



Section 7 : Fatigue

Contenu

- Motivation: conception en fatigue
- Caractérisation des matériaux sous chargement cyclique
 - Norme ASTM E-466
 - Définition de la courbe $S' - N$
- Calculs des facteurs de correction
- Caractéristique du chargement externe
 - Critère de Goodman modifié
 - Chargements combinés → contraintes de von Mises
- Cycles de chargement en fatigue (dommage cumulatif)
 - Loi de Miner

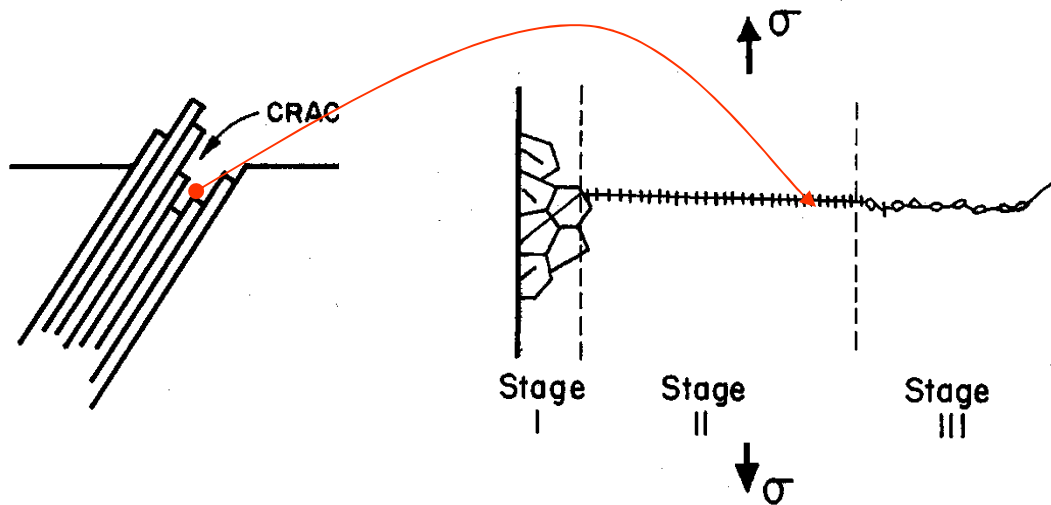


Motivation : conception en fatigue

- Pour la majorité des applications, les contraintes dans la structure varient dans le temps:
 - en intensité
 - en direction
- Rupture origine habituellement à la surface de la pièce
- Niveau de contrainte (S) qui cause la rupture en fatigue est très **souvent inférieur** à S_Y (matériaux ductiles)
- Rupture se produit sur des pièces après un certain temps de fonctionnement
 - N : nombre de cycle à la rupture

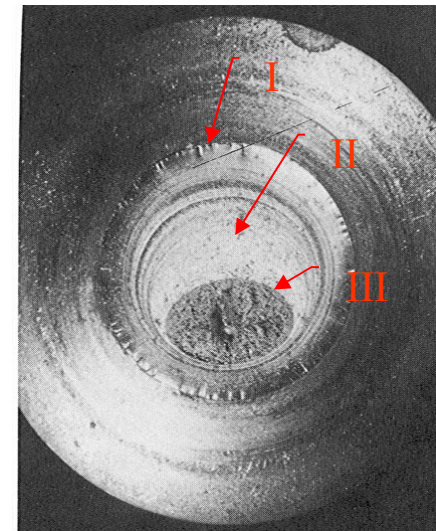
Mécanisme de rupture en fatigue

- Sous l'effet de contraintes cycliques, les **dislocations** glissent dans le réseau cristallin → formation d'intrusions et d'extrusions en surface et de micro-fissures.



Glissement des dislocations

Initiation (~90%) Propagation (~10%) Rupture finale (1 cycle)



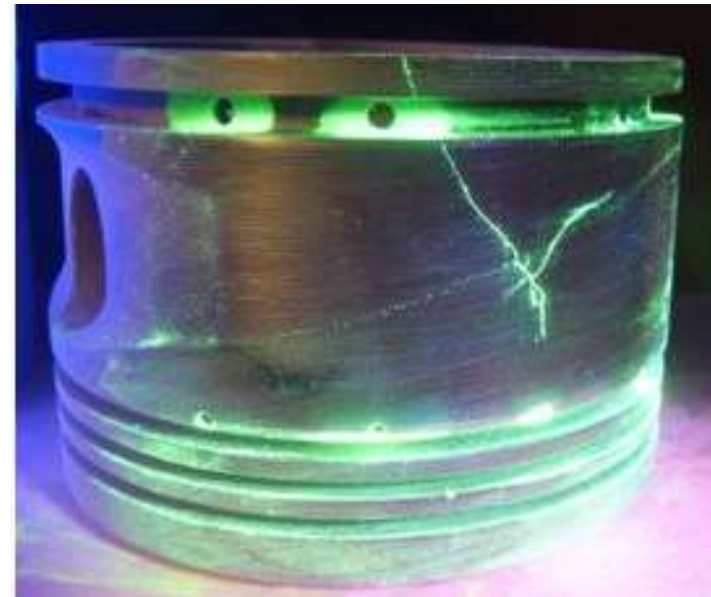
Faciès de rupture

Mécanisme de rupture en fatigue

Détection des fissures



Fissure sur un engrenage*



Fissures sur un piston révélées par un pénétrant fluorescent*

- Ressuage: méthode de contrôle non destructif qui va mettre en évidence les fissures par infiltration de liquide dans les métaux, céramiques et composites
- Autres méthodes: la radiographie, les ultrasons, les procédés à flux de fuite magnétique, etc.

Exemple: Conception en fatigue

Suspension d'un véhicule

Matériaux

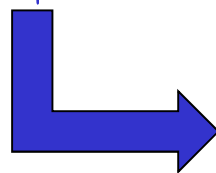
Propriétés statiques (S_Y, S_u)
Fatigue (courbe $S'-N$)

Structures

Géométrie
Conditions d'utilisation

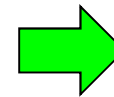
Chargements

Composantes alternées et moyennes
Analyse des contraintes



Analyse de dommage cumulatif

Loi de Miner

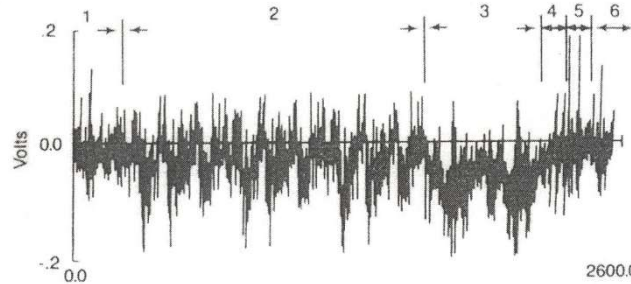


Prédire la durée de vie en fatigue

Exemple: Conception en fatigue

Suspension d'un véhicule

Chargement en fonction du temps
(mesuré par un accéléromètre ou jauge de déformation)



- 1...Empty Running Across Quarry
- 2...3 x Load and Dump Sequences
- 3...2 x Load Carrying Across Quarry Sequences
- 4...2 x Carrying Load Up Grade Sequences
- 5...2 x Carrying Load Down Grade with Severe Brake
- 6...Empty Running Across Quarry

Fig. 3-24 Sample of digitized load history.

Analyse de signaux
(séparation en cycle de chargement)

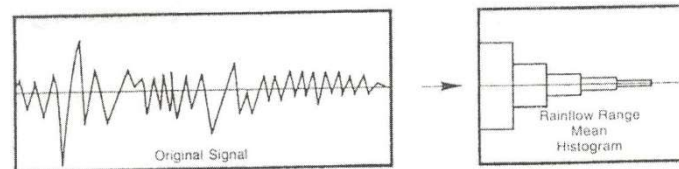


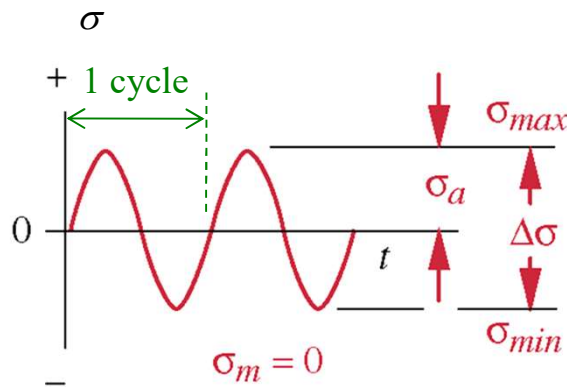
Fig. 5-22 Schematic representation of the process of summarizing a signal for fatigue life prediction.



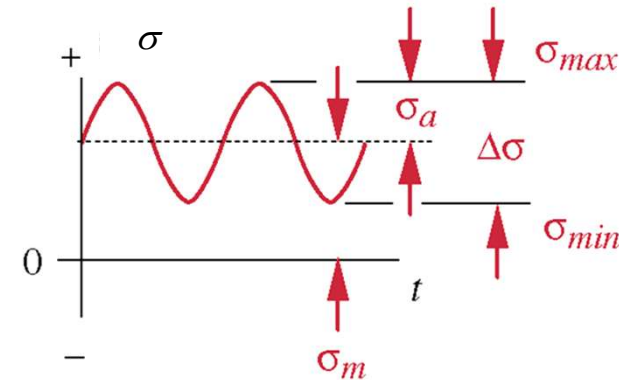
Suspension à poutre d'un véhicule
(carbible.com)

**Domage cumulatif
avec la loi de Miner**

Chargement dynamique (variable dans le temps)



Chargement complètement renversé*



Chargement quelconque

Contrainte moyenne

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

Contrainte alternée

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Rapport des contraintes

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)

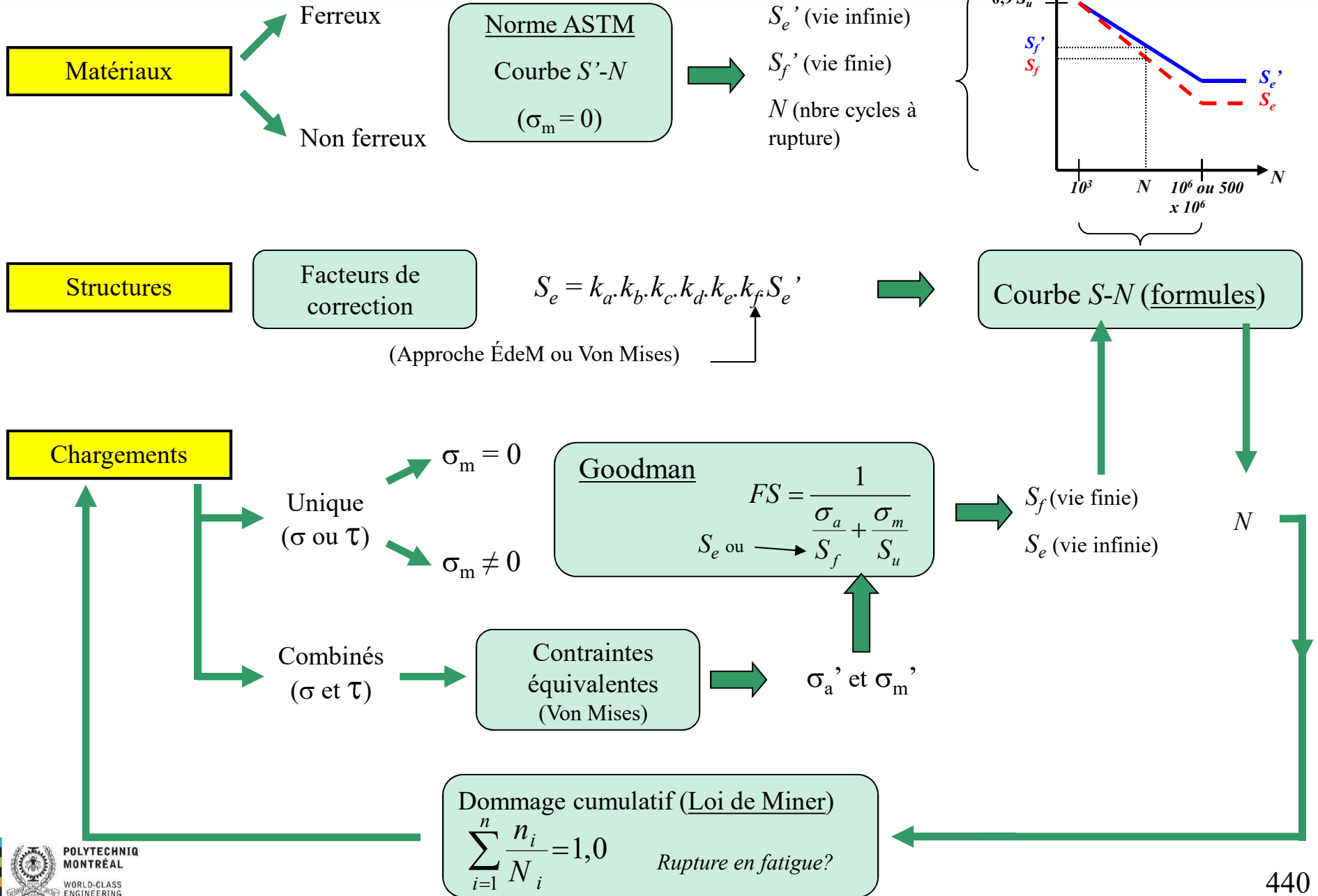
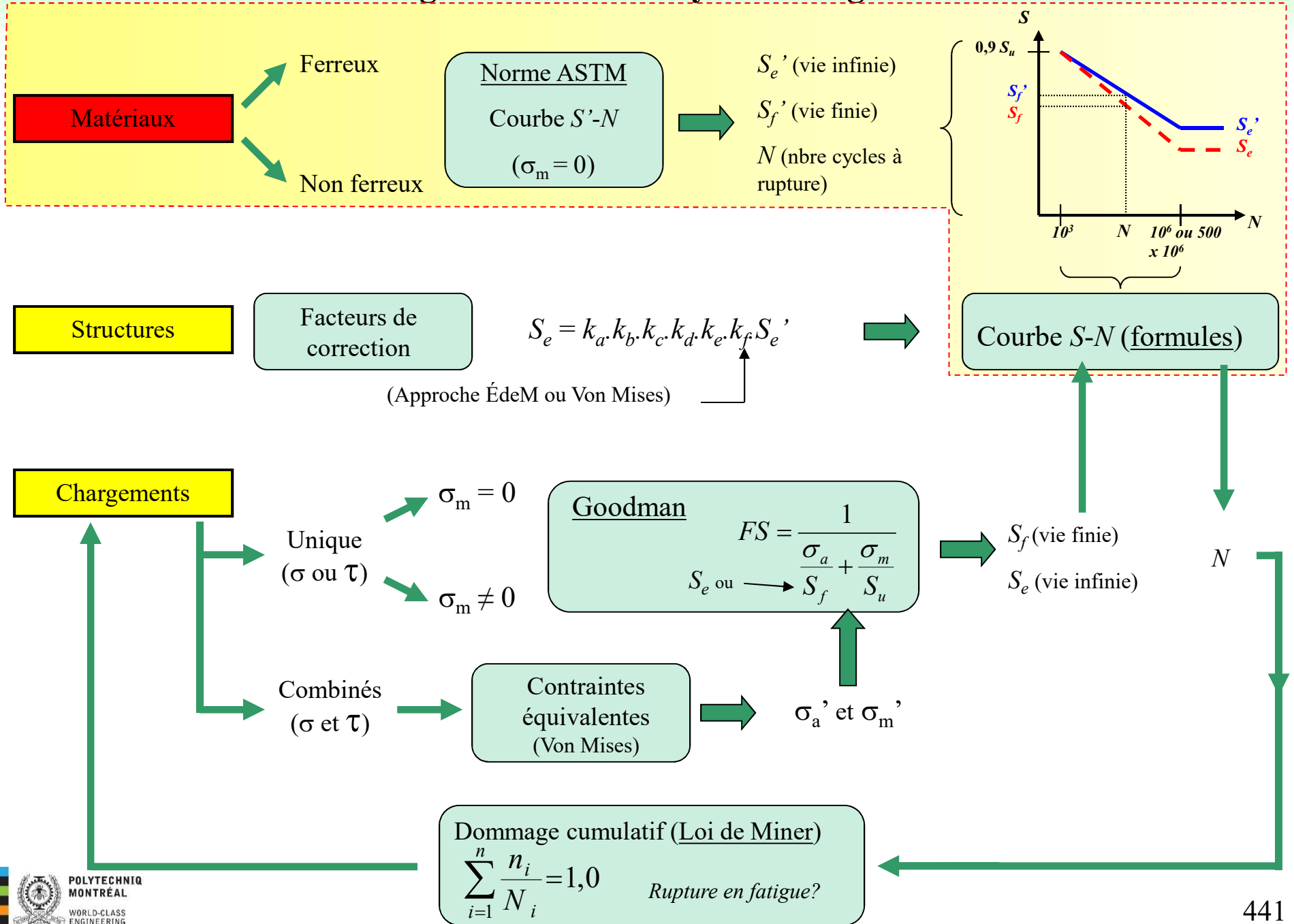


Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



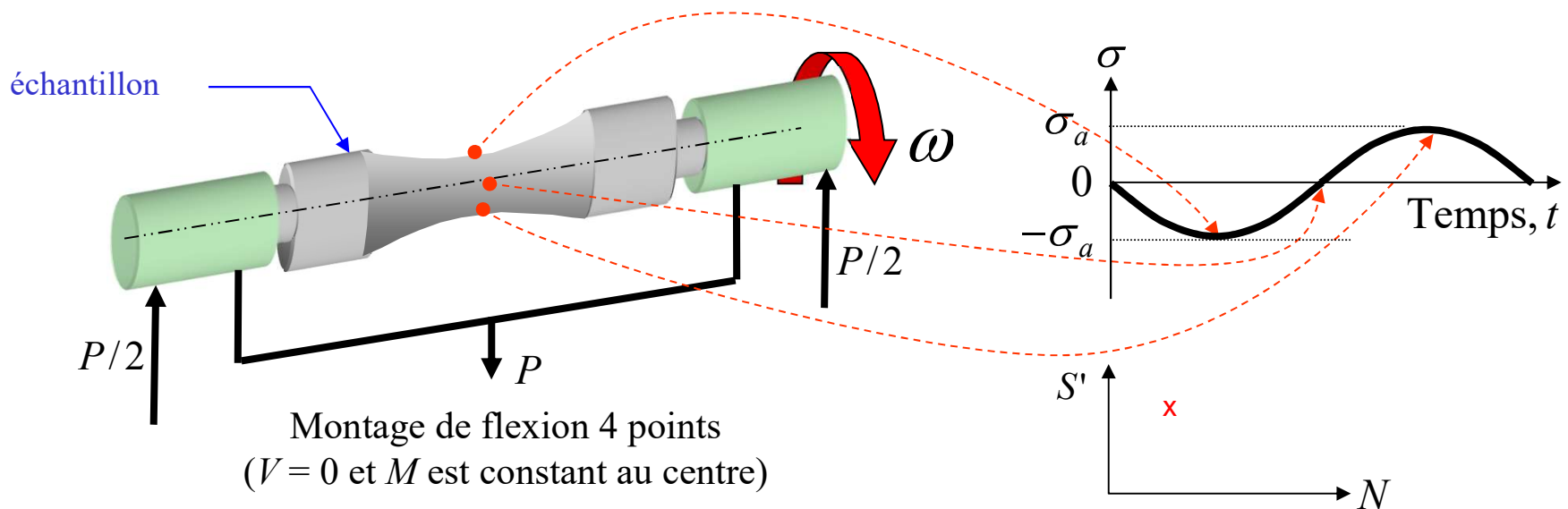


Introduction de la norme ASTM E-466

- American Society for Testing and Materials (ASTM)
- **Caractérisation des matériaux** en fatigue
 - Obtenir la courbe $S' - N$ du matériau (contrainte alternée pour un nombre de cycle à la rupture donné)
- Conditions normalisées
 - Chargement variable complètement renversé ($\sigma_m = 0$)
 - Contraintes normales seulement
 - Échantillon normalisé (fini de surface, dimensions)
 - Température ambiante ($T = 25^\circ\text{C}$)
 - Aucune concentration de contraintes

Introduction de la norme ASTM E-466

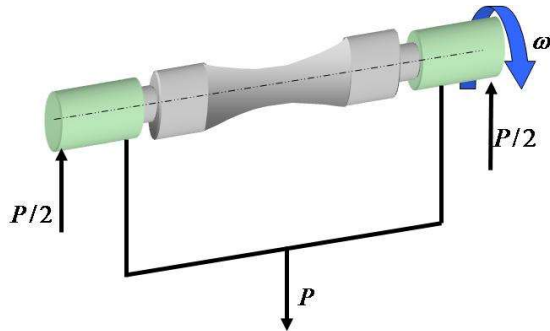
- Montage de flexion rotative (essais à haut cyclage)



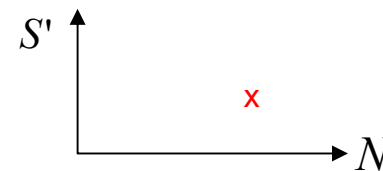
- Chargement variable **complètement renversé** de l'échantillon
- Permet d'accumuler un grand nombre de cycles rapidement
- Faire tourner jusqu'à rupture \rightarrow un point sur la **courbe $S' - N$**

Introduction de la norme ASTM E-466

- Avantage de la flexion rotative : accumuler un grand nombre de cycles en relativement peu de temps
 - En 24 heures, cette machine qui tourne à 10 000 tours/min, accumule 14,4 millions de cycles complètement renversés sur l'échantillon. Il lui faut 35 jours pour accumuler 500×10^6 cycles.
 - À 10 Hz, une machine de traction-compression mettrait 1,6 année pour accumuler 500×10^6 cycles

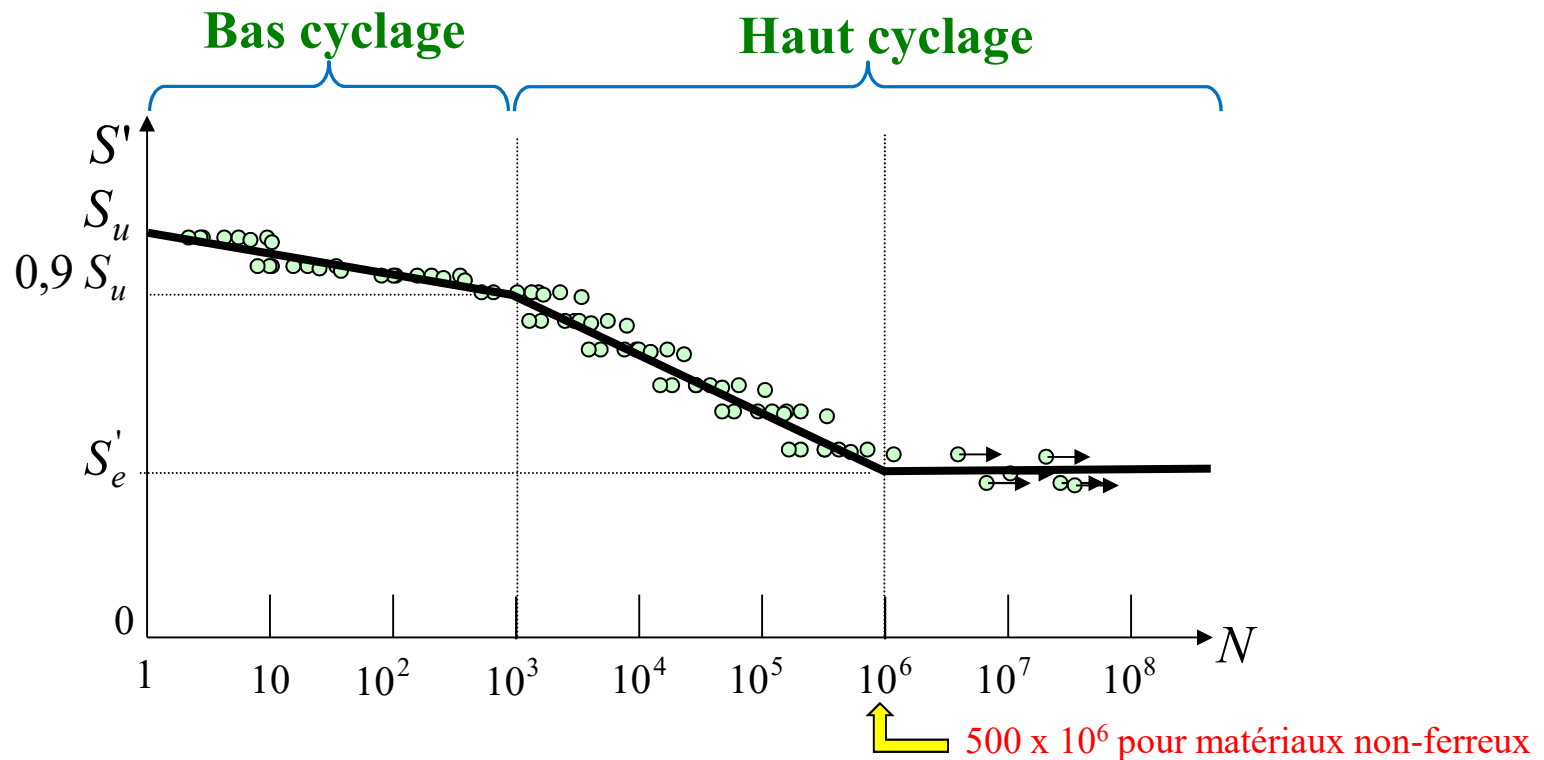


Flexion rotative



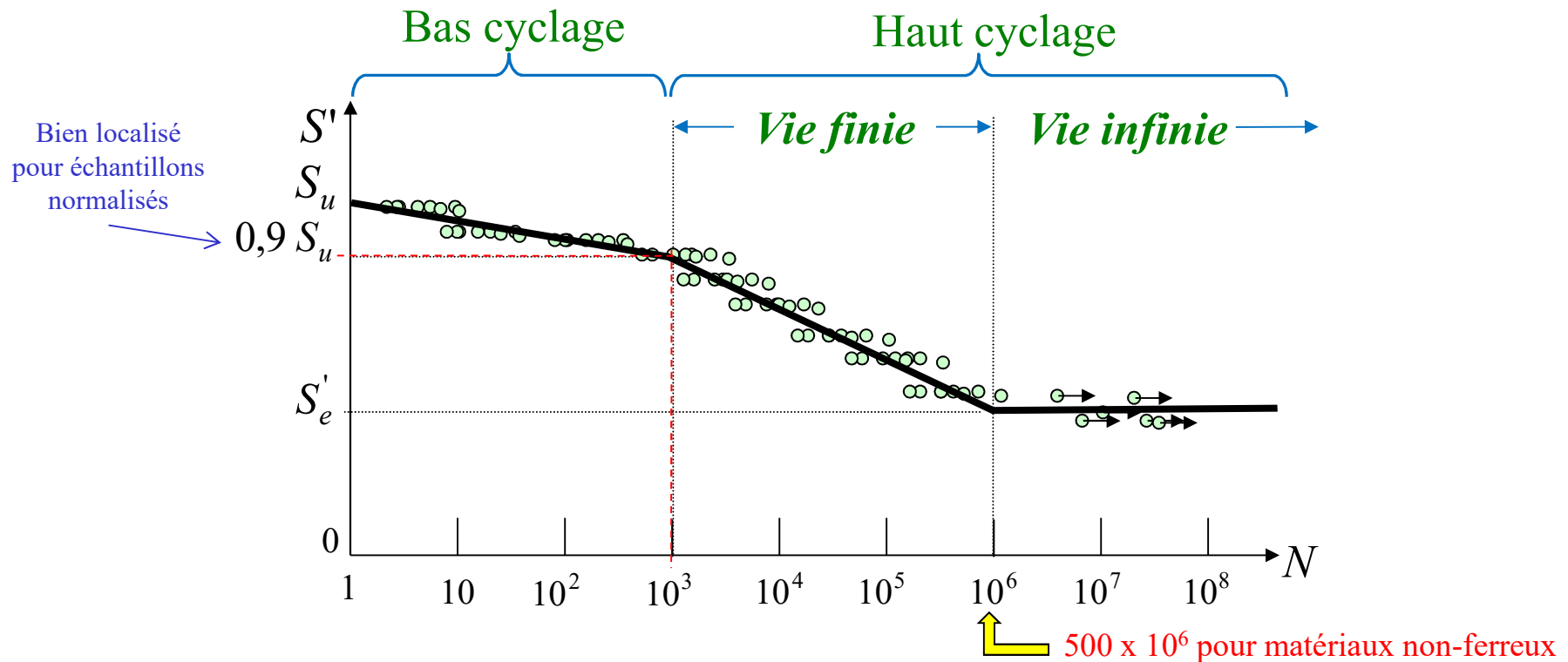
- Selon ces conditions, il faut 35 jours pour obtenir un seul point sur le diagramme $S' - N$
- Répéter l'essai à différents niveaux de contrainte

Courbe $S' - N$: matériaux ferreux et non-ferreux



- Deux zones: (1) **bas cyclage** ($< 10^3$ cycles) et (2) **haut cyclage** ($> 10^3$ cycles)
 1. La fatigue à bas cyclage implique des déformations plastiques et dépasse le cadre du cours

Courbe $S' - N$: matériaux ferreux et non-ferreux



– Deux zones: (1) bas cyclage ($< 10^3$ cycles) et (2) haut cyclage ($> 10^3$ cycles)

2. La fatigue à haut cyclage est distinguée par la

- **vie finie** (Ferreux: 10^3 à 10^6 cycles / Non-ferreux: 10^3 à 5×10^8 cycles)

- **vie infinie** (Ferreux: $> 10^6$ cycles / Non-ferreux: $> 5 \times 10^8$ cycles)

Courbe $S' - N$: matériaux ferreux et non-ferreux

- Deux types de comportement en fatigue:

- matériaux ferreux (ex. acier, fonte)
- matériaux non-ferreux (ex. aluminium, polymère)

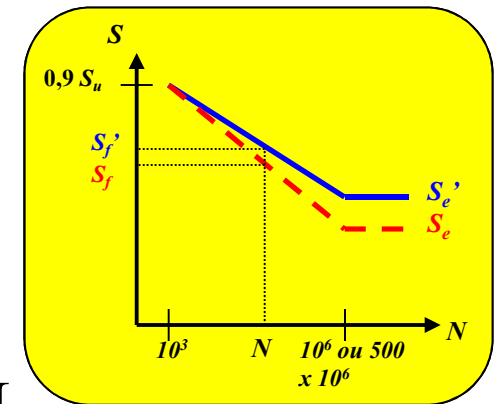
- S_f' : niveau de contrainte à une vie finie N

- S_e' : limite d'endurance

- Contrainte complètement renversée en dessous de laquelle il y a peu de chances d'observer une rupture en fatigue

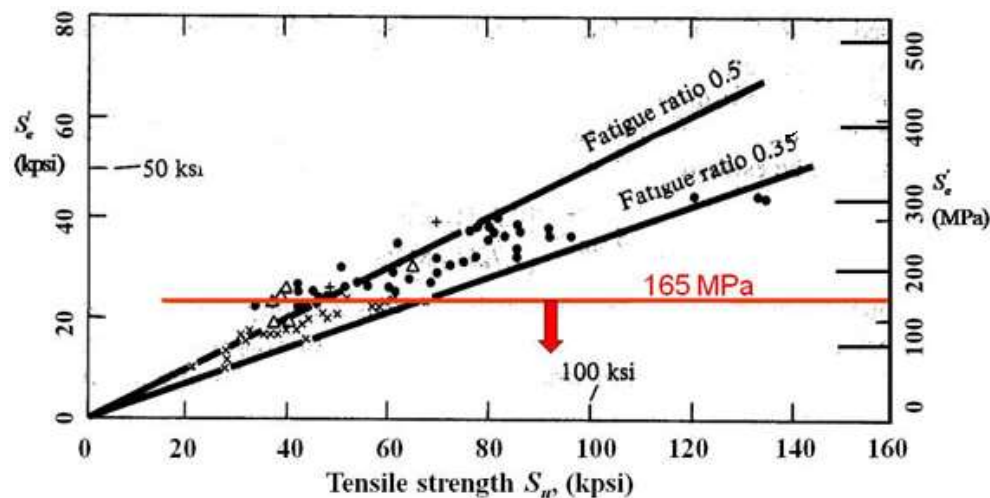
- Propriétés mécaniques de matériaux (ex. S_u , S_Y)

- « ' » symbolise valeurs mesurées sur **échantillons normalisés**



Courbe $S' - N$: matériaux ferreux et non-ferreux

- S_e' : limite d'endurance
 - Mesurée lors d'un l'essai en fatigue sur un échantillon normalisé (ex. fini de surface lisse, température ambiante)
 - Approche précise mais lente et dispendieuse
 - Approximée par la méthode de compilation
 - Valeur approximative mais rapide et économique



Exemple de l'approche par compilation pour la fonte:

Les valeurs mesurées de S_e' se situent entre 35 et 50% de la valeur de S_u (contrainte ultime)



Courbe $S' - N$: matériaux ferreux et non-ferreux

- S'_e : Résumé de l'approche par compilation
 - Matériaux ferreux

Acier au carbone et aciers alliés

$$0,35 S_u < S'_e < 0,60 S_u$$

$$S'_e \approx 0,5 S_u \text{ mais } S'_e < 700 \text{ MPa}$$

Fontes

$$0,35 S_u < S'_e < 0,50 S_u$$

$$S'_e \approx 0,40 S_u \text{ mais } S'_e < 165 \text{ MPa}$$

- Matériaux non-ferreux

Aluminium

$$0,35 S_u < S'_e < 0,50 S_u$$

$$\left. \begin{array}{l} S'_e \approx 0,40 S_u \text{ forgé, laminé, usiné} \\ S'_e \approx 0,30 S_u \text{ coulé} \end{array} \right\} \text{ mais } S'_e < 130 \text{ MPa}$$

Alliages de cuivre

$$0,35 S_u < S'_e < 0,50 S_u$$

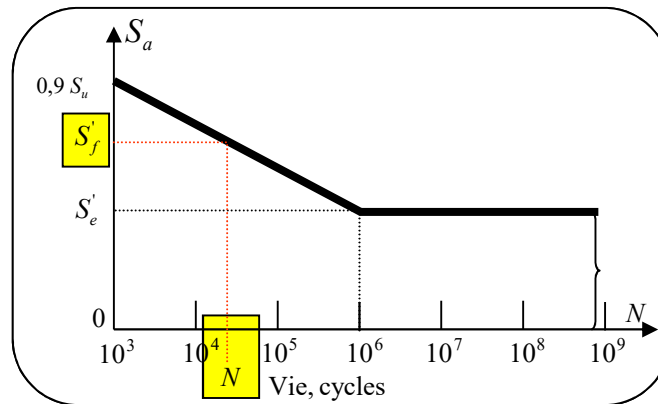
$$S'_e \approx 0,40 S_u \text{ mais } S'_e < 100 \text{ MPa}$$

Résumé des diagrammes $S'-N$

- Fatigue à bas cyclage de fatigue vs. haut cyclage ($>10^3$ cycles)
- Matériaux ferreux
 - Vie finie $< 10^6$ cycles
 - $S' = 0,9S_u$ à $N = 10^3$ cycles ; S_e' à $N = 10^6$ cycles
 - Vie infinie $> 10^6$ cycles
- Matériaux non ferreux
 - Vie finie $< 500 \times 10^6$ cycles
 - $S' = 0,9S_u$ à $N = 10^3$ cycles ; S_e' à $N = 500 \times 10^6$ cycles
 - Vie infinie $> 500 \times 10^6$ cycles

Courbe $S' - N$: matériaux ferreux

- Calculer



Ces équations sont obtenues à l'aide de la pente de la droite sur le graphique log-log dans le régime de vie finie

- le niveau de contrainte lorsqu'on connaît N

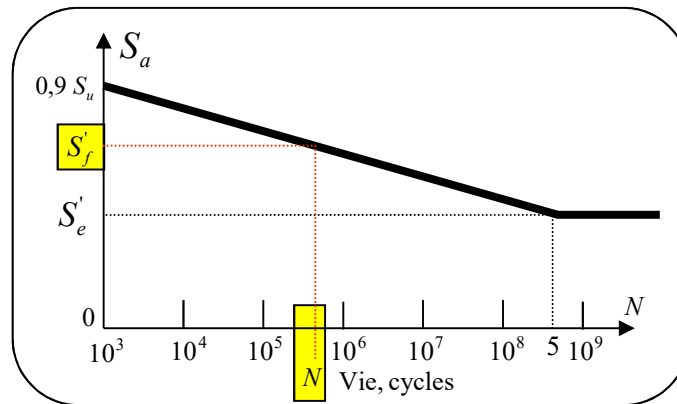
$$\log S'_f = \log \left[0,9 S_u \left(\frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)^{(1/3)(\log N - 3)} \right] \quad S'_f = 0,9 S_u \left(\frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)^{(1/3)(\log N - 3)}$$

- le nombre de cycle à la rupture lorsqu'on connaît S'_f

$$\log N = 3 \left[1 + \frac{\log \left(\frac{S'_f}{0,9 S_u} \right)}{\log \left(\frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)} \right] \quad N = 10^3 \left(\frac{S'_f}{0,9 S_u} \right)^{\frac{3}{\log(S'_e/0,9 S_u)}}$$

Courbe $S' - N$: matériaux non-ferreux

- Calculer



Ces équations obtenues à l'aide de la pente de la droite sur le graphique log-log dans le régime de vie finie

- le niveau de contrainte lorsqu'on connaît N

$$\log S'_f = \log \left[0,9 S_u \left(\frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)^{\frac{(\log N - 3)}{5,7}} \right] \quad S'_f = 0,9 S_u \left(\frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)^{\frac{(\log N - 3)}{5,7}}$$

- le nombre de cycle à la rupture lorsqu'on connaît S'_f

$$\log N = 3 + 5,7 \frac{\log \left(\frac{S'_f}{0,9 S_u} \right)}{\log \left(\frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)} \quad N = 10^3 \left(\frac{S'_f}{0,9 S_u} \right)^{\frac{5,7}{\log(S'_e/0,9 S_u)}}$$



Facteurs de correction (S_e)

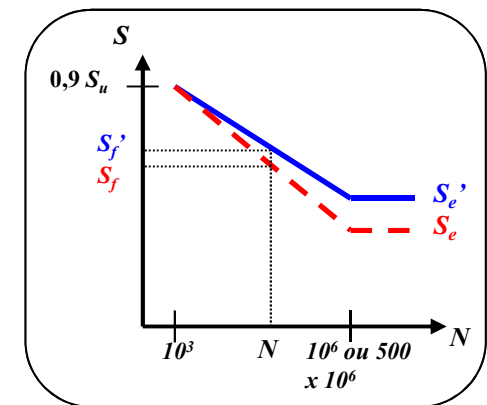
- La limite d'endurance obtenue avec un échantillon *normalisé* (S_e') en *dimensions* et en *fini de surface* dans un essai à amplitude de contrainte *complètement renversée* ne correspond pas nécessairement aux conditions de service de la structure à analyser
- En service :
 - la pièce n'a pas nécessairement le même fini de surface
 - la pièce n'a pas les mêmes dimensions
 - la valeur de la limite d'endurance varie autour d'une moyenne
 - la température peut différer de celle du laboratoire
 - il peut y avoir des concentrations de contraintes dans la pièce
 - le milieu dans lequel se trouve la pièce peut être corrosif ou agressif

Facteurs de correction (S_e)

La limite d'endurance *corrigée* se calcule :

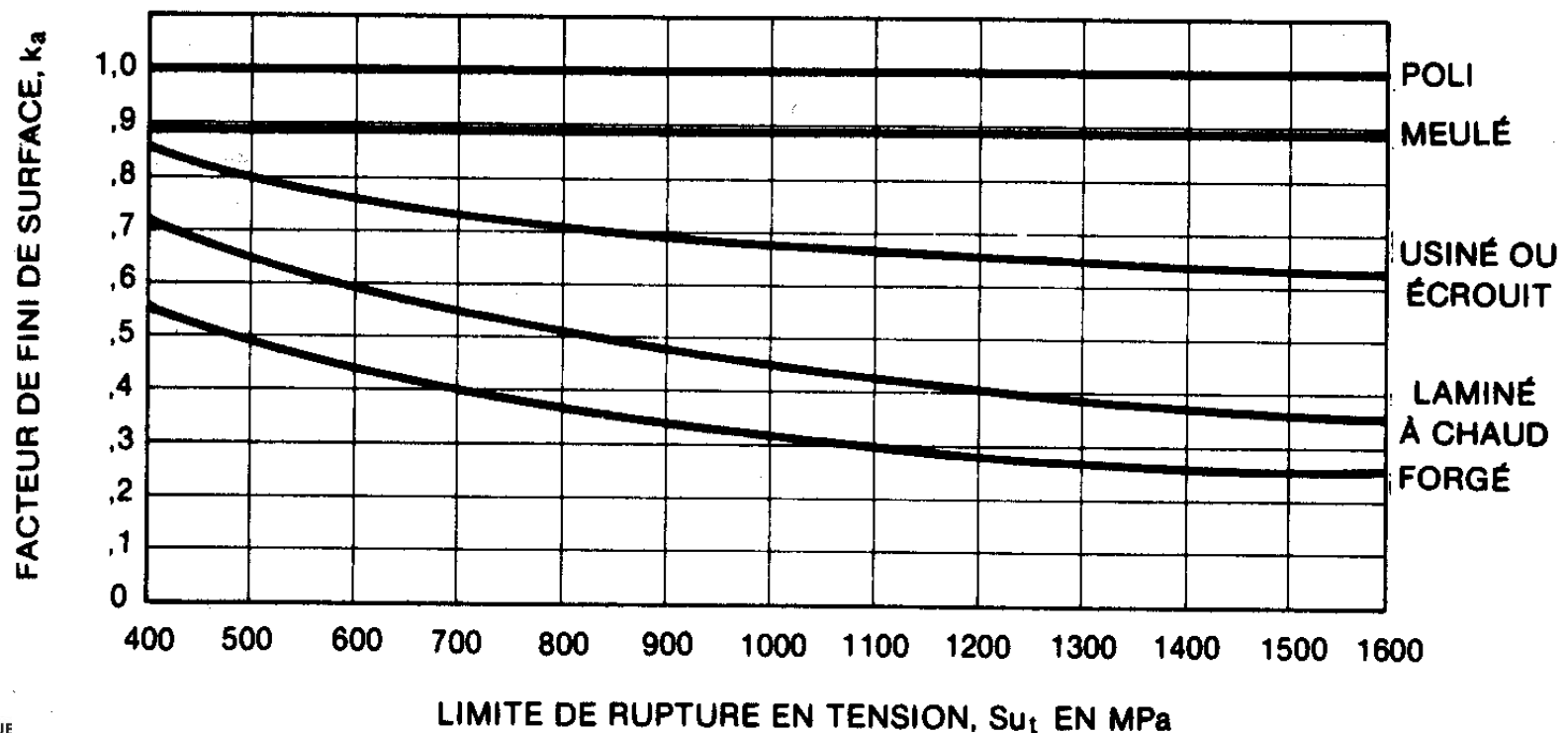
$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$$

- k_a = pour le fini de surface
- k_b = pour l'effet de grosseur
- k_c = pour la fiabilité, les limites de variation de S'_e
- k_d = pour l'effet de température
- k_e = pour l'effet des concentrations de contrainte
- k_f = pour des effets divers



Facteurs de correction (S_e)

- k_a : fini de surface
 - Un matériau plus résistant, moins ductile a plus de sensibilité à des défauts laissés en surface par le procédé de mise en forme.



Facteurs de correction (S_e)

- k_b : influence de la grosseur de la pièce
 - Statistiquement, un plus grand volume de matériau sous contrainte contient un plus grand nombre d'imperfections
 - Ces imperfections peuvent engendrer une microfissure et initier une rupture par fatigue
 - Pour les sections non-circulaires, il faut calculer un diamètre équivalent
 - Pour les sections circulaires:

Chargement axial

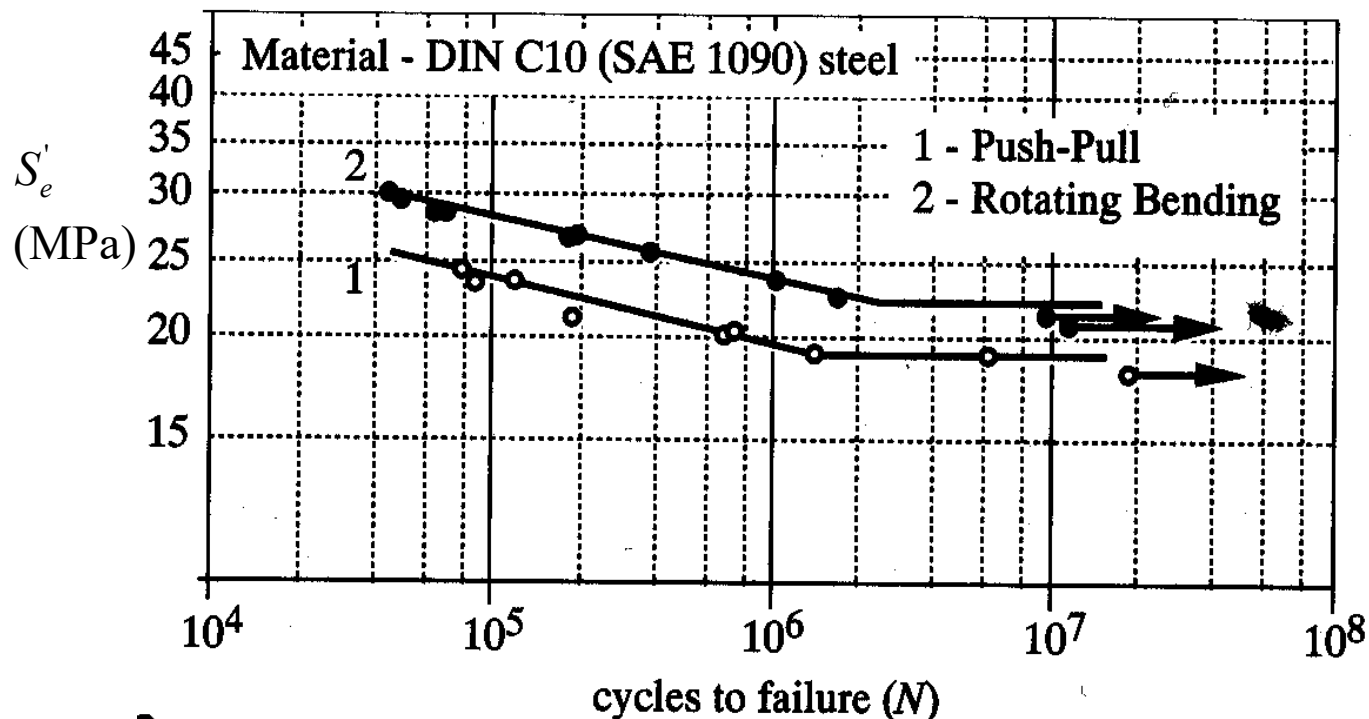
$$k_b = 1,0$$

Flexion et /ou torsion

$$k_b = \begin{cases} 1 & d \leq 7,6 \text{ mm} \\ 0,85 & 7,6 < d \leq 50 \text{ mm} \\ 0,75 & d > 50 \text{ mm} \end{cases}$$

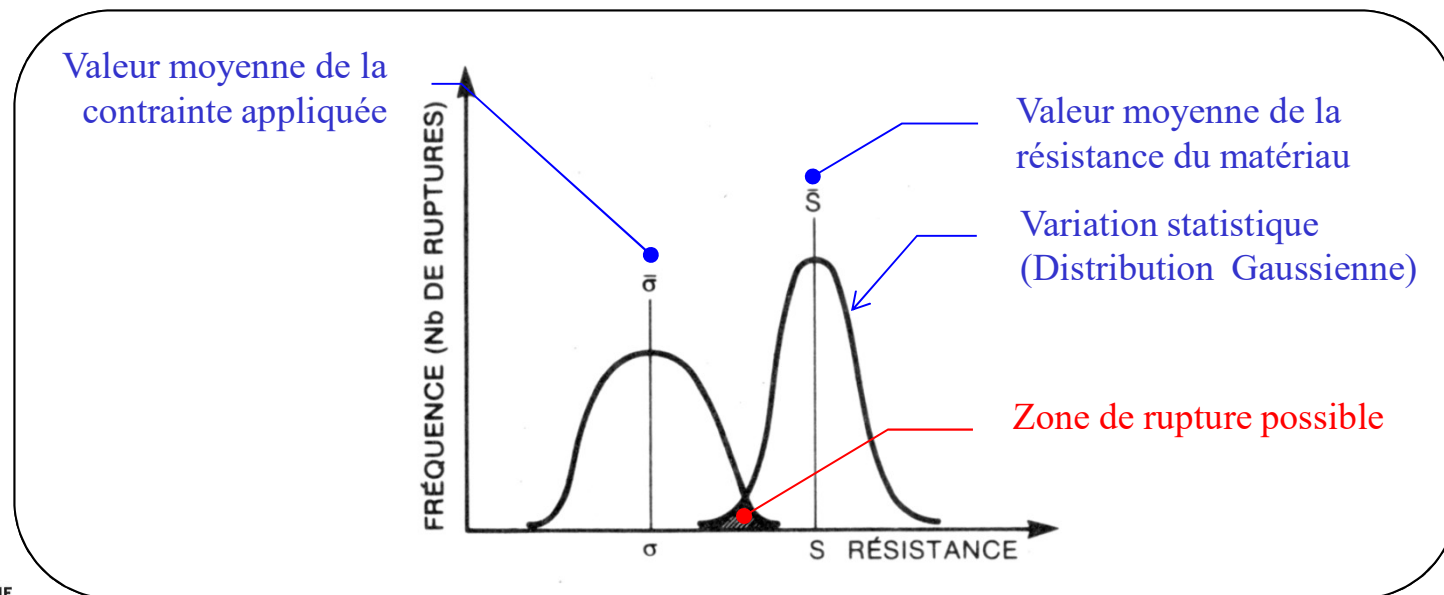
Facteurs de correction (S_e)

- k_b : influence de la grosseur de la pièce
 - Effet du type d'essai pour mesurer S_e' $(S_e')_{uniaxial} = 0,7 (S_e')_{flexion}$



Facteurs de correction (S_e)

- k_c : fiabilité
 - Modifier la valeur moyenne de S_e ' pour l'adapter à la fiabilité que l'on veut accorder au calcul de la pièce
 - Contrainte appliquée et la résistance du matériau varient selon une distribution Gaussienne



Facteurs de correction (S_e)

- k_c : fiabilité
 - Fiabilité = 50% lorsqu'on utilise valeur moyenne de S_e' ($k_c=1$)
 - On utilise une valeur plus petite de k_c pour augmenter la fiabilité en fatigue de la structure (voir tableau)

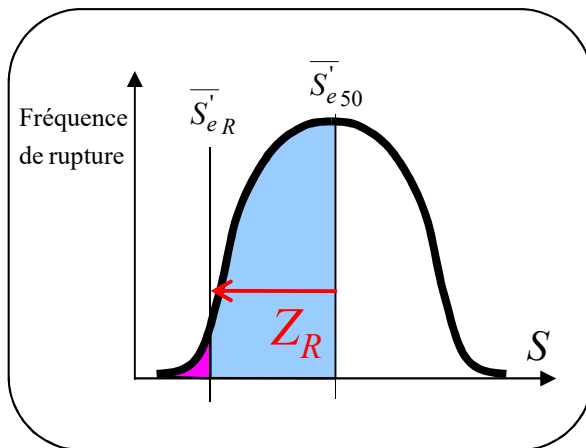


Tableau pour facteur k_c (Drouin et al.)

TABEAU 5.1

Fiabilité (R)	Variable normalisée (Z_R)	Facteur de fiabilité (k_c)
0,50	0	1,000
0,90	1,288	0,897
0,95	1,645	0,868
0,99	2,326	0,814
0,999	3,091	0,753
0,9999	3,719	0,702
0,99999	4,265	0,659
0,999999	4,753	0,620
0,9999999	5,199	0,584
0,99999999	5,612	0,551
0,999999999	5,997	0,520

Facteurs de correction (S_e)

- k_d : effet de la température
 - Effet de la température est très complexe. Les conséquences des températures élevées sont :
 - fluage (ex. déplacement des dislocations dans le réseau cristallin, amorce de micro fissures)
 - perte de rigidité à cause d'une chute du module d'Young
 - perte de dureté par réarrangement du réseau cristallin
 - perte de résistance ultime S_u ou d'écoulement S_Y

*Formule suggérée
pour évaluer l'effet
de la température*

$$k_d = \begin{cases} \frac{344}{273 + T} & \text{pour } T > 71^\circ C \\ 1,0 & \text{pour } T < 71^\circ C \end{cases}$$



Facteurs de correction (S_e)

- k_f : effets divers
 - Les effets divers comprennent :
 - les contraintes résiduelles
 - les milieux agressifs (ex. eau, acides, alcalins, radiations)
 - Ces effets doivent être étudiés cas par cas et ne seront pas traités ici (donc, $k_f = 1$ pour notre cours).

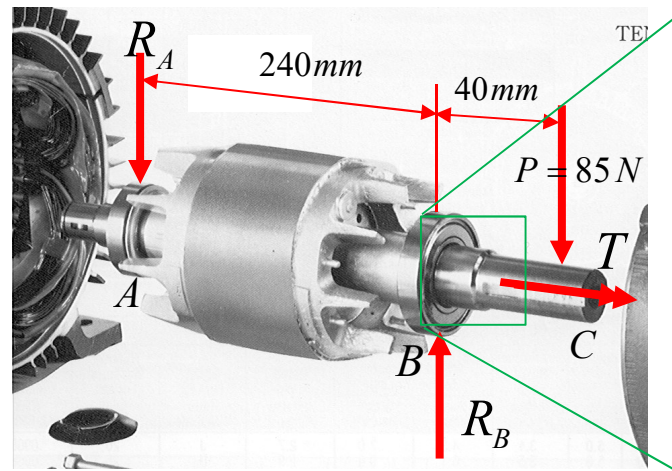
Exemple

Arbre du moteur d'une soufflante

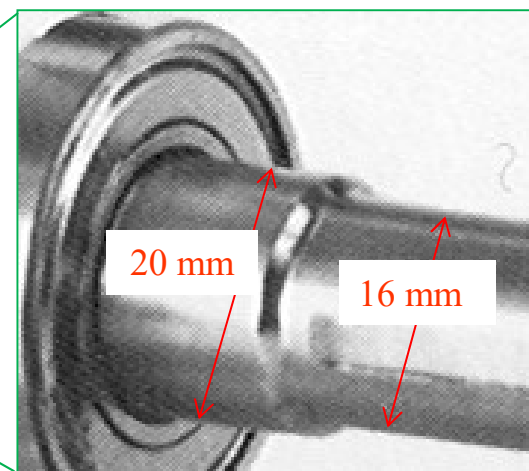
- L'arbre du moteur d'une soufflante est usiné dans un acier au carbone G10150, dureté $H_B = 111$ et pour lequel $S_Y = 190$ MPa et $S_u = 340$ MPa. Pour cette application, l'ingénieur juge qu'une fiabilité de 90% est adéquate. En opération, l'arbre peut atteindre une température de 80°C . Quelle est la valeur de S_e ?



Image de la soufflante



Arbre et chargement externe



Dimensions de l'arbre

Exemple

Arbre du moteur d'une soufflante

• Solution

- $S_e' = 0,5 S_u = 0,5 * 340 = 170 \text{ MPa}$ (selon l'approche par compilation)
- $k_a = 0,88$ (selon graphique p.467)
- $k_b = 0,85$ (selon formule p.468, chargement flexion et torsion)
- $k_c = 0,90$ (selon tableau p.471)
- $k_d = 344 / (273+80) = 0,975$ (selon formule p.472)
- $k_f = 1$ (selon p.473)

$$S_e = 0,88 \times 0,85 \times 0,90 \times 0,975 \times 1,0 \times 1,0 \times 170 = 111,6 \text{ MPa}$$

Par comparaison,
 $S_Y = 190 \text{ MPa}$

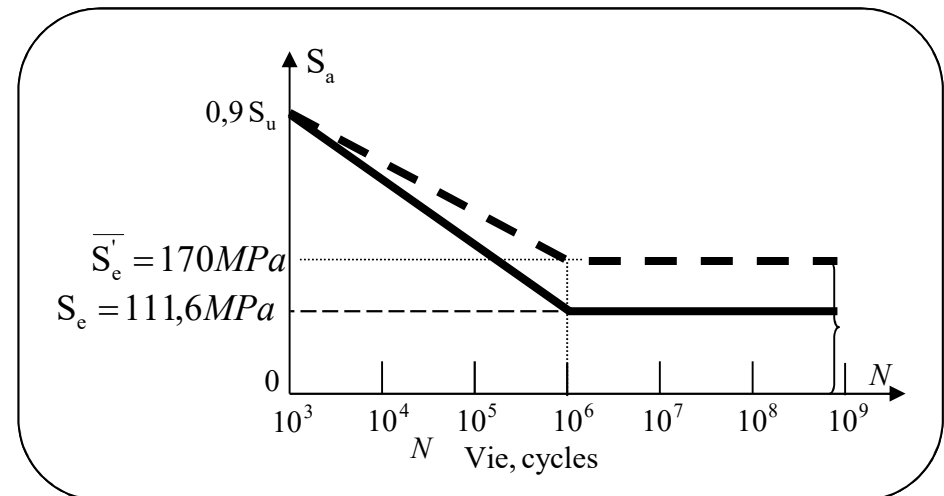
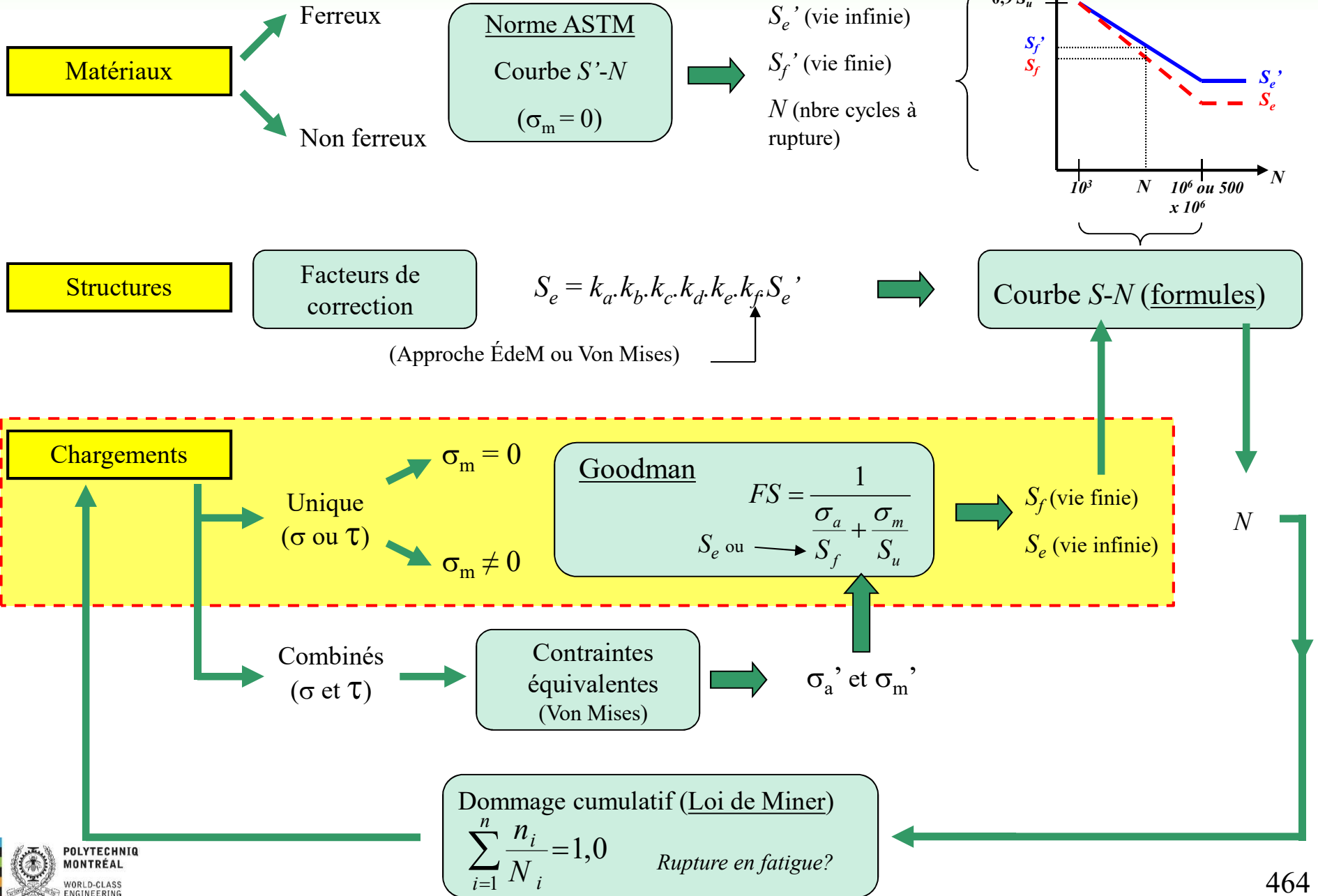


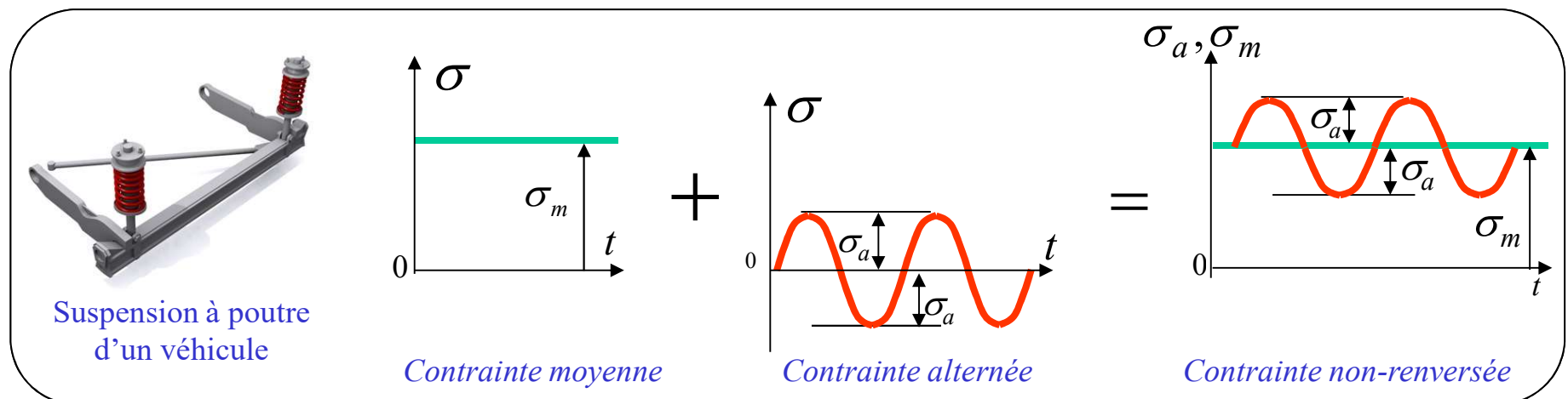
Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



Critère de Goodman: contrainte non-renversée

- La résistance en fatigue d'un échantillon normalisé est mesurée à l'aide d'un essai à amplitude de contrainte complètement renversée.
- Il est possible que la structure à étudier ne soit pas soumise à un chargement complètement renversé





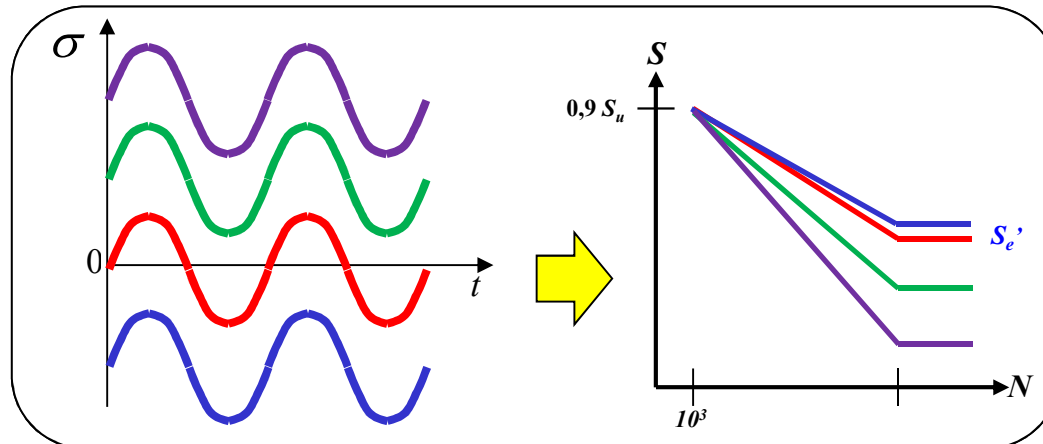
Critère de Goodman: contrainte non-renversée

- Deux cas extrêmes
 - Pour une **contrainte statique**, la rupture se produit à un cycle ($N = 1$) lors que la charge égale S_u
 - Pour une **contrainte variable complètement renversée**, la rupture se produit à N cycles en fonction de la charge appliquée S_f (vie finie) ou S_e (vie infinie)
- Que fait-on lorsque les deux composantes de la contrainte sont présentes?

Critère de Goodman: contrainte non-renversée

- Des essais expérimentaux ont démontré que la présence d'une contrainte moyenne superposée à une contrainte variable change la vie en fatigue du matériau
 - Si $\sigma_m > 0$, la vie en fatigue diminue
 - Si $\sigma_m < 0$, la vie en fatigue augmente
- Nous utiliserons l'approche conservatrice que le comportement en fatigue demeure le même lorsque $\sigma_m < 0$.

*Par rapport
à $\sigma_m = 0$*



Critère de Goodman: contrainte non-renversée

Approche pour obtenir le critère de Goodman

Courbes $S - N$ d'un aluminium pour différentes valeurs de σ_m



Courbes σ_a en fonction de σ_m à une vie constante



Normalisation de l'axe σ_a par rapport à S_f ou S_e

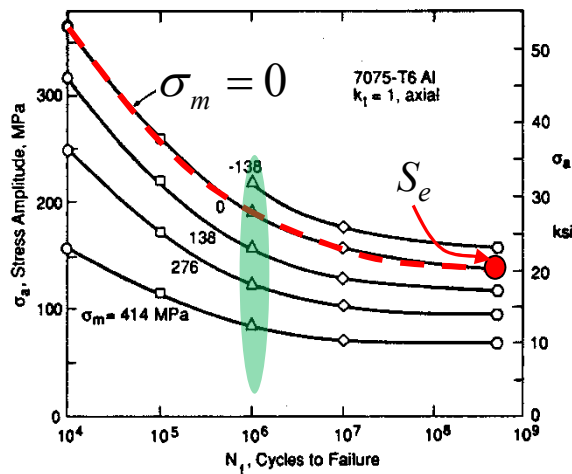


Figure 9.25 Axial loading $S-N$ curves at various mean stresses for unnotched specimens of an aluminum alloy. The curves connect average fatigue strength for a number of lots of material. (Data from [Howell 55].)

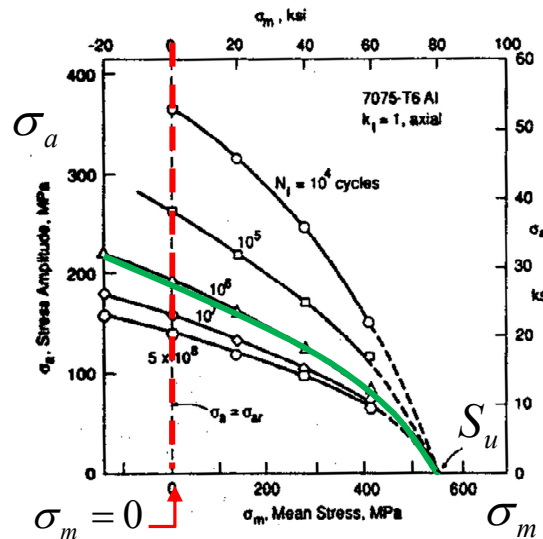


Figure 9.34 Constant-life diagram for 7075-T6 Al taken from the $S-N$ curves of Fig. 9.25.

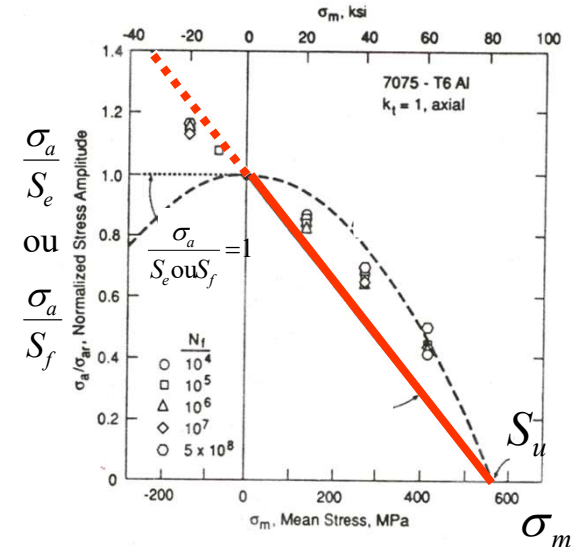


Figure 9.38 Normalized amplitude-mean diagram for 7075-T6 Al based Fig. 9.34.

$$\begin{aligned} \text{à } \sigma_a &= 0; \sigma_m = S_u \text{ et} \\ \text{à } \sigma_m &= 0; \sigma_a = S_f \text{ ou } S_e \end{aligned}$$

- Les valeurs normalisées se superposent
- Équation de la droite = critère de Goodman

Critère de Goodman: contrainte non-renversée

Approche pour obtenir le critère de Goodman

- Pour $\sigma_m > 0$, l'équation de la droite est

– Vie finie
$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

– Vie infinie
$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

- Pour $\sigma_m < 0$, on pose $\sigma_m = 0$ et l'équation du critère de rupture en fatigue devient

$$\frac{\sigma_a}{S_f} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} = 1$$

Normalisation de l'axe σ_a par rapport à S_f ou S_e

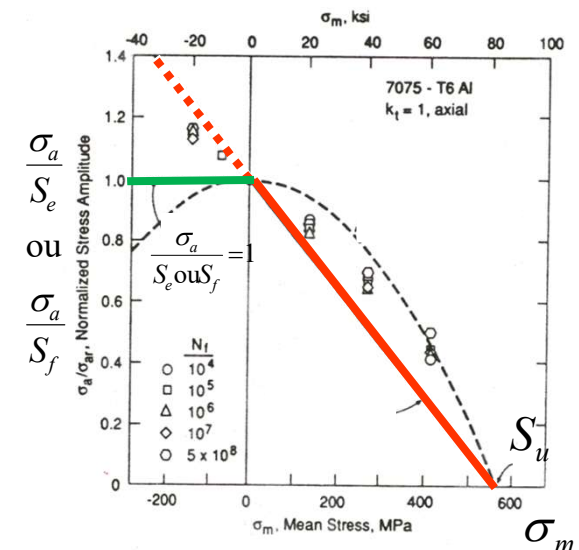
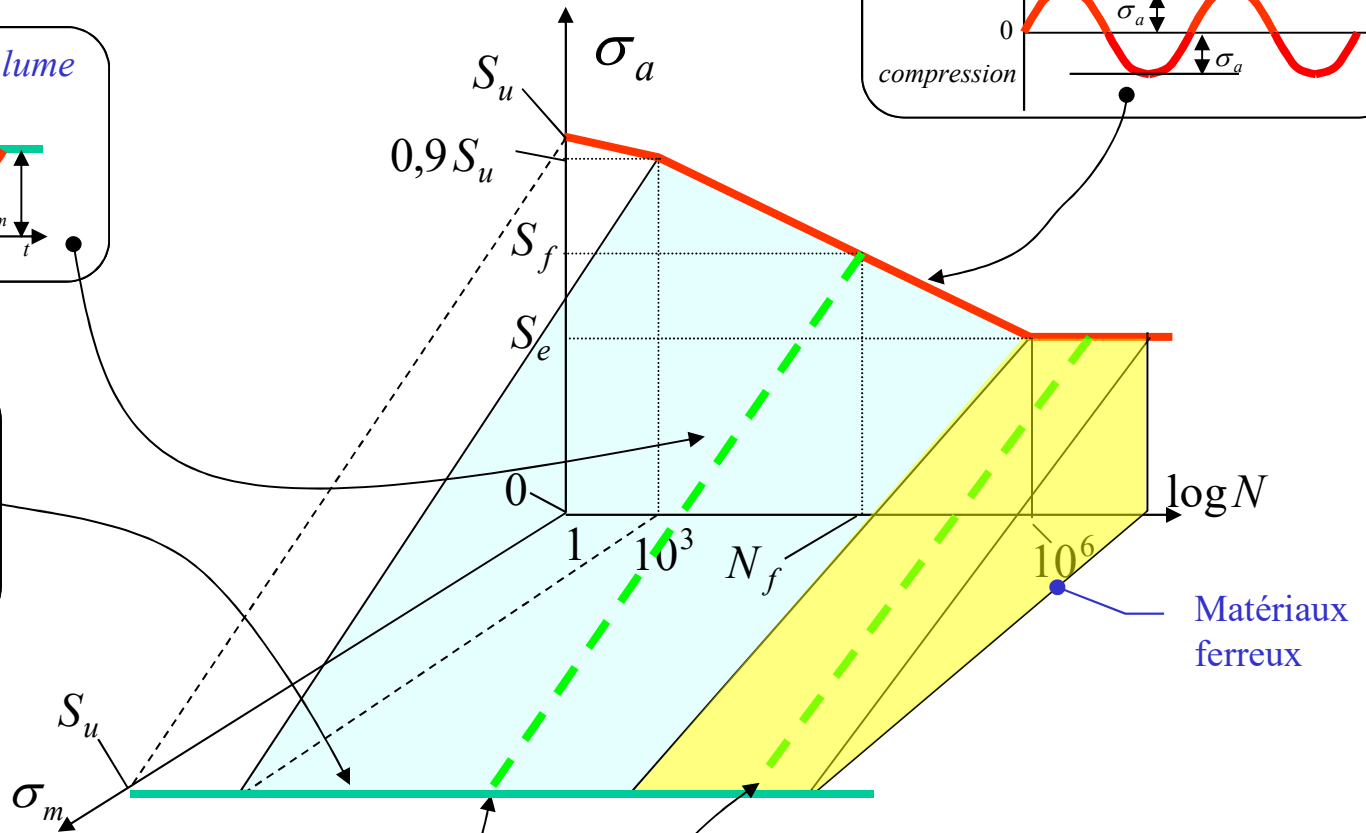
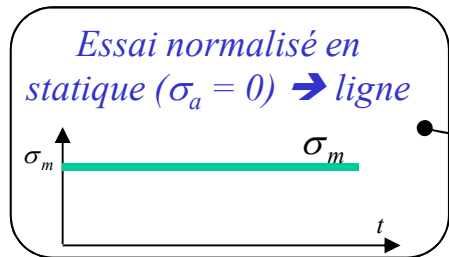
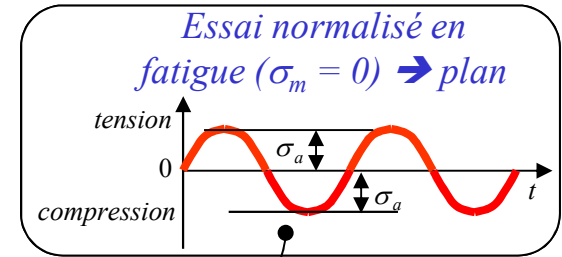
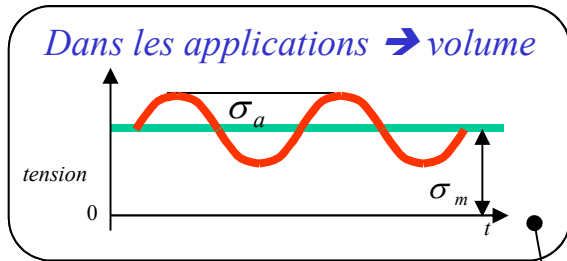


Figure 9.38 Normalized amplitude-mean diagram for 7075-T6 Al based Fig. 9.34.

- Les valeurs normalisées se superposent
- Équation de la droite = critère de Goodman

Résumé



Goodman (vie finie)

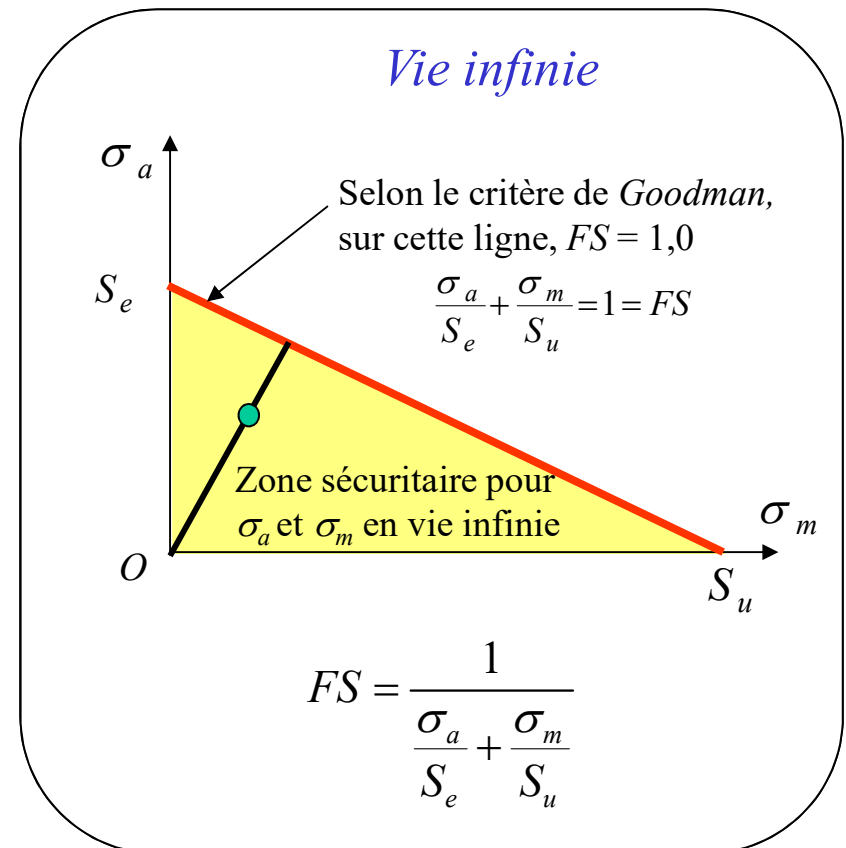
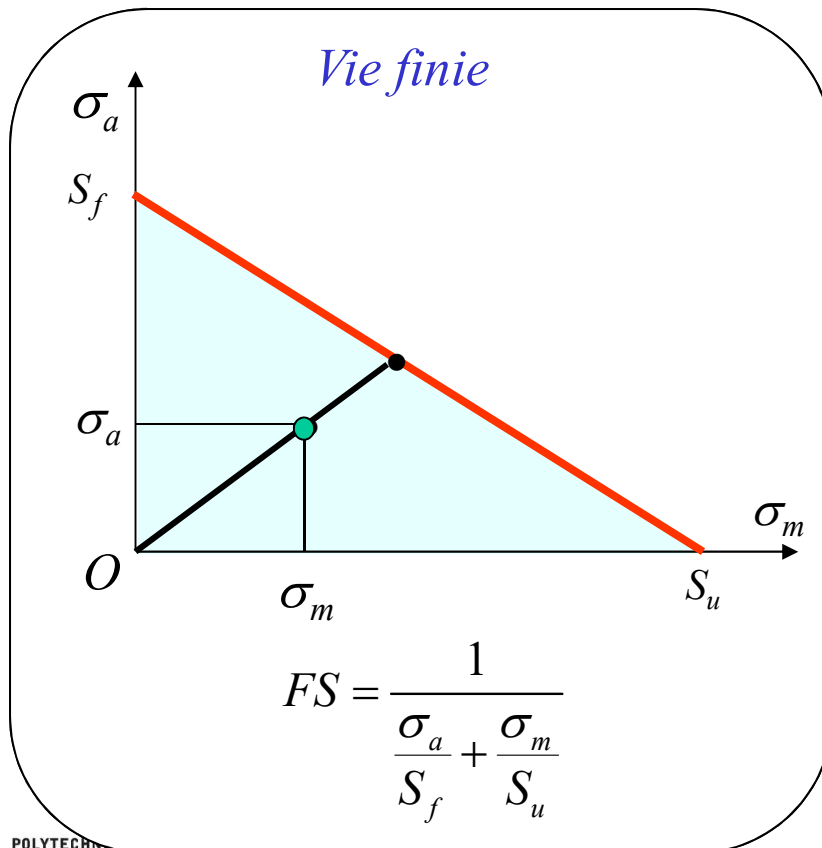
$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

Goodman (vie infinie)

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

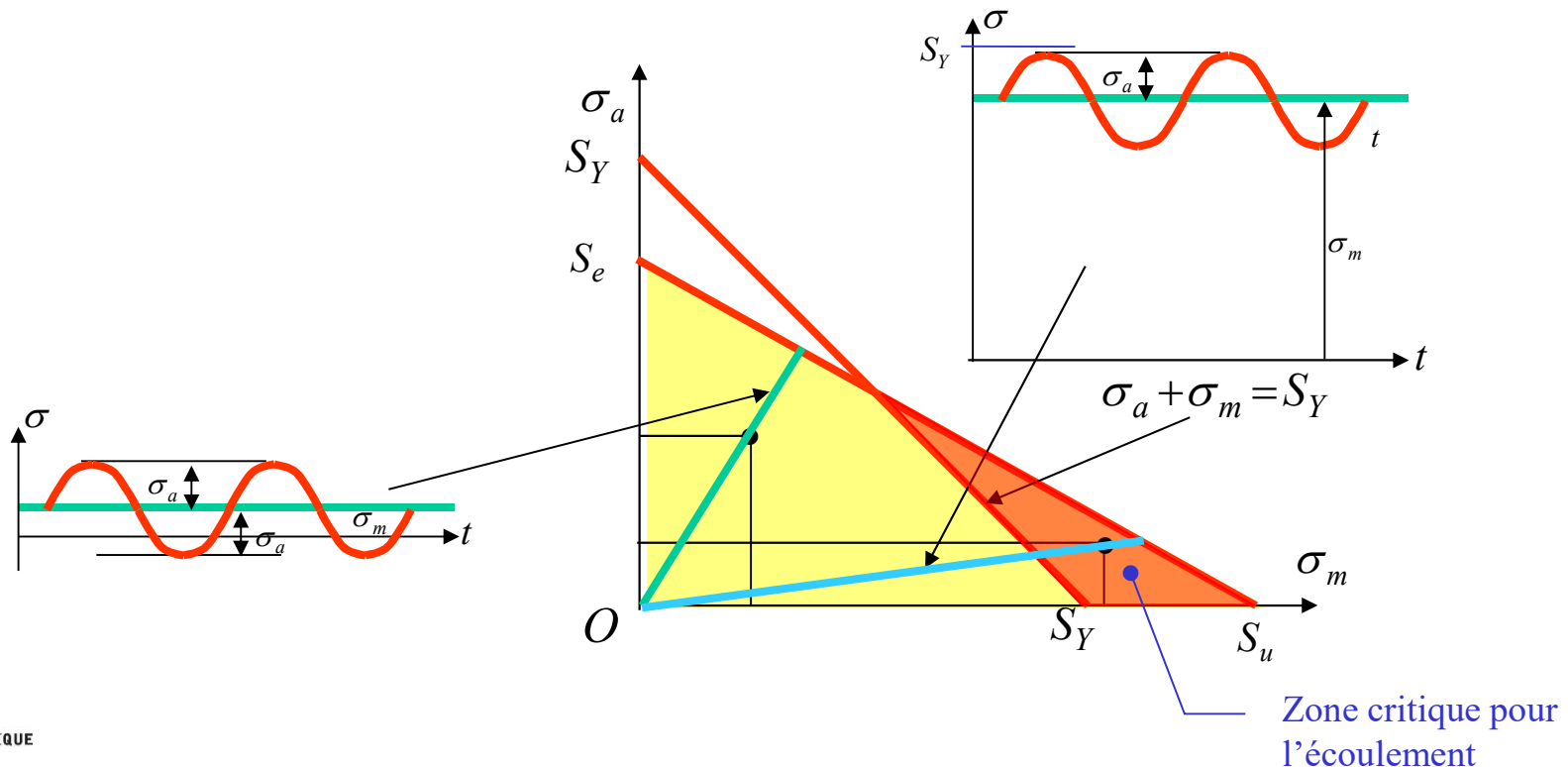
Critère de Goodman : contrainte non-renversée

- Application d'un **facteur de sécurité** sur le critère de défaillance de Goodman



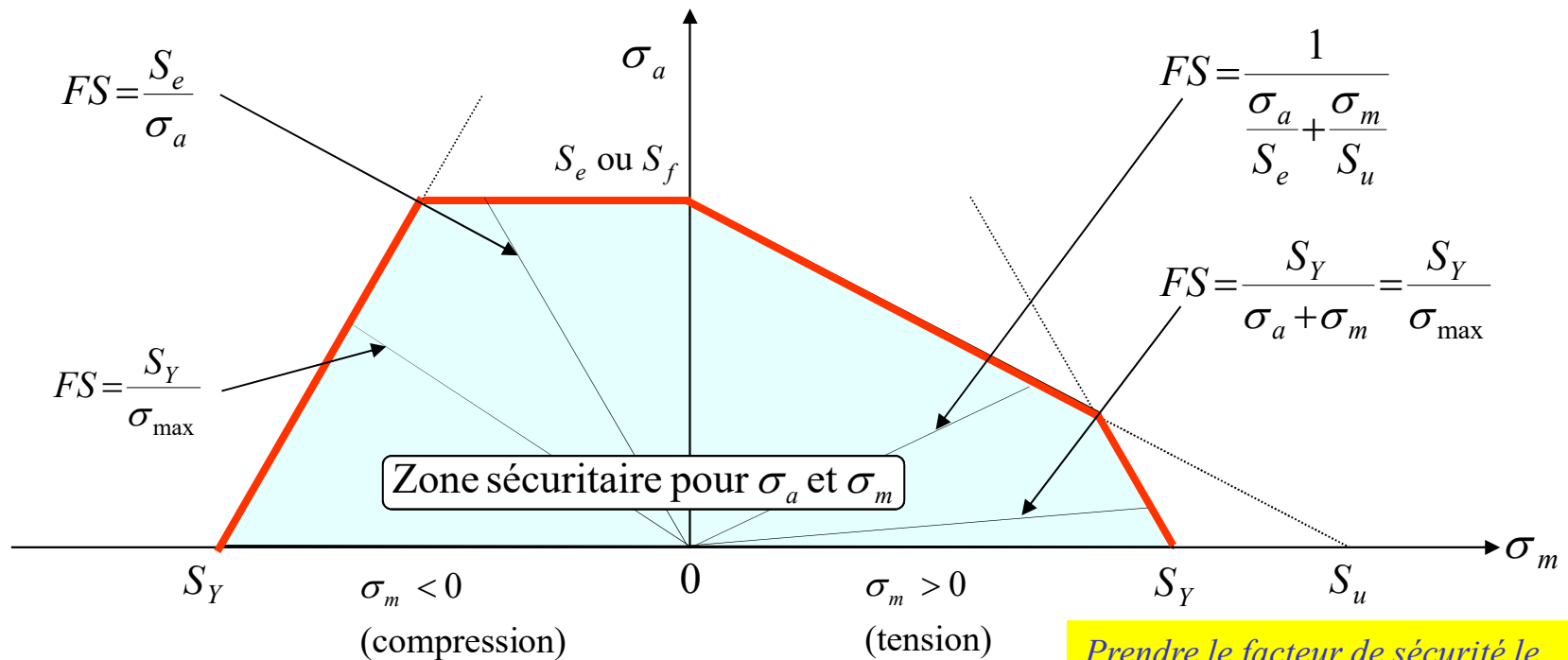
Critère de Goodman modifié

- Lorsque la contrainte alternée est faible et que la contrainte moyenne est élevée, le critère d'écoulement doit être vérifié
- Illustration pour la vie infinie avec $\sigma_m > 0$



Critère de Goodman modifié

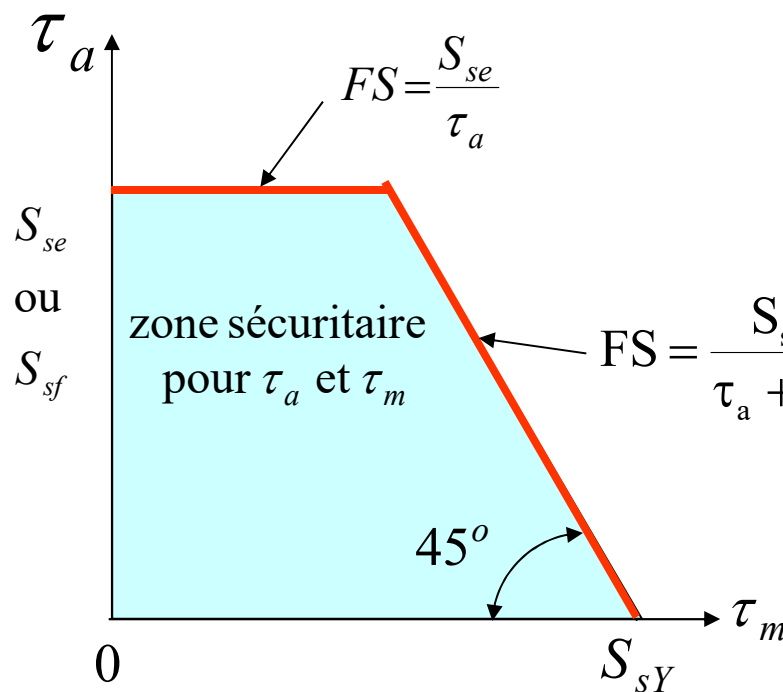
- Critère de défaillance de Goodman modifié pour les différentes combinaisons de σ_a et σ_m possibles



Prendre le facteur de sécurité le plus petit (fatigue vs. écoulement)

Critère de Goodman modifié

En **cisaillement**, le diagramme de *Goodman* modifié est:



En cisaillement, la contrainte moyenne n'a pas d'effet sur la résistance en fatigue du matériau

Vérifie l'écoulement avec τ_{max} à un instant donné

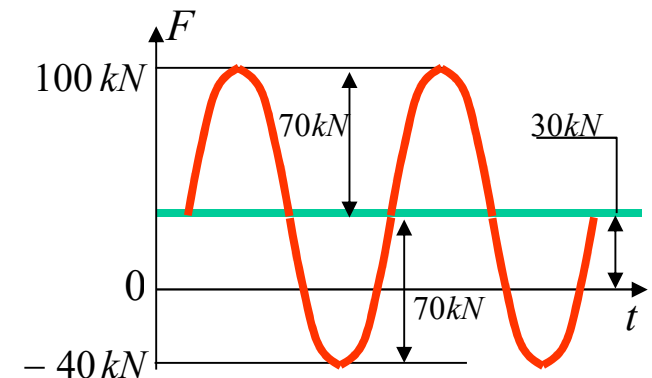
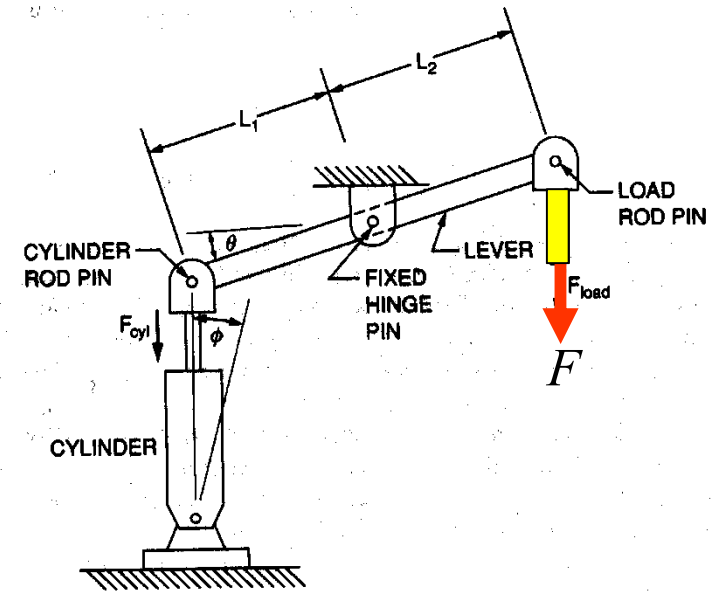
Le facteur de sécurité est le plus petit des deux calculés ci-dessus.

Problème :

Le mécanisme suivant sert à régler les aubes directrices dans une turbine hydroélectrique. La force F sur la tige (fini de surface = poli) du mécanisme varie de -40 kN à 100 kN dans le temps à la fréquence de 1 Hz . On veut que le mécanisme fonctionne 24 heures/jour, pendant au moins 5 ans avant faillite.

Tout le mécanisme est fabriqué en acier *inoxydable* S30400 pour lequel $S_u = 585 \text{ MPa}$ et $S_y = 240 \text{ MPa}$.

- Doit-on calculer ce mécanisme en vie finie ou infinie?
- On demande le diamètre d de la tige verticale pour une fiabilité de 99,9% et $FS = 2,5$.





Problème: diamètre de la tige

Solution

- À 1 Hz, les cycles en 5 ans = 157×10^6 cycles (**vie infinie**)
- Facteurs de correction
 - $k_a = 1,0$ fini poli miroir
 - $k_b = 1$ (chargement axial)
 - $k_c = 0,753$
 - $k_d = k_e = k_f = 1,0$
 - $S_e' = 0,5 S_u = 0,5 \times 585 = 292,5$ MPa
 - $S_e = 220,2$ MPa (diminution de 25% de la limite d'endurance)
- Chargement (en fonction de d en mm)

$$F_a = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} = \frac{100 - (-40)}{2} = 70 \text{ kN}$$



$$\sigma_a = \frac{4 F_a}{\pi d^2} = \frac{4 \times 70 \times 10^3}{\pi d^2} = \frac{89 \times 10^3}{d^2} \text{ MPa}$$

$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} = \frac{100 + (-40)}{2} = 30 \text{ kN}$$



$$\sigma_m = \frac{4 F_m}{\pi d^2} = \frac{4 \times 30 \times 10^3}{\pi d^2} = \frac{38,2 \times 10^3}{d^2} \text{ MPa}$$



Problème: diamètre de la tige

Solution (suite)

- Critère de Goodman

$$FS = 2,5 = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u}} = \frac{1}{\frac{89 \times 10^3}{220,2 d^2} + \frac{38,2 \times 10^3}{585 d^2}} \Rightarrow d = 34,25 \text{ mm}$$

- Vérifier l'écoulement (en statique)

$$FS = 2,5 = \frac{S_Y}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{240}{\frac{(89 + 38,2) \times 10^3}{d^2}} \Rightarrow d = 36,4 \text{ mm}$$

L'écoulement dicte le design de la tige

Problème:

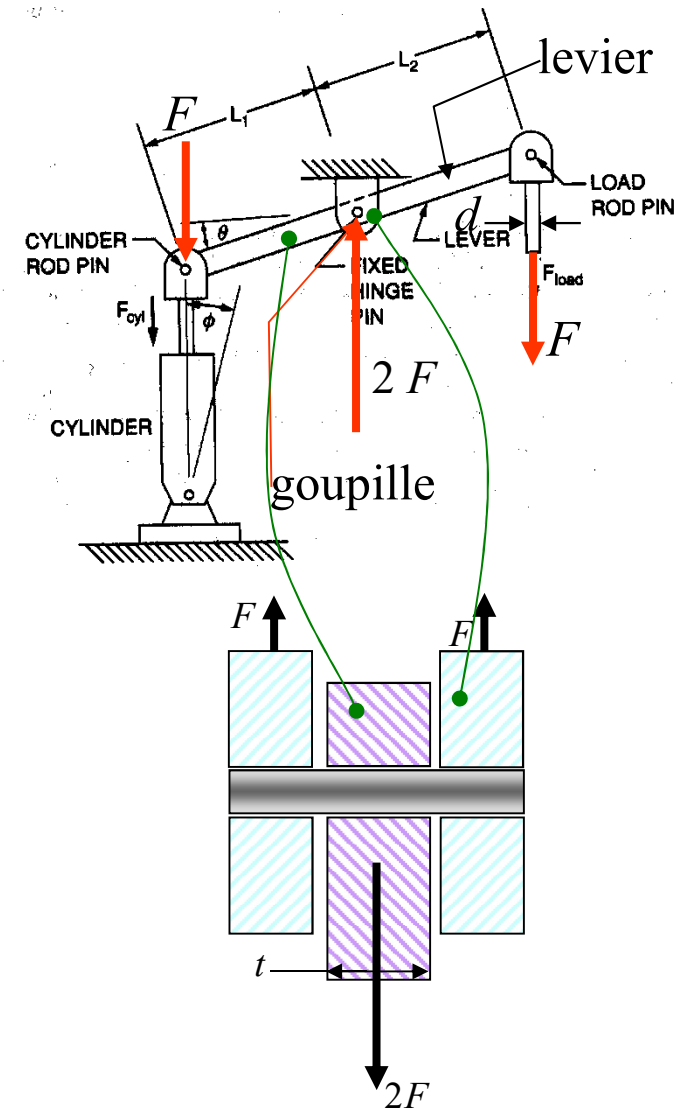
Si $L_1 = L_2$ sur le levier, la force sur la goupille au centre du levier vaut $2F = -80$ à 200 kN. Calculer le diamètre de la goupille au centre du levier.

Solution :

- Même matériau que la tige ($S_e = 165,2$ MPa)
- Limite d'endurance en cisaillement (selon Von Mises)

$$\bullet S_{se} = 0,577 S_e = 95,3 \text{ MPa et}$$

$$\bullet S_{sY} = 0,577 S_Y = 0,577 * 240 = 138,5 \text{ MPa}$$

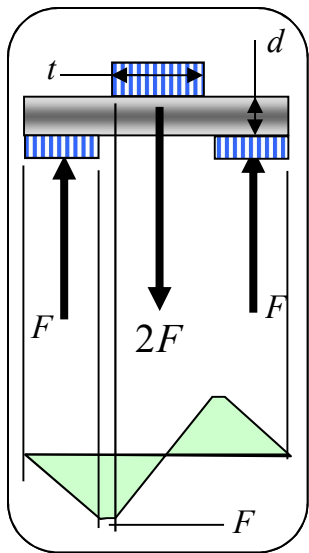


Problème: Calcul de la goupille

Solution (suite)

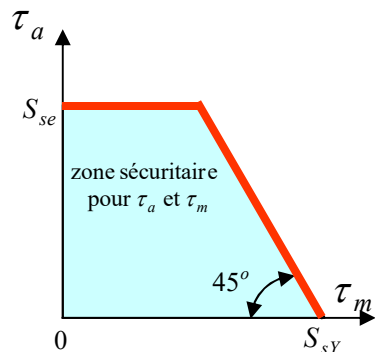
– Effort tranchant dans la goupille)

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3A} \quad \text{Au centre de la goupille}$$



$$V_a = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = \frac{100 - (-40)}{2} = 70 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \tau_a = \frac{4}{3} \cdot \frac{4F_a}{\pi d^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot 70}{\pi d^2} = \frac{118,9 \times 10^3}{d^2}$$

$$V_m = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2} = \frac{100 + 40}{2} = 70 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \tau_m = \frac{4}{3} \cdot \frac{4F_a}{\pi d^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot 30}{\pi d^2} = \frac{50,9 \times 10^3}{d^2}$$

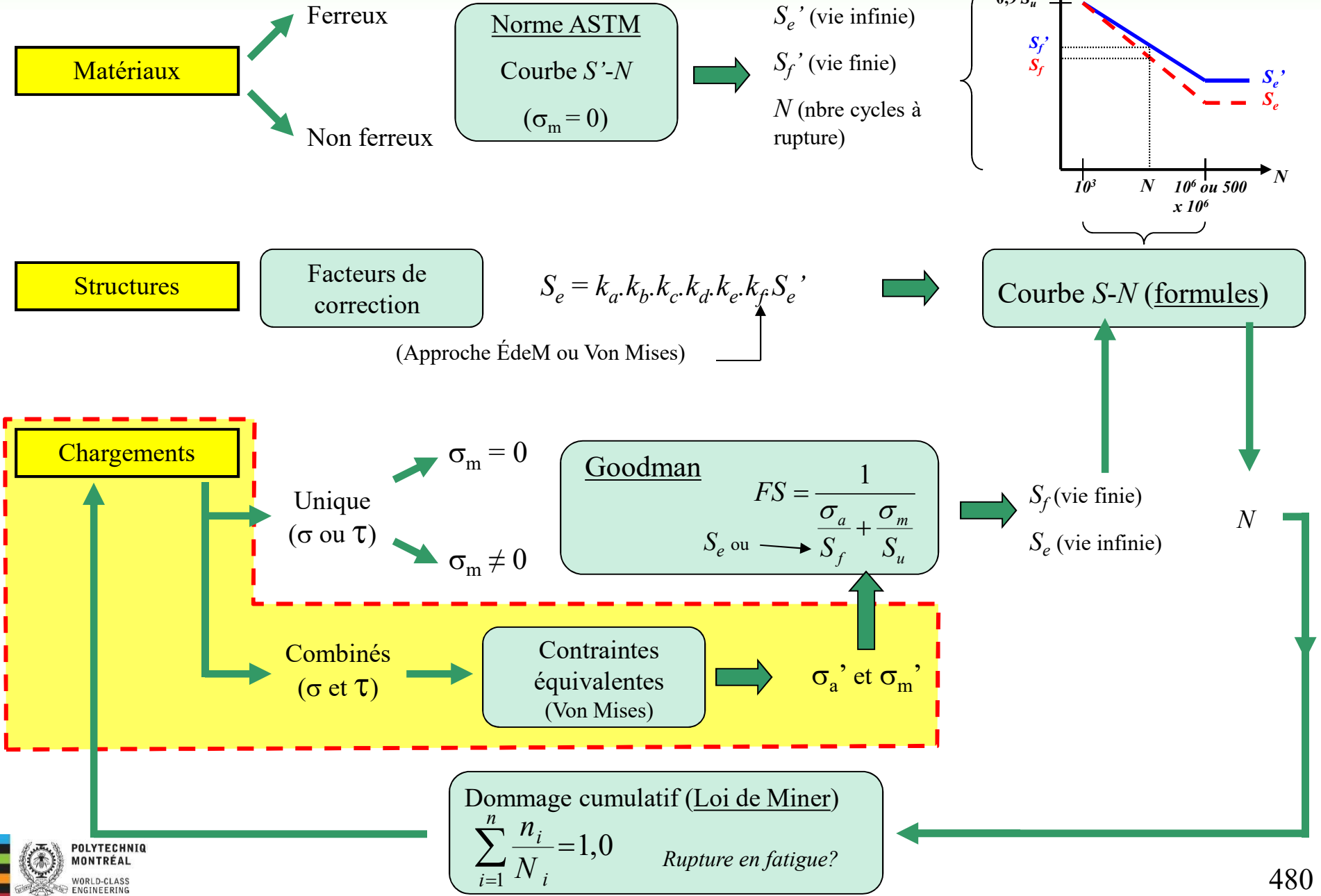


$$FS = 2,5 = \frac{S_{se}}{\tau_a} = \frac{95,3 \cdot d^2}{118,9 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad d = 55,8 \text{ mm} \quad \text{Fatigue (dicte le design)}$$

$$FS = 2,5 = \frac{S_{sY}}{\tau_a + \tau_m} = \frac{138,5 \cdot d^2}{118,9 \times 10^3 + 50,9 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad d = 55,4 \text{ mm} \quad \text{Écoulement}$$

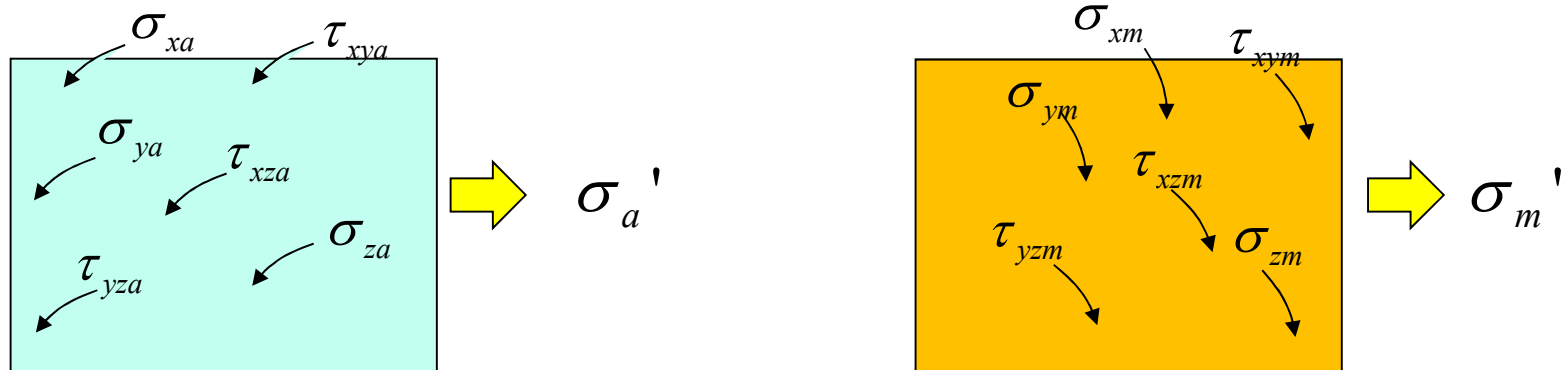
Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



Chargements combinés

- Que fait-on lorsque des contraintes normales et de cisaillement sont présentes en même temps au même point?
(ex. flexion et torsion dans un arbre)
- Il faut calculer les **contraintes équivalentes de Von Mises** (basée sur l'énergie de distorsion) à partir des composantes alternées et moyennes des contraintes.
 1. Regrouper toutes les contraintes alternées et moyennes ensemble
 2. Calculer les contraintes Von Mises alternées (σ_a') et moyennes (σ_m')



Chargements combinés

- **Contraintes équivalentes de Von Mises** à partir des composantes alternées et moyennes des contraintes.
 - Contrainte alternée de Von Mises (σ_a')

$$\sigma_a' = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 \right] + 3 \left[\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2 \right]}$$

Si on développe, on obtient

$$\sigma_a' = \sqrt{\left[(\sigma_{xa}^2 + \sigma_{ya}^2 + \sigma_{za}^2) - (\sigma_{xa}\sigma_{ya} + \sigma_{ya}\sigma_{za} + \sigma_{za}\sigma_{xa}) \right] + 3 \left[\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2 \right]}$$

Pour un état plan de contrainte (surface z), on obtient

$$\sigma_a' = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + \sigma_{ya}^2 - \sigma_{xa}\sigma_{ya} + 3\tau_{xya}^2}$$

Chargements combinés

- **Contraintes équivalentes de Von Mises** à partir des composantes alternées et moyennes des contraintes.
 - Contrainte moyenne de Von Mises (σ'_m)

$$\sigma'_m = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xm} - \sigma_{ym})^2 + (\sigma_{ym} - \sigma_{zm})^2 + (\sigma_{zm} - \sigma_{xm})^2 \right] + 3 \left[\tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{zxm}^2 \right]}$$

Si on développe, on obtient

$$\sigma'_m = \sqrt{\left[(\sigma_{xm}^2 + \sigma_{ym}^2 + \sigma_{zm}^2) - (\sigma_{xm}\sigma_{ym} + \sigma_{ym}\sigma_{zm} + \sigma_{zm}\sigma_{xm}) \right] + 3 \left[\tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{zxm}^2 \right]}$$

Pour un état plan de contrainte (surface z), on obtient

$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + \sigma_{ym}^2 - \sigma_{xm}\sigma_{ym} + 3\tau_{xym}^2}$$

Chargements combinés

- Puisque les contraintes équivalentes de Von Mises sont toujours positives, le diagramme du critère de Goodman modifié devient alors (exemple pour vie infinie)

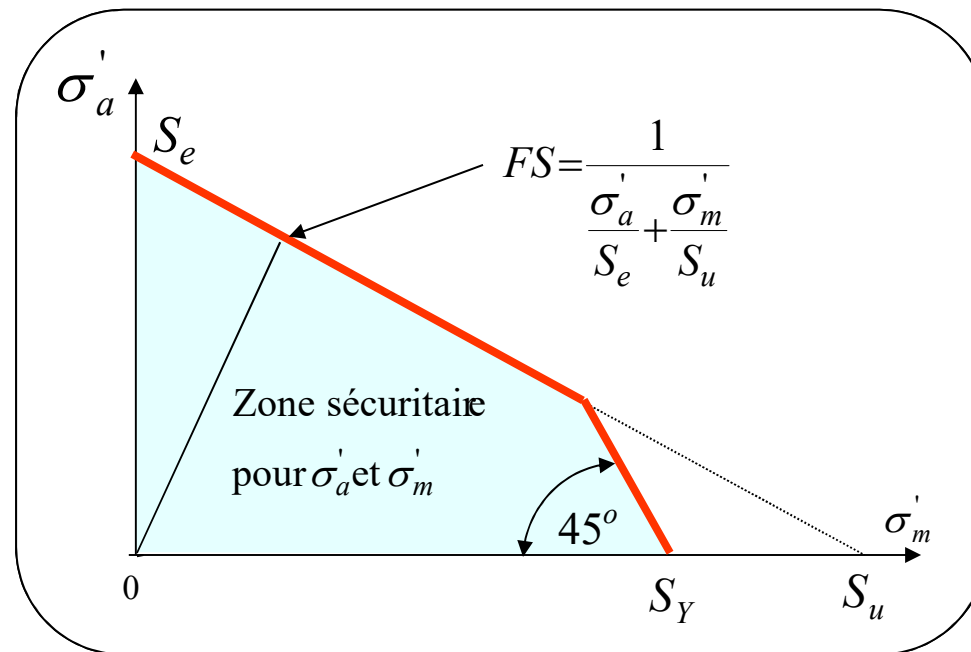
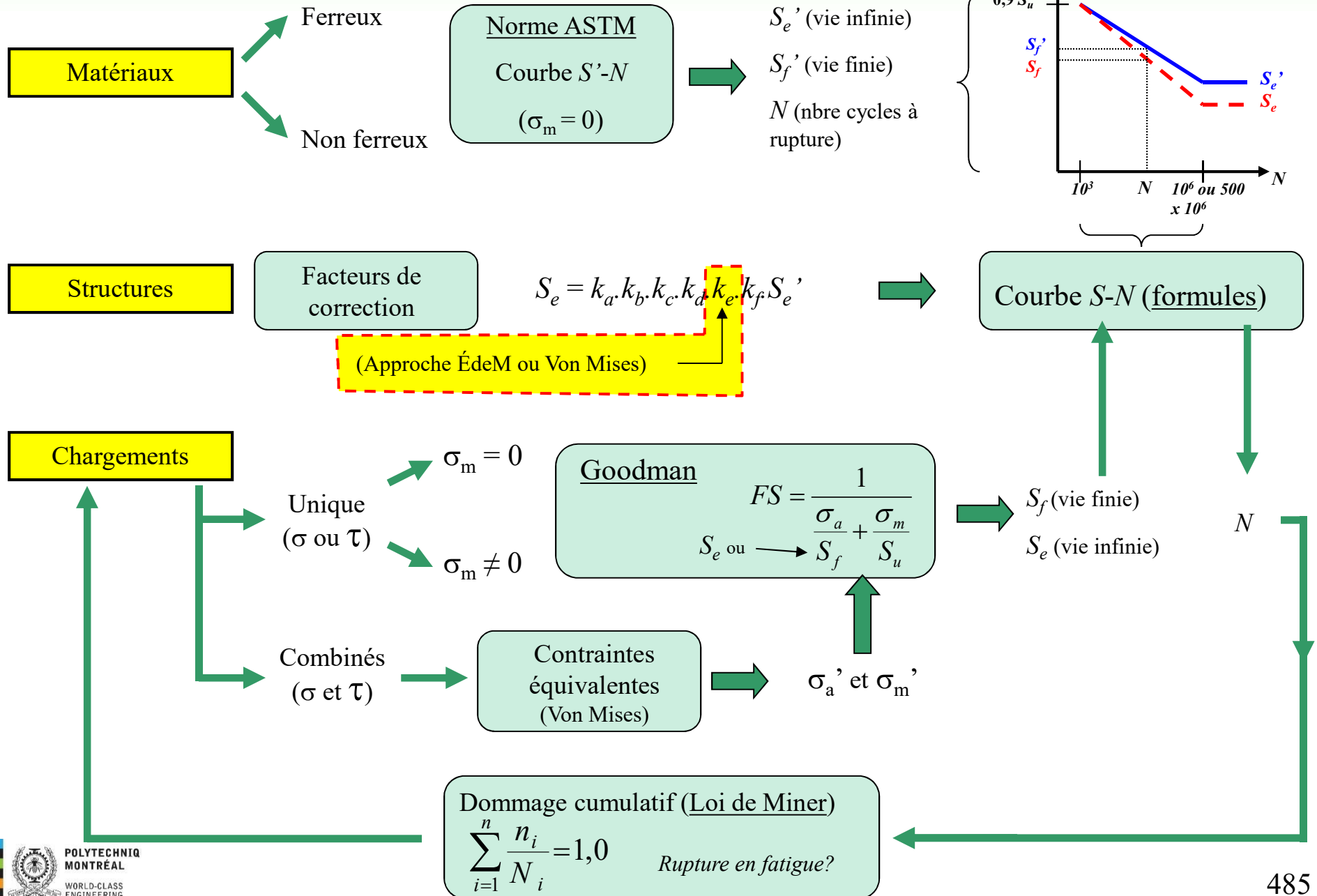


Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



Facteurs de correction (S_e)

- k_e : Effet de concentration de contrainte
 - En fatigue, on définit le facteur de concentration de contrainte

$$K_f = \frac{\text{limite d'endurance sans concentration}}{\text{limite d'endurance avec concentration}}$$

- Contrairement au facteur de concentration de contrainte statique (K_t)
 - K_f divise la résistance alors que K_t multiplie la contrainte
 - K_f est corrigé par un facteur supplémentaire q appelé **sensibilité à l'entaille** ce qui le rend **fonction du matériau** en plus de la géométrie et du mode de chargement

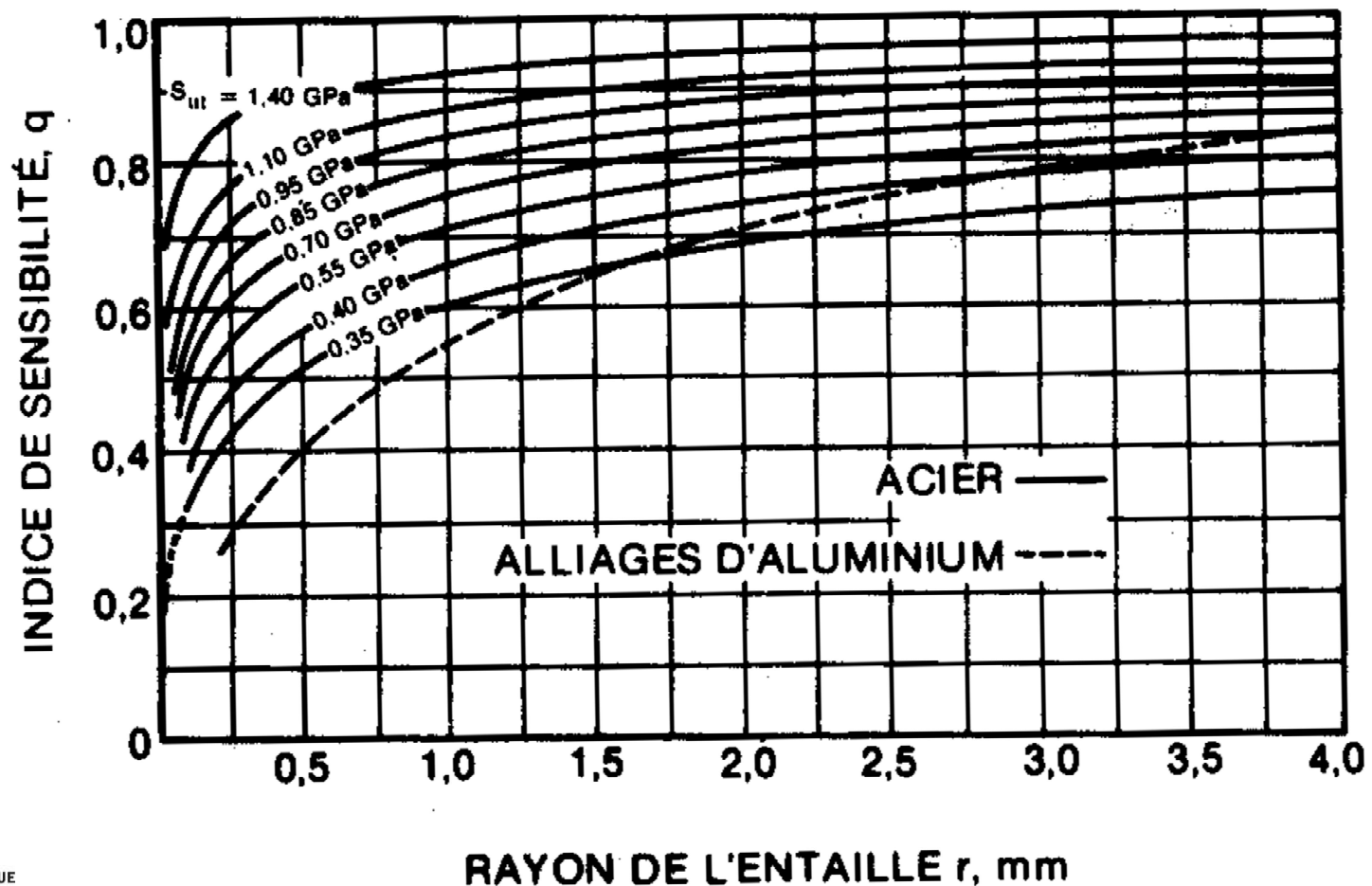
- Pour les calculs en fatigue, on utilise k_e

où q est la sensibilité d'un matériau à l'effet d'une concentration de contrainte

$$k_e = \frac{1}{K_f} = \frac{1}{q(K_t - 1) + 1}$$

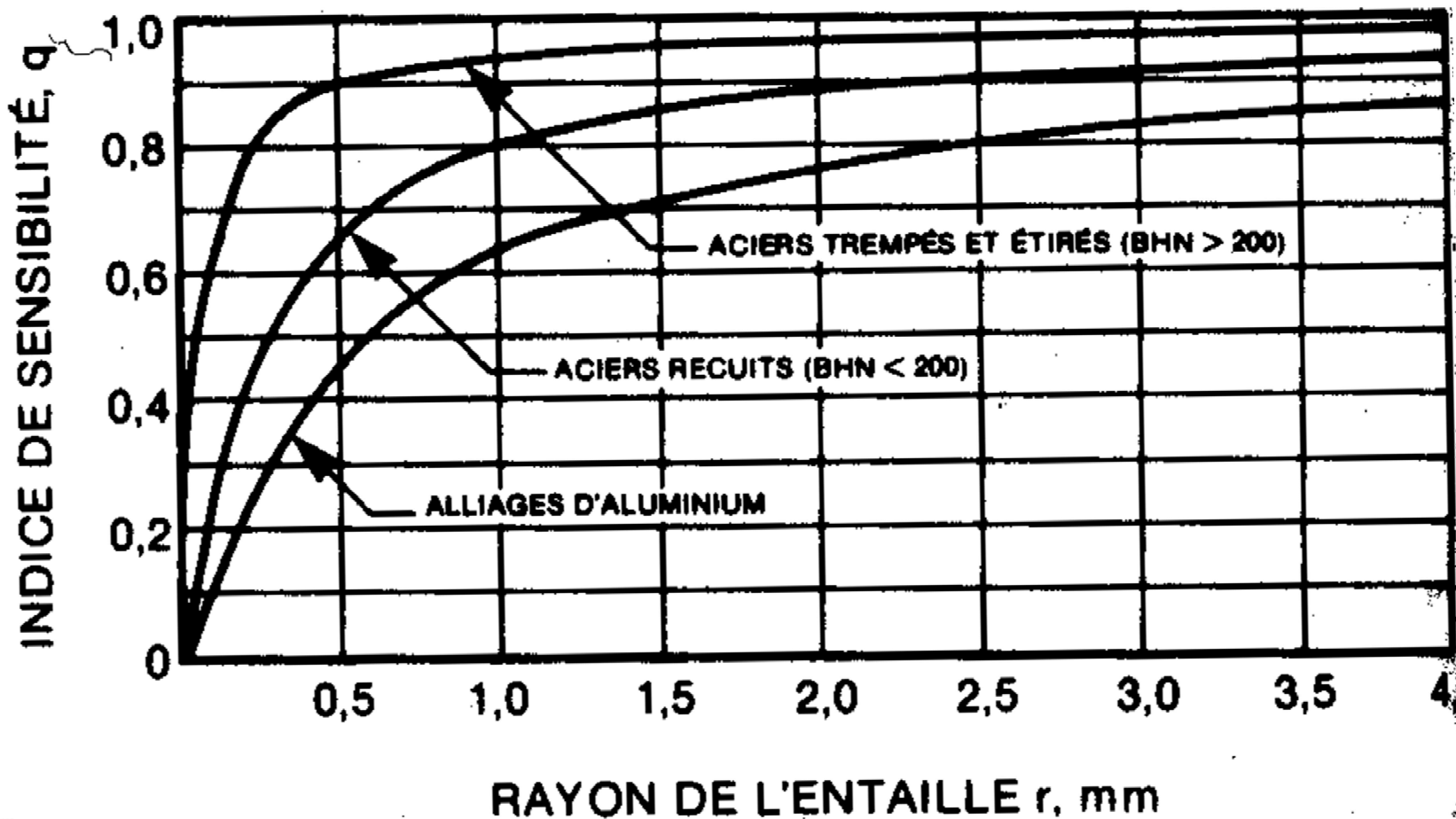
Facteurs de correction (S_e)

Sensibilité à l'entaille q pour les contraintes normales



Facteurs de correction (S_e)

Sensibilité à l'entaille q pour les contraintes de cisaillement



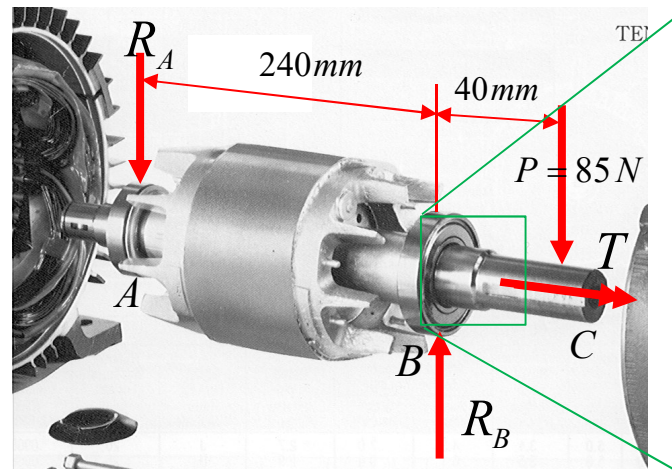
Exemple

Retour sur problème de l'arbre du moteur

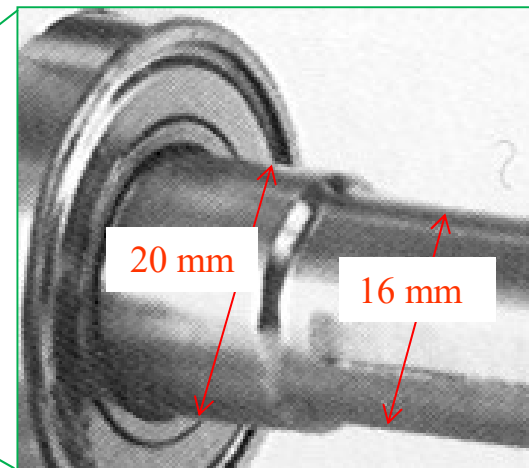
- L'arbre du moteur d'une soufflante est usiné dans un acier au carbone G10150, dureté $H_B = 111$ et pour lequel $S_Y = 190$ MPa et $S_u = 340$ MPa. Pour cette application, l'ingénieur juge qu'une fiabilité de 90% est adéquate. En opération, l'arbre peut atteindre une température de 80°C . Quelle est la valeur de S_e ?



Image de la soufflante



Arbre et chargement externe



Dimensions de l'arbre

Exemple

Retour sur problème de l'arbre du moteur

- Solution:**

- Effet de concentration de contrainte
- Chargement de flexion et torsion

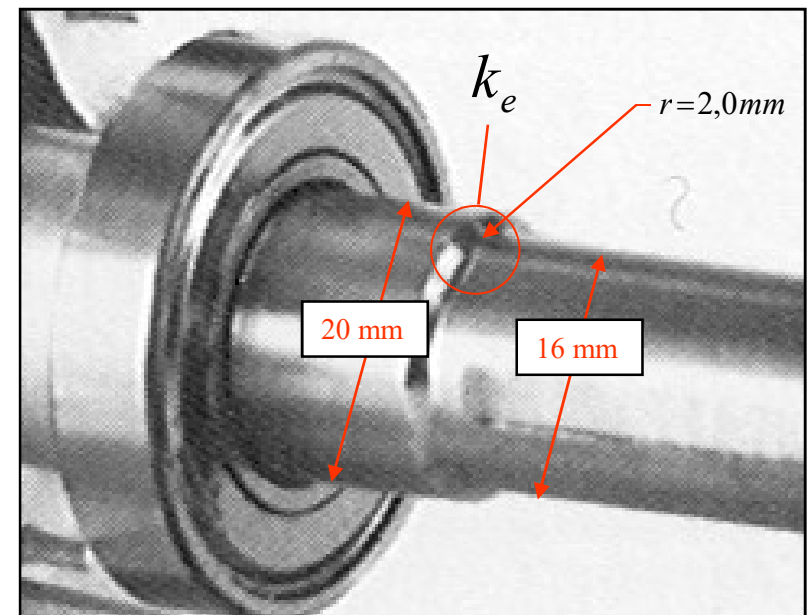
$$r = 2,0\text{mm} \quad d = 16\text{mm} \quad D = 20\text{mm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r}{d} = \frac{2,0}{16} = 0,125 \\ \frac{D}{d} = \frac{20}{16} = 1,25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} K_{tf} \approx 1,55 \text{ flexion} \\ K_{ts} \approx 1,30 \text{ torsion} \end{array}$$

Rappel des abaques de K_t à la page suivante

Pour $r = 2 \text{ mm}$, $H_B = 111$ et flexion $q_f \approx 0,70$

Pour $r = 2 \text{ mm}$, $H_B = 111$ et torsion $q_s \approx 0,90$



Au changement de section

Exemple

Retour sur problème de l'arbre du moteur

- Solution:

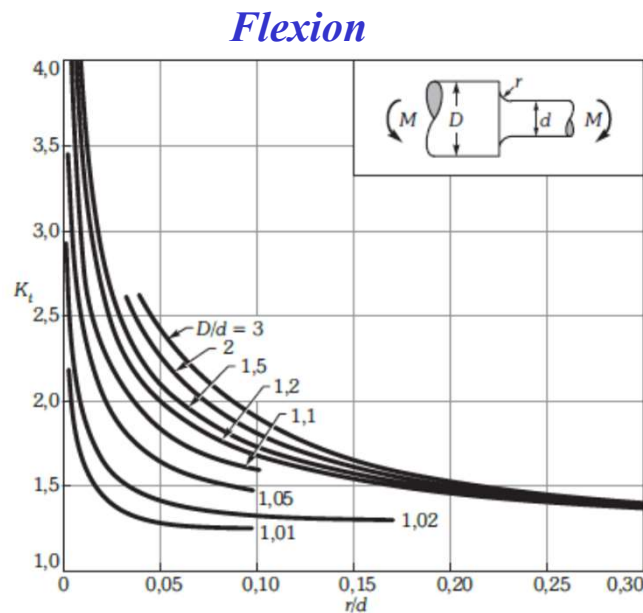


Figure D.10 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une flexion.

$$\sigma_{nom} = M(d/2)/(\pi d^4/64)$$

$$k_{ef} = \frac{1}{q_f(K_{tf} - 1) + 1} = \frac{1}{0,7(1,55 - 1) + 1} = 0,722$$

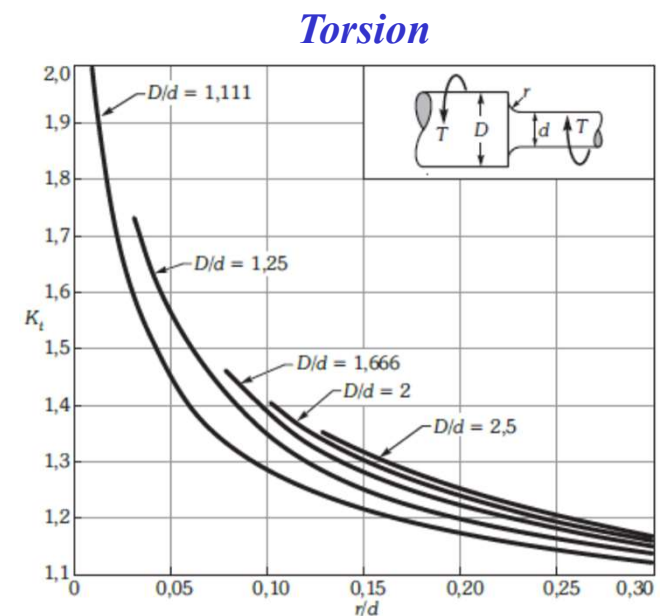


Figure D.12 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une torsion.

$$\tau_{nom} = T(d/2)/(\pi d^4/32)$$

$$k_{es} = \frac{1}{q_s(K_{ts} - 1) + 1} = \frac{1}{0,9(1,30 - 1) + 1} = 0,787$$

Quelle valeur de k_e faut-il utiliser? **Il y a deux approches**



Facteurs de correction (S_e)

- Utilisation de k_e dans les calculs de fatigue: 2 approches
 1. Celle du manuel **ÉLÉMENTS DE MACHINES** :
 - On applique la valeur la plus sévère de k_e au calcul de S_e .
 - Les contraintes alternées et moyennes sont calculées sans **prendre en compte le facteur de concentration de contrainte**.
 2. Celle de **VON MISES** :
 - La valeur de $k_e = 1$ est utilisée pour le calcul de S_e .
 - Le facteur de concentration de contrainte est appliqué sur la contrainte plutôt qu'au calcul de S_e . Chaque composante de contrainte alternée et moyenne est alors calculée en tenant compte du facteur de concentration de contrainte approprié (on divise par le k_e approprié).

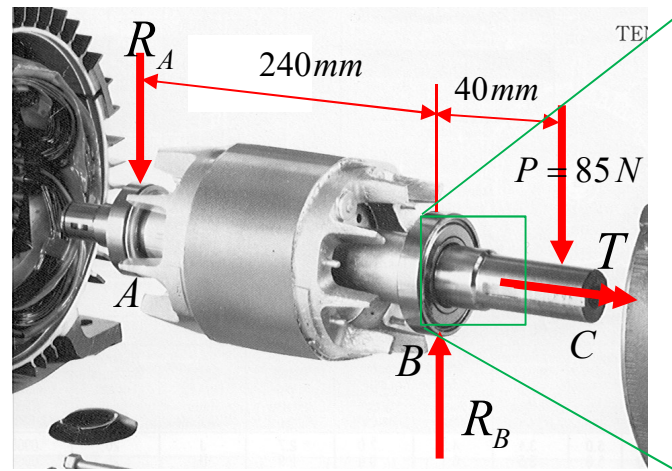
Exemple

Retour sur problème de l'arbre du moteur

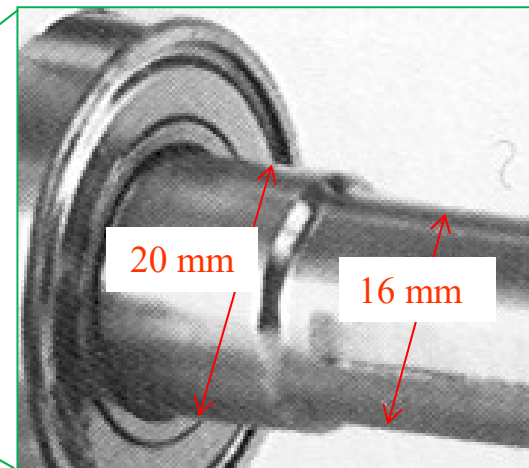
- L'arbre du moteur d'une soufflante est usiné dans un acier au carbone G10150, dureté $H_B = 111$ et pour lequel $S_Y = 190$ MPa et $S_u = 340$ MPa. Pour cette application, l'ingénieur juge qu'une fiabilité de 90% est adéquate. En opération, l'arbre peut atteindre une température de 80°C . Quelle est la valeur de S_e ?



Image de la soufflante



Arbre et chargement externe



Dimensions de l'arbre

Exemple

Retour sur problème de l'arbre du moteur

Chargement en flexion et torsion

(1) k_e le plus sévère

$$k_{ef} = 0,722$$

$$k_{es} = 0,787$$

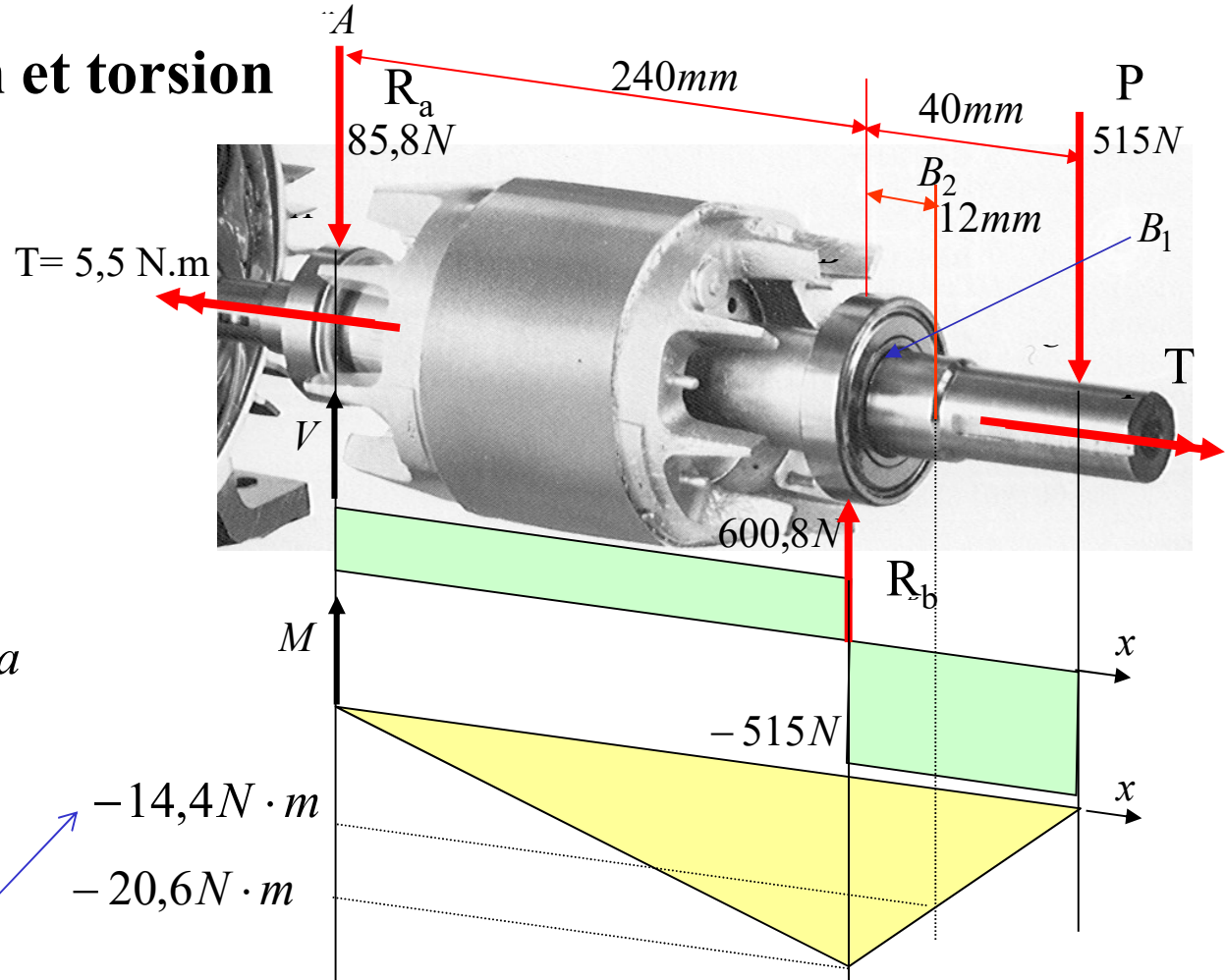
Appliqué k_e sur S_e

$$S_e = 0,88 \times 0,85 \times 0,9 \times 0,975$$

$$\times 0,722 \times 1,0 \times 170 = 80,6 \text{ MPa}$$

Diminue la résistance du matériau

Moment de flexion au point d'intérêt



Diagrammes V et M de l'arbre

Solution

Approche Éléments de machines

Chargement en flexion et torsion

(2) Calculs des contraintes Von Mises (aucun effet de concentration de contrainte)

- $T = 5,5 \text{ N}\cdot\text{m}$ (constant), $M = 14,4 \text{ N}\cdot\text{m}$ (flexion rotative),
- le diamètre est $d = 16 \text{ mm}$

$$\sigma_{xa} = \frac{Mc}{I} = \frac{14,4 \times 10^3 \cdot 8}{\frac{\pi \cdot 16^4}{64}} = 35,8 \text{ MPa} \quad \sigma_{\theta a} = 0$$

$$\tau_{x\theta m} = \frac{Tr}{J} = \frac{5,5 \times 10^3 \cdot 8}{\frac{\pi \cdot 16^4}{32}} = 6,8 \text{ MPa}$$

Contraintes équivalentes

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{x\theta a}^2} = \sqrt{35,8^2 + 0} = 35,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + 3\tau_{x\theta m}^2} = \sqrt{0 + 3 \cdot 6,8^2} = 11,8 \text{ Pa}$$

Appliquer le critère de Goodman

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_u}} = \frac{1}{\frac{35,8}{80,6} + \frac{11,8}{340}} = 2,1$$

Utiliser k_e ici

Solution

Approche Von Mises

Chargement en flexion et torsion

(1) $k_e = 1$ pour calculer S_e

$$S_e = 0,88 \times 0,85 \times 0,9 \times 0,975 \times 1,0 \times 1,0 \times 170 = 111,6 \text{ MPa}$$

(2) Utiliser le k_e approprié pour amplifier les contraintes

$$\sigma_{xa}^* = \frac{Mc}{k_{ef}I} = \frac{14,4 \times 10^3 \times 8}{0,722 \times \frac{\pi \times 16^4}{64}} = 49,6 \text{ MPa} \quad \sigma_{\theta a} = 0$$

$$\tau_{x\theta m}^* = \frac{Tr}{k_{es}J} = \frac{5,5 \times 10^3 \times 8}{0,787 \times \frac{\pi \times 16^4}{32}} = 8,6 \text{ MPa}$$

Contraintes équivalentes

$$\sigma_a' = \sqrt{\sigma_{xa}^{*2} + 3 \tau_{x\theta a}^{*2}} = \sqrt{49,6^2 + 0} = 49,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m' = \sqrt{\sigma_{xm}^{*2} + 3 \tau_{x\theta m}^{*2}} = \sqrt{0 + 3 \times 8,6^2} = 14,9 \text{ Pa}$$

Utiliser k_e ici

Appliquer le critère de Goodman

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a'}{S_e} + \frac{\sigma_m'}{S_u}} = \frac{1}{\frac{49,6}{111,6} + \frac{14,9}{340}} = 2,0$$



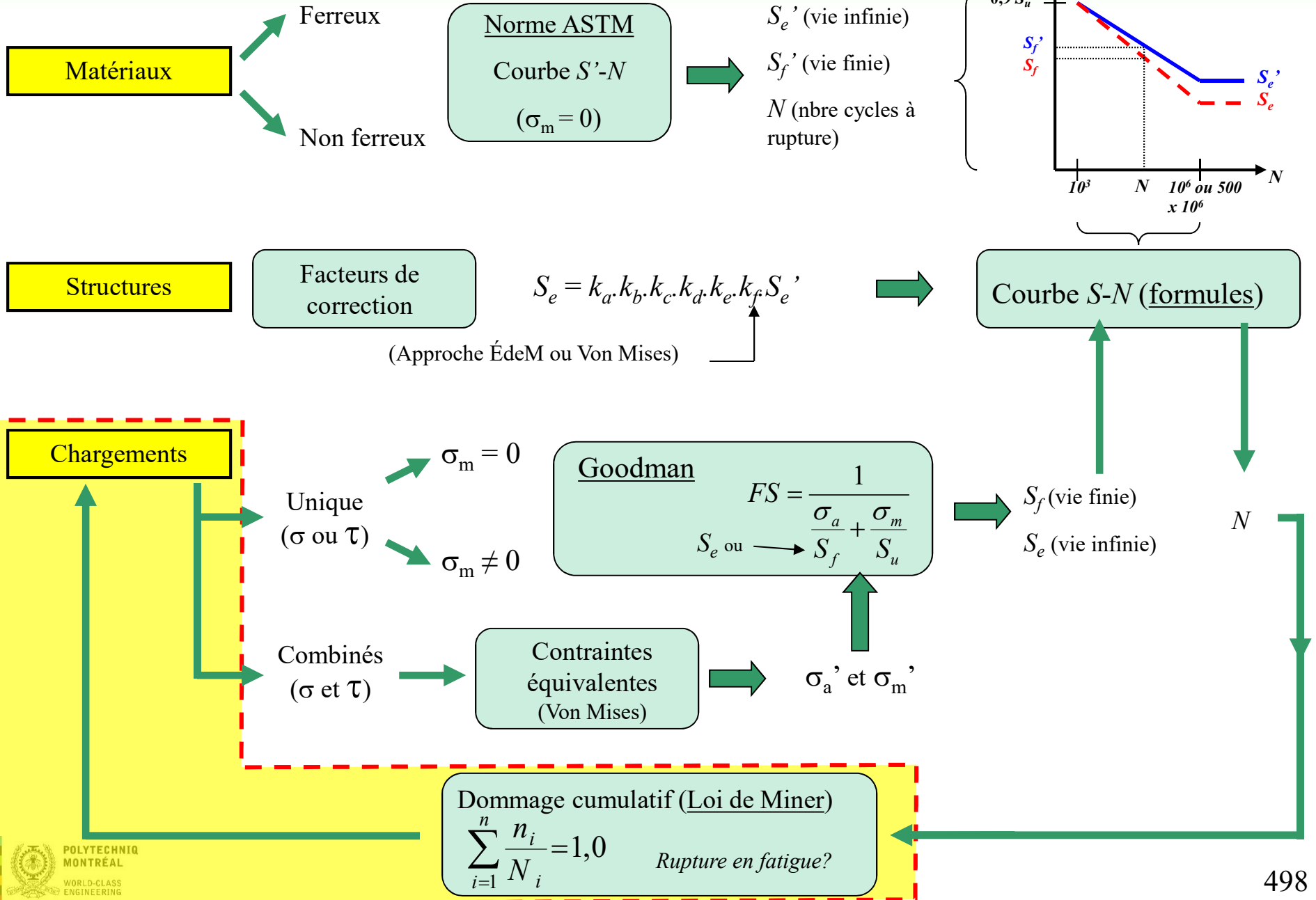
Solution

Conclusion

- Facteur de sécurité avec les deux approches
 - Éléments de machines $FS = 2,1$
 - Von Mises $FS = 2,0$
 - Le FS est essentiellement le même et égal à 2 dans les deux cas. En général, l'approche Éléments de machines est toujours moins sévère que celle de Von Mises.

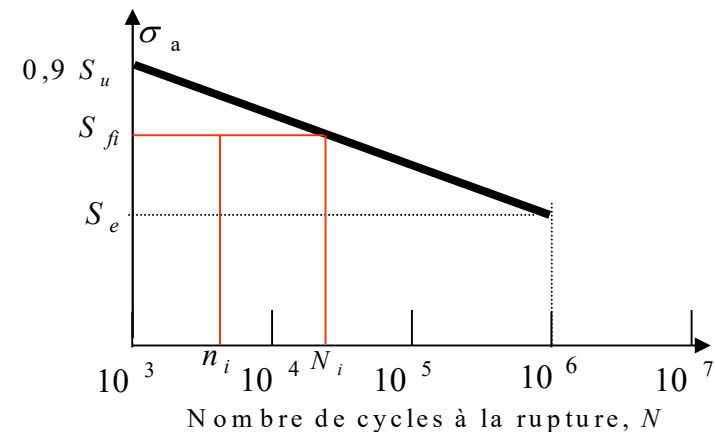
Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



Loi de Miner

- Cumul de dommage
 - Concerne uniquement la vie finie (entre 10^3 et 10^6 cycles pour ferreux et 10^3 et 5×10^8 pour non-ferreux)
 - En vie finie, une pièce soumise à une contrainte **complètement renversée** S_{fi} peut supporter N_i cycles avant de briser.
 - Si seulement n_i cycles sont appliqués, la pièce aura épuisé une fraction de sa vie égale à n_i / N_i .



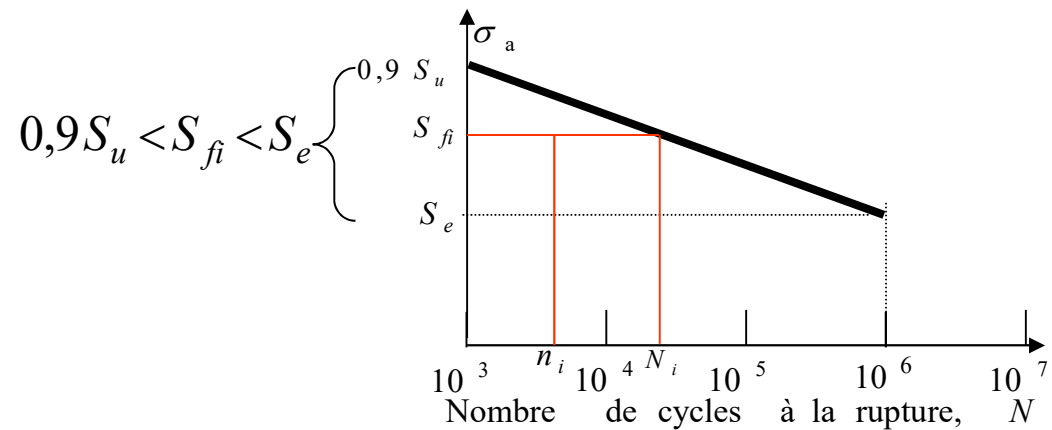
Vie finie pour matériaux ferreux

Loi de Miner

- Cumul de dommage (suite)
 - Si la pièce est soumise à une succession $S_{f1}, S_{f2} \dots S_{fi} \dots S_{fn}$ de contraintes **complètement renversées** pour des cycles $n_1, n_2 \dots n_i \dots n_n$, cette pièce se rupturera lorsque

Loi de *Miner*

$$\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = 1,0$$



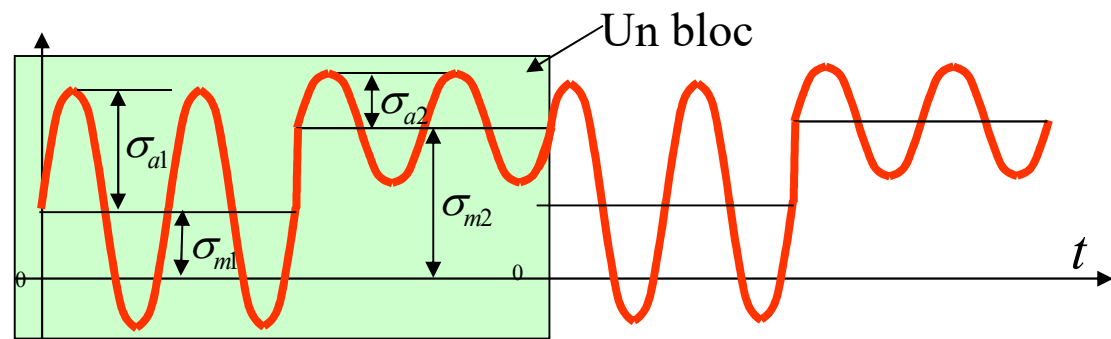
Vie finie pour matériaux ferreux

Exemple (Loi de Miner)

Une structure fabriquée d'un acier G1035 pour lequel $S_u = 555$ MPa, $S_Y = 460$ MPa et $S_e = 75$ MPa subit des chargements qui se répètent par blocs et qui induisent des contraintes **non complètement renversées** de :

- 1- $\sigma_{a1} = 150$ MPa et $\sigma_{m1} = 140$ MPa durant $n_1 = 2000$ cycles
- 2- $\sigma_{a2} = 85$ MPa et $\sigma_{m2} = 220$ MPa durant $n_2 = 5000$ cycles

Combien de blocs de chargements la pièce pourra-t-elle supporter avant de se rompre?



Exemple (Loi de Miner)

Solution :

On calcule :

$$S_{f1} = \frac{\sigma_{a1}}{1 - \frac{\sigma_{m1}}{S_u}} = \frac{150}{1 - \frac{140}{555}} = 200 \text{ MPa}$$

$$N_1 = 10^3 \left[\frac{S_{f1}}{0,9 S_u} \right]^{\frac{3}{\log(S_e/0,9 S_u)}} = 10^3 \left[\frac{200}{500} \right]^{\frac{3}{\log(75/500)}} = 28,1 \times 10^3 \text{ cycles}$$

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{2000}{28100} = 0,071$$

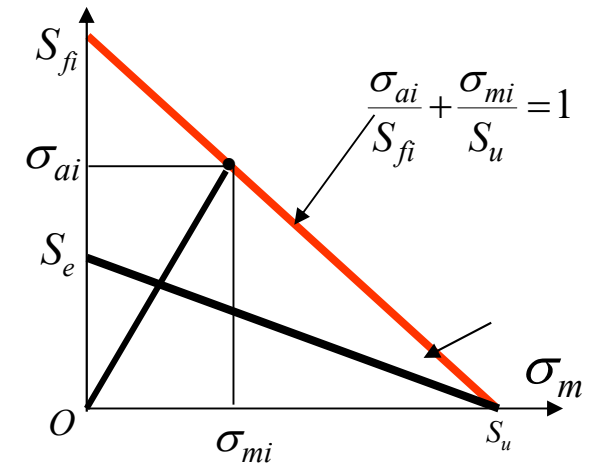
Au niveau 2

$$S_{f2} = \frac{\sigma_{a2}}{1 - \frac{\sigma_{m2}}{S_u}} = \frac{85}{1 - \frac{220}{555}} = 141 \text{ MPa}$$

$$N_2 = 10^3 \left[\frac{S_{f2}}{0,9 S_u} \right]^{\frac{3}{\log(S_e/0,9 S_u)}} = 10^3 \left[\frac{141}{500} \right]^{\frac{3}{\log(75/500)}} = 100,4 \times 10^3 \text{ cycles}$$

$$\frac{n_2}{N_2} = \frac{5000}{100400} = 0,05$$

$$N^0 \text{ blocs} = \frac{1}{\sum \frac{n_i}{N_i}} = \frac{1}{0,071 + 0,05} = 8,26 \Rightarrow 8$$



Formulaire type à l'examen

Section 7 : Fatigue

Critère de Goodman

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u}}$$

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u}}$$

Facteur de correction

$$k_e = \frac{1}{q(K_t - 1) + 1}$$

Matériaux ferreux

$$N = 1000 \left(\frac{S_f}{0,9S_u} \right)^{\frac{3}{\log\left(\frac{S_e}{0,9S_u}\right)}}$$

$$\frac{S_f}{0,9S_u} = \left(\frac{S_e}{0,9S_u} \right)^{\frac{\log N - 3}{3}}$$

Matériaux non ferreux

$$N = 1000 \left(\frac{S_f}{0,9S_u} \right)^{\frac{5,7}{\log\left(\frac{S_e}{0,9S_u}\right)}}$$

$$\frac{S_f}{0,9S_u} = \left(\frac{S_e}{0,9S_u} \right)^{\frac{\log N - 3}{5,7}}$$

Contraintes équivalentes

$$\sigma_{a'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 \right] + 3(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2)}$$

$$\sigma_{m'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xm} - \sigma_{ym})^2 + (\sigma_{ym} - \sigma_{zm})^2 + (\sigma_{zm} - \sigma_{xm})^2 \right] + 3(\tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{zxm}^2)}$$

$$\sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i} = 1$$

$$n_r = N_r \left(1 - \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i} \right)$$







