^T$ et ensuite $U\vec{x} = \vec{y}$ pour calculer la troisième colonne de la matrice A^{-1}, $\vec{x} = (30 \quad -180 \quad 180)^T$.

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

Le conditionnement de la matrice est $\text{cond}_\infty H = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 748$.

(c) La matrice jacobienne et le vecteur résidu s'écrivent:

$$J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} + x_3 & \frac{1}{2} + x_2 \\ \frac{1}{2} + x_3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} + x_1 \\ \frac{1}{3} + x_2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \vec{R}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + x_2x_3 - 1; \\ \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} + x_1x_3 - \frac{1}{2}; \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{5} + x_1x_2 - \frac{1}{3}. \end{pmatrix}$$

Le Système linéaire pour la première itération est $H\vec{\delta x} = [1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}]^T$ ce qui donne $\vec{\delta x} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ et $\vec{x}^1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$.

[*Question*] [*Indice*] [*TdM*]