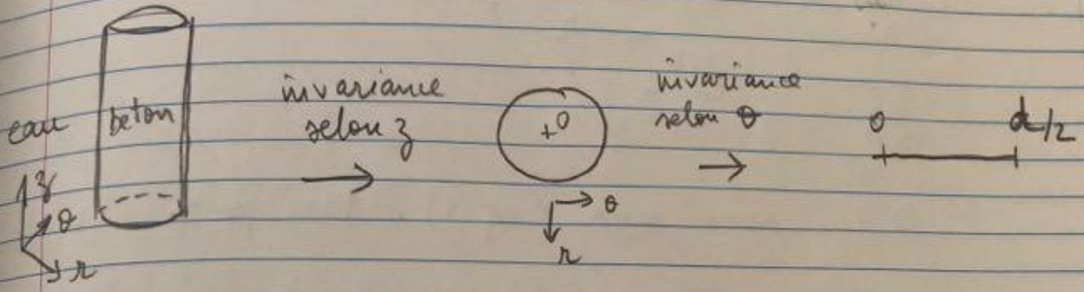
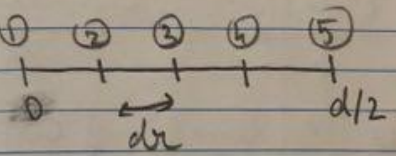
A) Eq(1) : $\frac{\partial c}{\partial t} = D_{eff} \nabla^2 c$

a. L'équation est parabolique et $D_{eff} = [\frac{m^2}{s}]$

b. On est en coordonnées cylindriques (r, θ, z)



c.



$dr = \frac{d/2}{5-1} = \frac{d}{8}$

d. i en $r=0$ symétrie $\Rightarrow$ $\left.\frac{dc}{dr}\right|_{r=0} = 0$, $\forall t$

en $r = \frac{d}{2}$ Dirichlet $\Rightarrow$ $c(r = \frac{d}{2}) = C_e$, $\forall t$

ii à $t=0$ $\quad c(t=0) = 0$, $\forall r$

L'équation devient $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial c}{\partial r}\right)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D_{ff}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}\right)}$$

B) Exprimons les approximations des dérivées partielles à l'aide des schémas de différences finies centrées d'ordre 2 :

a. $$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} = \frac{C_{i+1}^t - 2C_i^t + C_{i-1}^t}{dr^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{C_{i+1}^t - C_{i-1}^t}{2\,dr}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_i^{t+dt} - C_i^t}{dt}$$

Ce qui donne pour l'eq (1) : $\forall$ i pour $i = \{2, 3, 4\}$

$$\frac{C_i^{t+dt} - C_i^t}{dt} = D_{eff}\left(\frac{1}{r_i}\,\frac{C_{i+1}^t - C_{i-1}^t}{2\,dr} + \frac{C_{i+1}^t - 2C_i^t + C_{i-1}^t}{dr^2}\right)$$

$$C_i^{t+dt} = C_i^t + dt\,D_{eff}\left(\frac{1}{r_i}\,\frac{C_{i+1}^t - C_{i-1}^t}{2\,dr} + \frac{C_{i+1}^t - 2C_i^t + C_{i-1}^t}{dr^2}\right)$$

$$C_i^{t+dt} = \left(1 - 2\,\frac{dt\,D_{eff}}{dr^2}\right)C_i^t + dt\,D_{eff}\left(\frac{1}{r_i}\,\frac{C_{i+1}^t - C_{i-1}^t}{2\,dr} + \frac{C_{i+1}^t + C_{i-1}^t}{dr^2}\right)$$

pour $i = 1$ $$C_1^{t+dt} = \frac{4\,C_2^{t+dt} - C_3^{t+dt}}{3}$$

pour $i = 5$ $$C_5^{t+dt} = C_e$$

b. i On part des conditions initiales $C_i^0 = 0 \quad \forall i$

ii $t \in t + dt$ On calcule C_1^{t+dt}

iii On calcule C_5^{t+dt} pour $i = \{2,3,4,5\}$

iv On revient en ii

c. Le schéma est d'ordre 2 en espace et 1 en temp.

d. Le schéma est stable ssi :

$$1 - 2\,D_{eff}\,\frac{dt}{dr^2} > -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{dt < \frac{dr^2}{D_{eff}}}$$

c) En régime stationnaire $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ Eq (1) devient $\quad 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \quad i = \{2,3,4\}$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{dr^2} - \frac{1}{2\,dr\,r_i}\right)}_{A_i} C_{i-1} - \underbrace{\frac{2}{dr^2}}_{B} C_i + \underbrace{\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2\,dr\,r_i}\right)}_{C_i} C_{i+1} = 0$$

en $i = 1$ $\quad -C_3 + 4C_2 - 3C_1 = 0 \qquad r_i = (i-1)\,dr$

en $i = 5$ $\quad C_5 = C_e$

On résout donc : par une méthode de Cramer par exemple

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ A_1 & B & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & B & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D) En B) le critère de stabilité est $dt < \frac{dr^2}{Deff}$

En C) il n'y a pas de critère de stabilité

E) En $i = 5$ on remplace $C_5 = Ce$

par $Deff \frac{\partial C}{\partial r} = k_n (C_0 - C)$

$$\frac{-C_3 + 4C_4 - 3C_5}{2dr} = \frac{k_n}{Deff}(C_0 - C_5)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ A_1 & B & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & B & C_3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & Y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2dr\,k_n}{Deff} C_0 \end{bmatrix}$$

$$Y = -3 + \frac{2dr\,k_n}{Deff}$$