Section 6 : Concentration de contraintes

- **Objectifs**
  - Identifier le facteur de concentration de contrainte statique (K_t)
    - Pour différentes géométries
    - Pour différents types de chargements
  - Calculer la contrainte maximale à l'aide du facteur de concentration de contrainte

- **Référence**
    - Référence principale: Éléments de machines, Drouin et al, Éditions de l'École Polytechnique , chapitre 2
    - Stress Concentration Factors, R. E. Peterson, John Wiley & Son
    - Perterson's Stress Concentration Factors, W. D. Pilkey, John Wiley & Son, 1997

Évaluation de la résistance

- Rappel du facteur de sécurité

$$FS = \frac{\text{Résistance}}{\text{Contrainte}}$$

Normales σ

- Uniaxiales Tension-Compression
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

- Flexion
$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

Cisaillement τ

- Torsion
$$\tau_{x\theta} = \frac{Tr}{J}$$
$$\tau_{xs} = \frac{T}{2\bar{A}t}$$
$$\tau_{xy} = \frac{Tt}{J}$$

- Effort tranchant

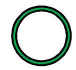
En général négligeable

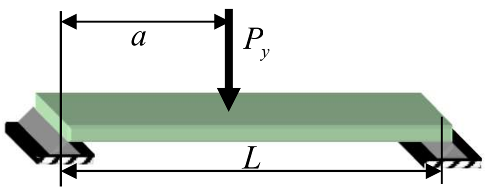
Résumé

Exemples de section

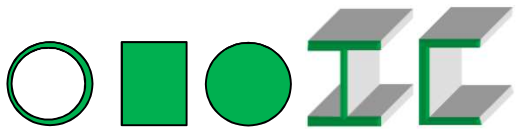
Axial ➔Toutes les sections constantes selon l'axe *x*

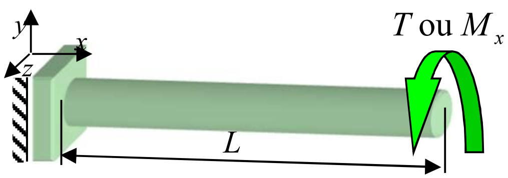
Pression ➔ cyl. à paroi mince



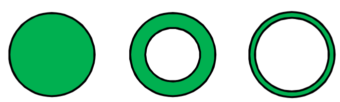


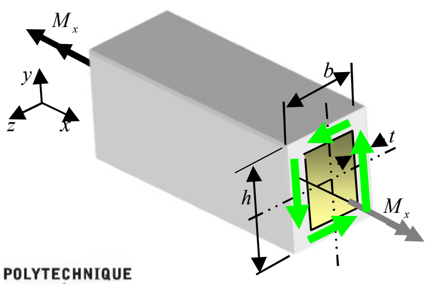
Flexion ➔ section simple



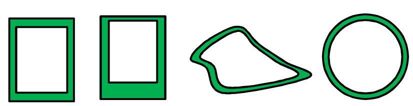


Torsion ➔ section circulaire (x,r,θ)





Torsion ➔ section fermée mince (x,s,n)



Nouveaux en RDM II

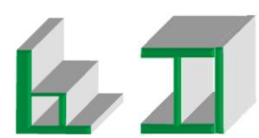
Changements de section
➔Concentration de contrainte

Section sans plan de symétrie
➔ flexion gauche

Révision partie 4

Torsion ➔ section ouverte mince

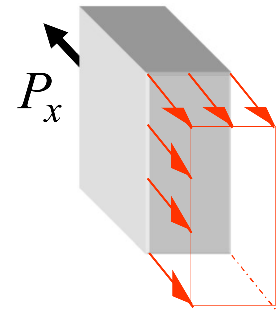
Torsion ➔ section combinée



Concentration de contraintes

- **Introduction**

  – Les formules précédentes de calcul des contraintes **supposent une distribution uniforme ou linéaire** des contraintes à travers la section

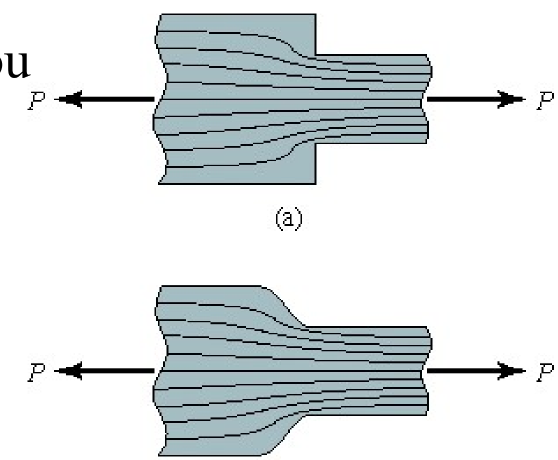


  – En pratique, toutefois, les pièces possèdent des discontinuités et des changements de section.

  – La distribution des contraintes n'est plus uniforme ou linéaire.

$\sigma_x = ?$

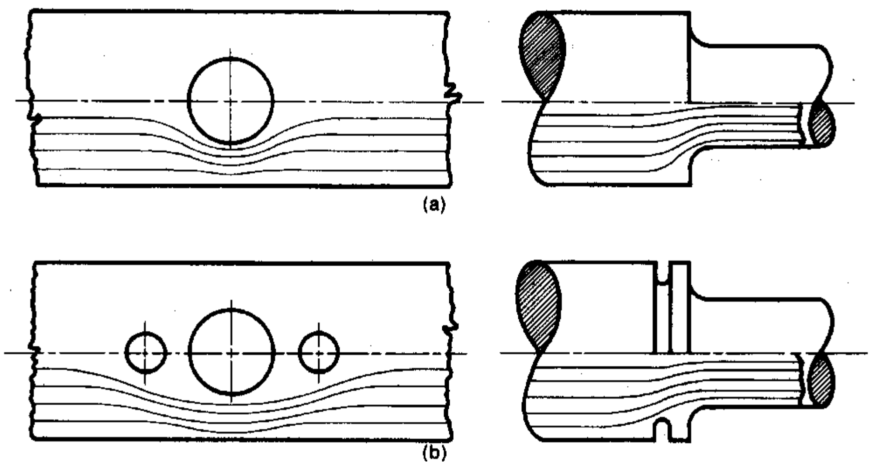
Barreau troué



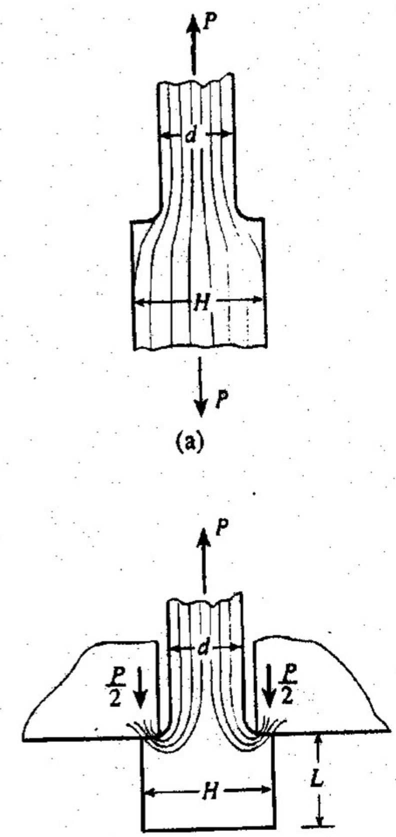
Changement de section

Concentration de contraintes

- **Introduction (suite)**
  - Exemples de concentration de contraintes



Moyens de diminuer les concentrations de contraintes



Transmission de force sur un épaulement

  - Des méthodes analytiques ou expérimentales permettent de déterminer la valeur maximale de la contrainte (σ_{max}) à un changement de section

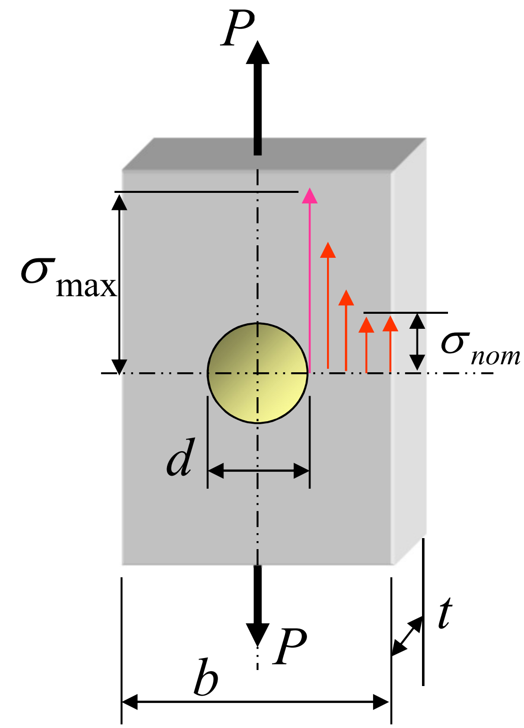
Facteur de concentration de contrainte (K_t)

- **Traction**
  - À partir de cette valeur maximale de la contrainte σ_{max} mesurée et de la valeur nominale σ_{nom} calculée, le facteur théorique de concentration de contrainte K_t est défini comme

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

  - et σ_{nom} est calculé

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{(b-d)\cdot t}$$



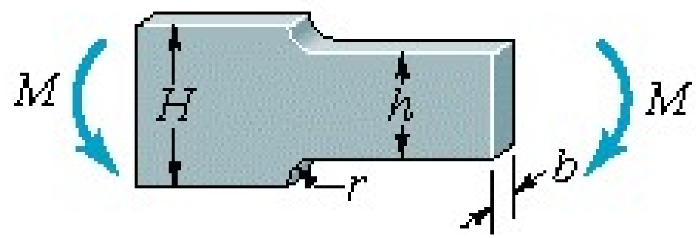
$$[\sigma_{max}]_{ici} \equiv \sigma_{\text{É de M}}$$

  - En général, la façon de calculer σ_{nom} est définie dans les abaques de K_t.

Facteur de concentration de contrainte (K_t)

- **Flexion**
  - De la même façon, on peut connaître la valeur maximale σ_{max} au changement de section dans une pièce en flexion.
  - À partir de la contrainte nominale σ_{nom} calculée, le facteur théorique de concentration de contrainte en flexion K_t est défini comme

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$



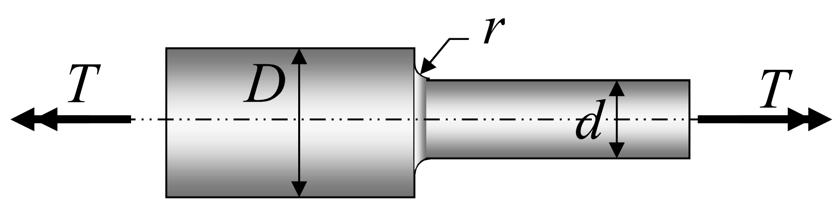
  - Dans le cas d'une plaque rectangulaire, σ_{nom} se calcule

$$\sigma_{nom} = \frac{M\,c}{I} = \frac{6\,M}{b\,h^2}$$

Facteur de concentration de contrainte (K_t)

- **Torsion**
  - On peut également connaître la valeur maximale τ_{max} au changement de section dans une pièce en torsion.
  - À partir de la contrainte de cisaillement nominale τ_{nom} calculée, le facteur théorique de concentration de contrainte en cisaillement K_{ts} est défini comme

$$K_{ts} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{nom}} = \frac{\tau}{\tau_0}$$



  - Dans le cas d 'un barreau circulaire, τ_{nom} se calcule

$$\tau_{nom} = \frac{T\,r}{J} = \frac{T\,d/2}{\frac{\pi\,d^4}{32}} = \frac{16\,T}{\pi\,d^3}$$

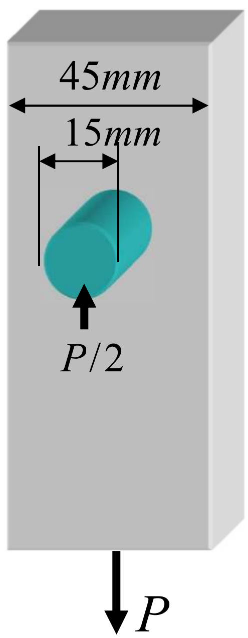
Facteur de concentration de contrainte (K_t)

Exemple : Les figures C.1 à C.14 de l'annexe C du manuel Éléments de machines reproduisent les cas de chargement et de géométrie les plus courants dans les pièces de machine et les structures.

$$\frac{d}{w}=\frac{15}{45}=0,33$$

$$\frac{h}{w}>1,0$$

$$\boxed{K_t \approx 3,2}$$



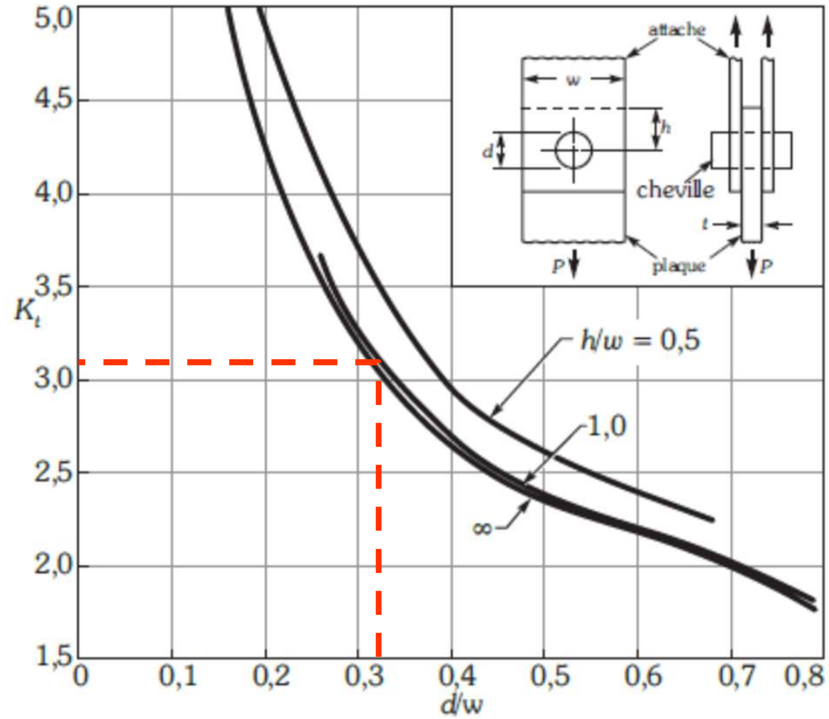


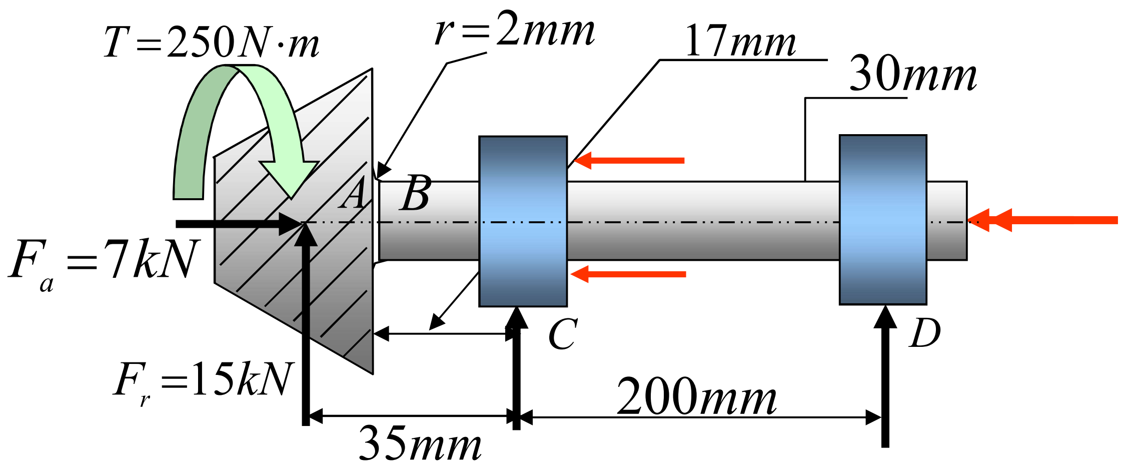
Figure D.6 Plaque retenue par un goujon passant dans un trou et soumise à une traction axiale (jeu négligeable entre le goujon et le trou). Pour un jeu non négligeable, augmenter K_t de 35 à 50 %.

$\sigma_{nom} = P/[(w-d)\,t]$

Détail sur le calcul de la contrainte nominale

Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

L'arbre porteur de la roue hypoïde du différentiel d'une automobile a les dimensions Suivantes et supporte les forces illustrées ci-contre.

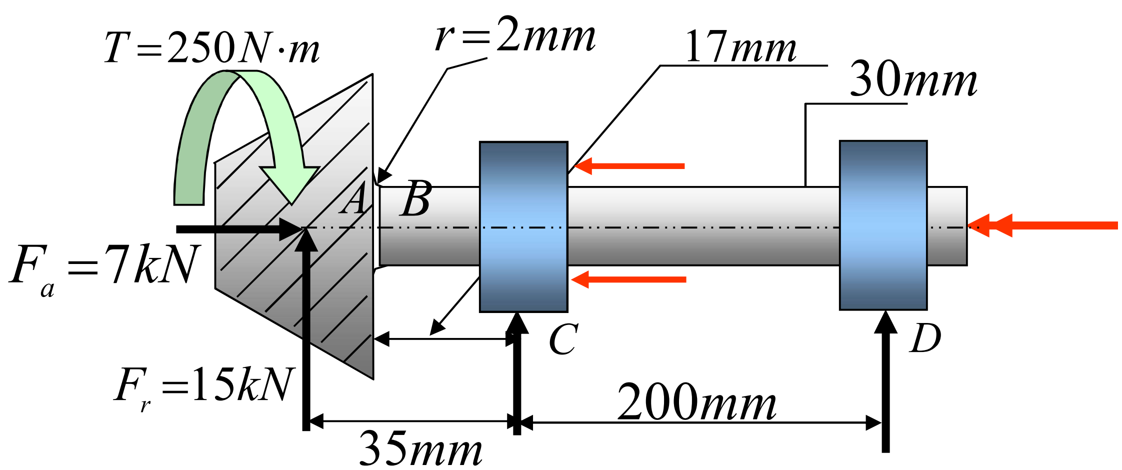


130 kW (175 HP) à 5000 tr/min

L'arbre est fabriqué d'un acier G4340 pour lequel S_Y vaut 680 MPa

Déterminer le facteur de sécurité

Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

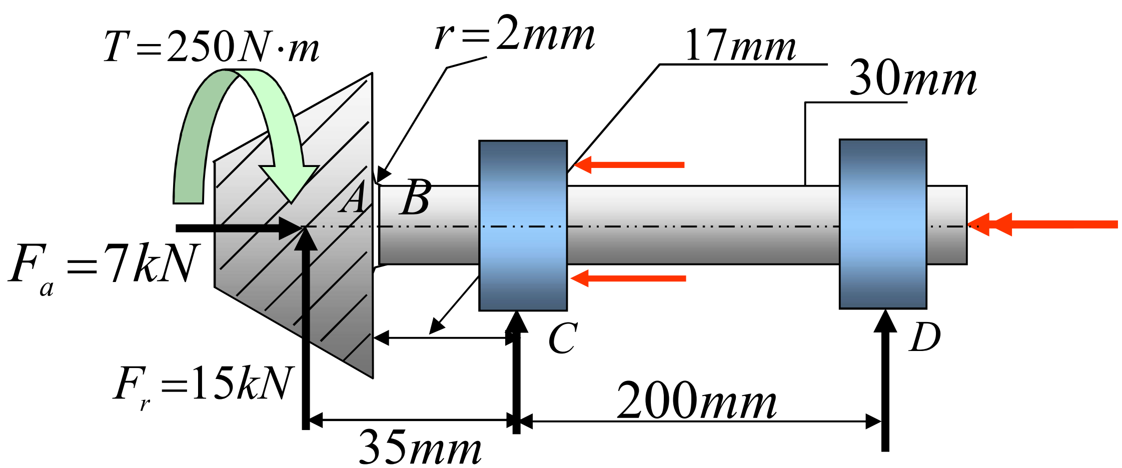


130 kW (175 HP) à 5000 tr/min

Méthode de solution :

1. Calculer les réactions
2. Calculer les efforts internes: flexion, compression, torsion
3. Évaluer K_t en B
4. Calculer les contraintes principales à la section critique, à l'endroit où le facteur de sécurité (*FS*) *est* minimum

Détermination du facteur de sécurité d'un arbre



Solution

1- Calcul des réactions

$$\sum F_x = 7\ kN - F_C = 0$$

$$F_C = 7\ kN$$

$$\sum M_X = 250\ N.m - T_D = 0$$

$$T_D = 250\ N.m$$

$$\sum M_{zC} = 200\ R_D - 35 \cdot 15kN = 0$$

$$R_D = 2,63kN$$

$$\sum F_y = 2,63kN + 1,5kN + R_C = 0$$

$$R_C = -17,63kN$$

130 kW (175 HP) à 5000 tr/min

Compression axiale entre A et C

Flexion entre A et D

Torsion entre A et D

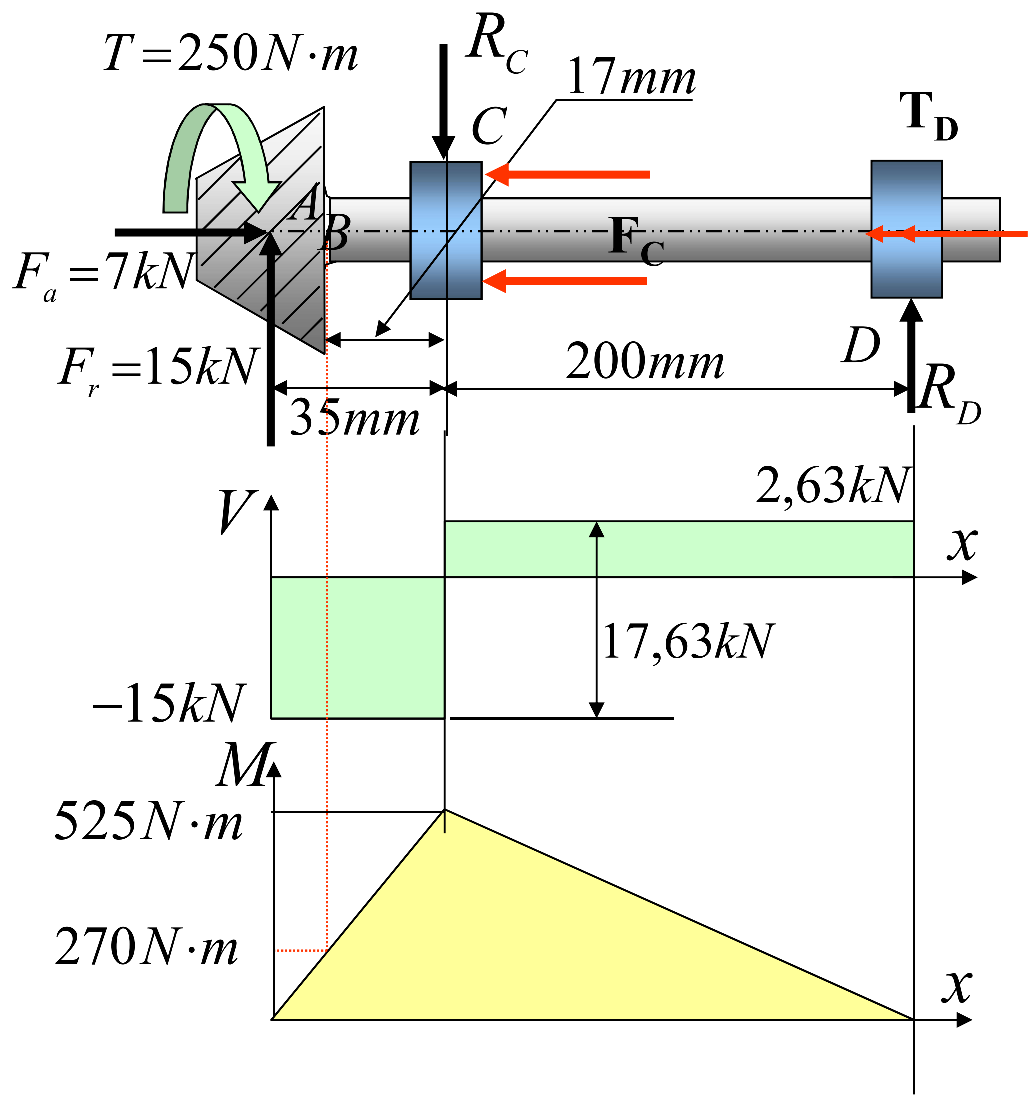
Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

Solution

2- Calcul des efforts internes

$R_D = 2{,}63 kN$

$R_C = 17{,}63 kN$ vers le bas



Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

Solution

3- Calcul de K_{tf} en B

(en flexion)

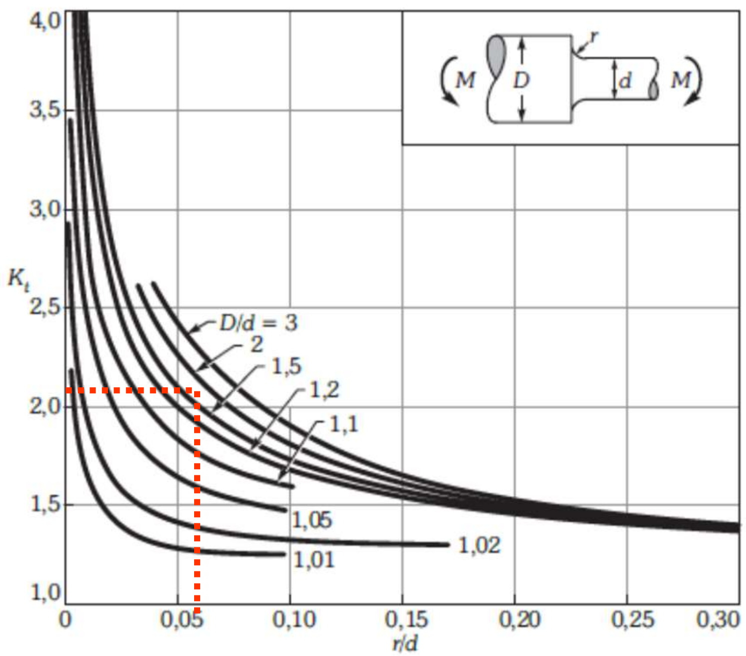
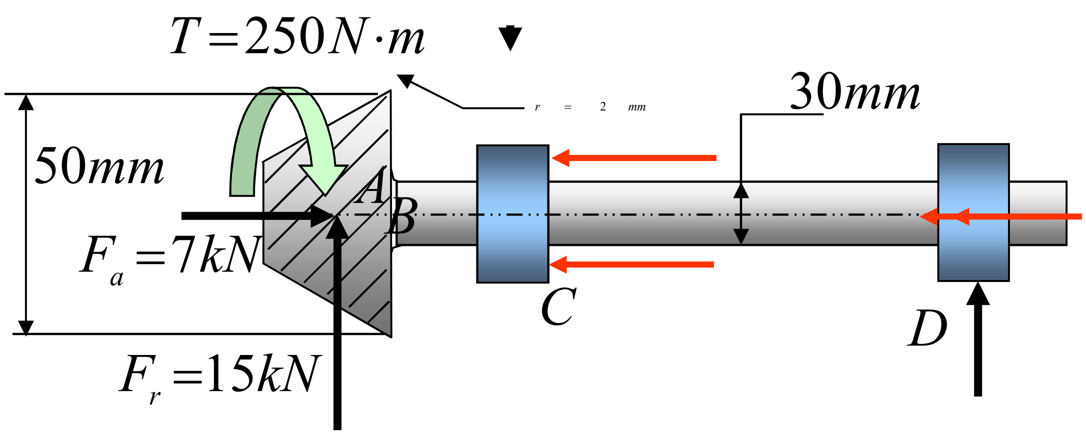


Figure D.10 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une flexion.

$\sigma_{nom} = M(d/2)/(\pi d^4/64)$



$$r/d = 2/30 = 0{,}066$$

$$D/d = 50/30 = 1{,}67$$

$$\boxed{(K_{tf})_B \approx 1{,}9}$$

Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

Solution

3- Calcul de K_{tc} en B

(en compression)

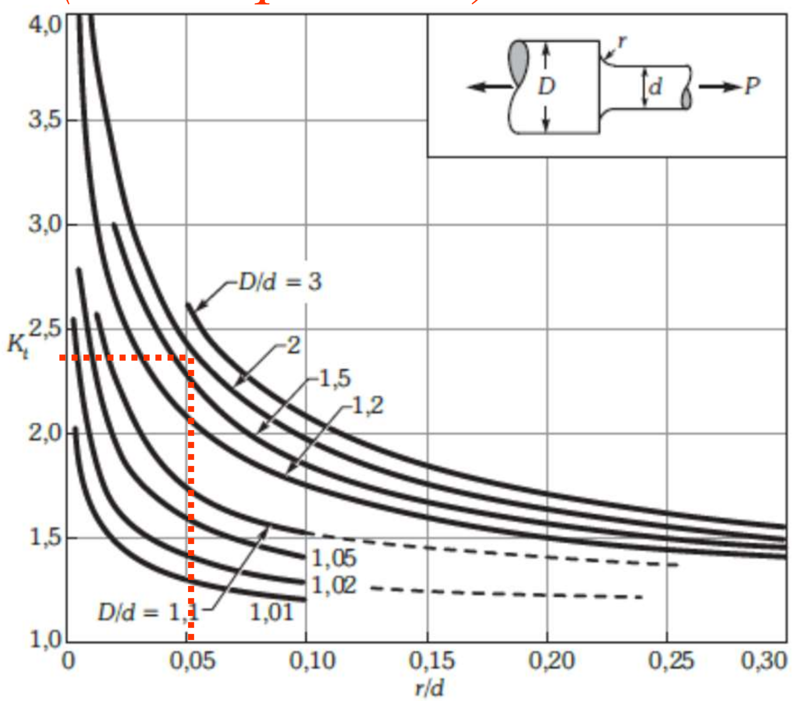
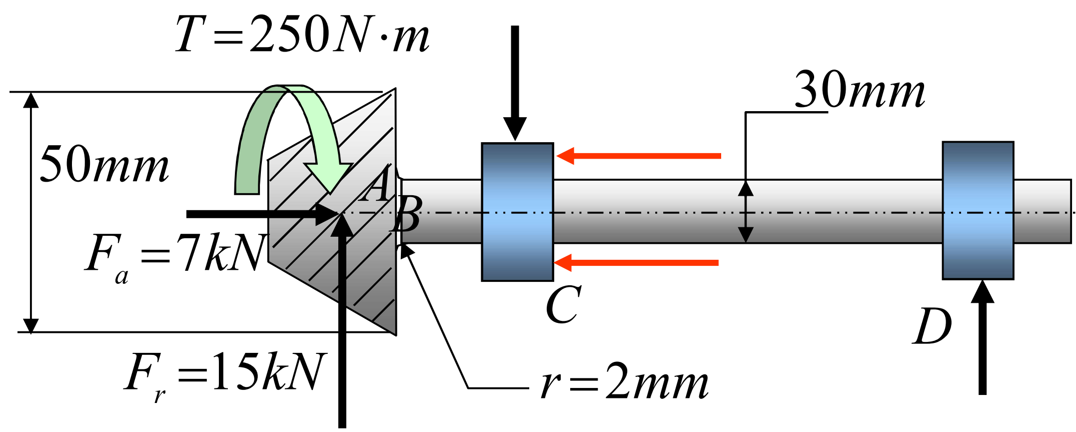


Figure D.5 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une traction axiale.

$$\sigma_{nom} = P/(\pi\, d^2/4)$$



$$r/d = 2/30 = 0{,}066$$

$$D/d = 50/30 = 1{,}67$$

$$\boxed{(K_{tc})_B \approx 2{,}4}$$

Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

Solution

3- Calcul de K_{ts} en B

(en torsion)

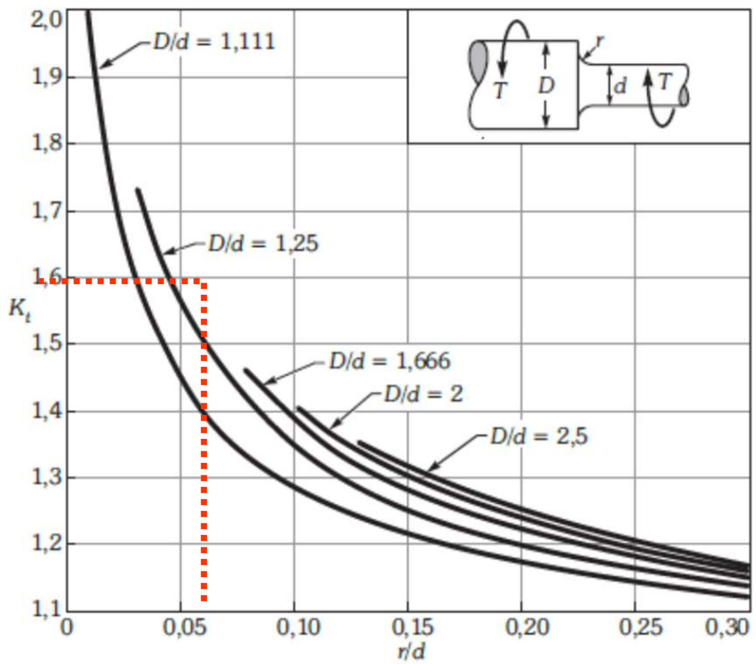
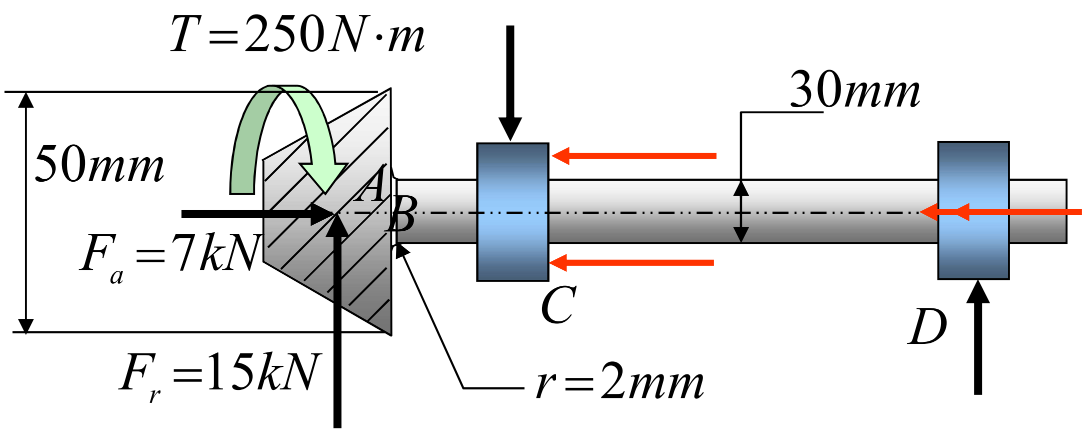


Figure D.12 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une torsion.
$\tau_{nom} = T(d/2)/(\pi\, d^4/32)$



$$r/d = 2/30 = 0{,}066$$

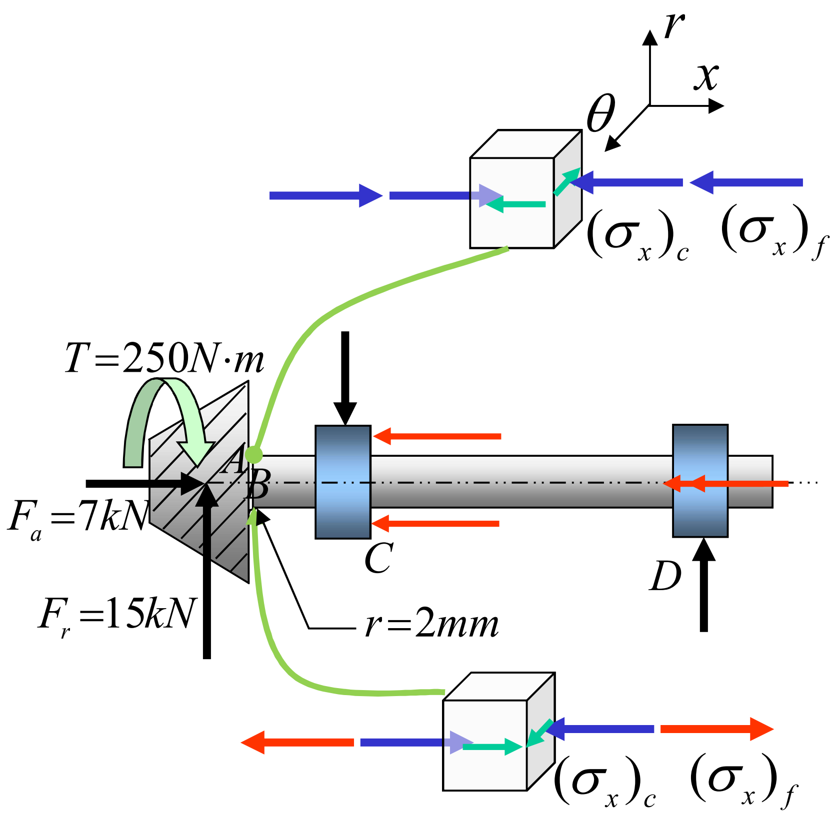
$$D/d = 50/30 = 1{,}67$$

$$\boxed{(K_{ts})_B \approx 1{,}6}$$

Détermination du facteur de sécurité d’un arbre

Solution

4- Superposition des contraintes et calcul de contraintes principales



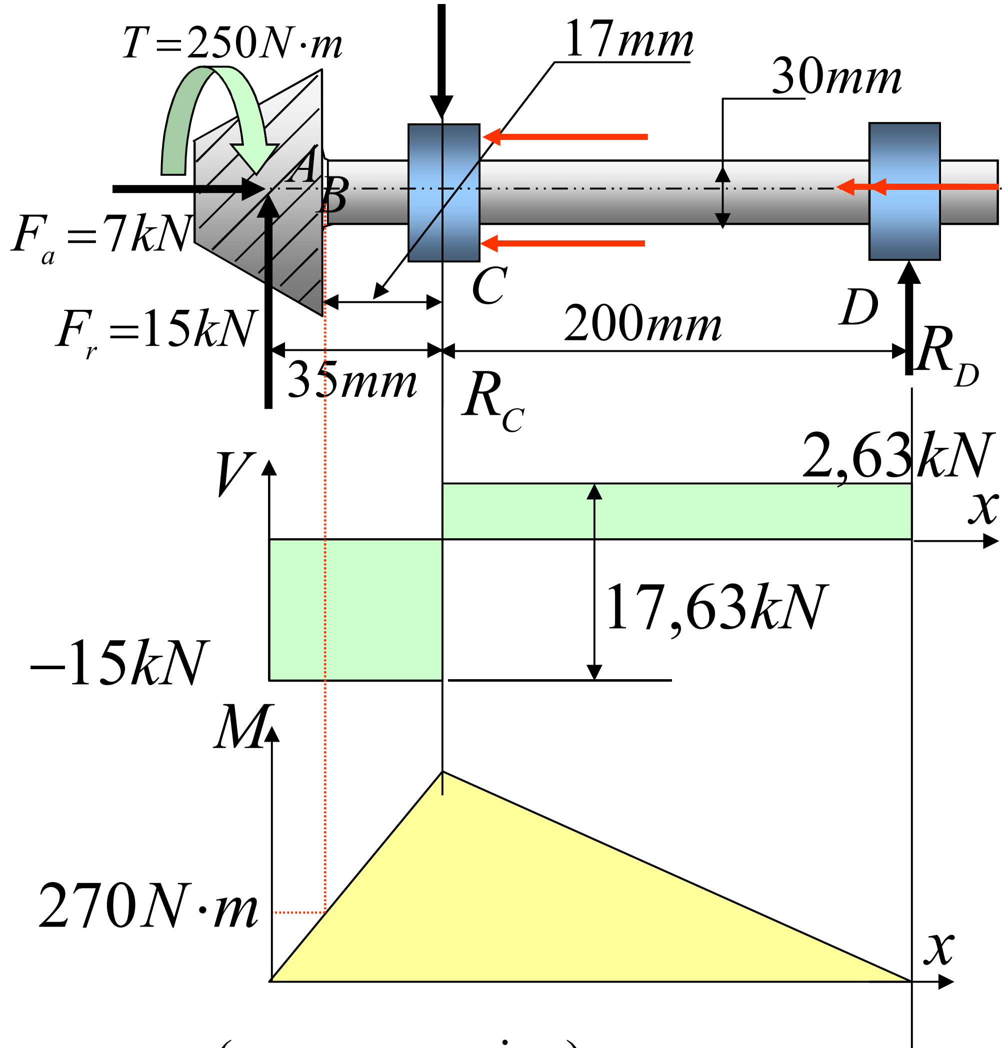
- Flexion entre A et D varie
- Compression axiale est constante entre A et C et nulle entre C et D
- Torsion est constante entre A et D

Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

Superposition des contraintes

- Flexion entre A et D varie
- Compression axiale est constante entre A et C et nulle entre C et D
- Torsion est constante entre A et D

➔ Analyse aux points B et C
Calcul de σ_x et $\tau_{x\theta}$



(en compression)

Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

4 - Calcul de σ_x au point B

$$\sigma_x = K_{tc}\frac{F_a}{A} + K_{tf}\frac{M\,c}{I}$$

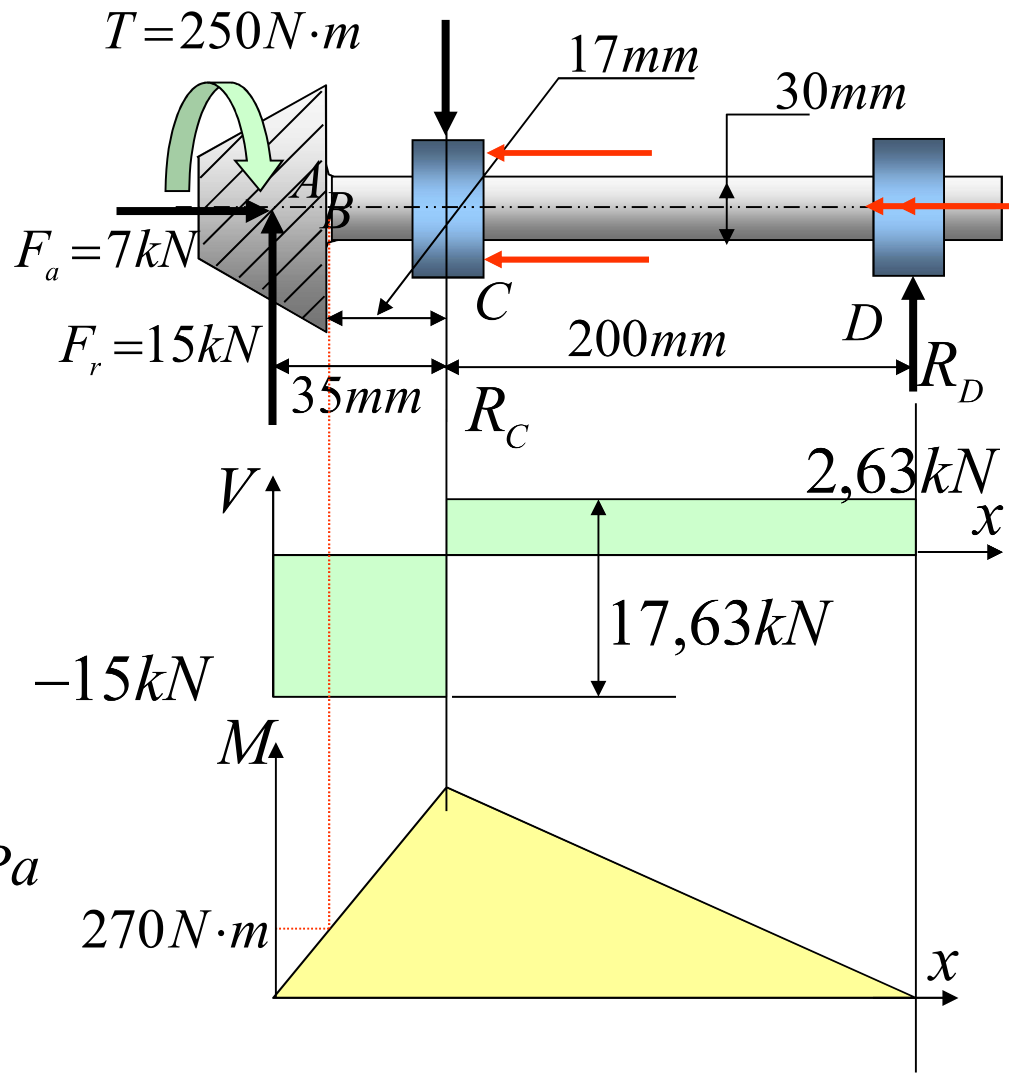
$$A = \frac{\pi\,30^2}{4} = 706{,}9mm^2$$

$$I = \frac{\pi\,30^4}{64} = 39{,}8x10^3\,mm^4$$

$$(\sigma_x)_B = 2{,}4\frac{7x10^3\,N}{706{,}9mm^2}$$

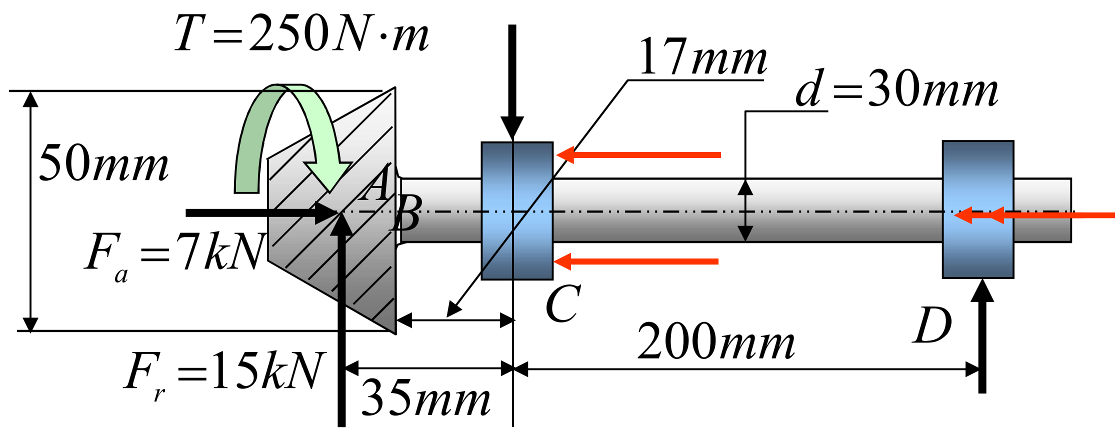
$$+1{,}9\frac{270x10^3\,N\cdot mm\cdot 15mm}{39{,}8x10^3\,mm^4} = 217{,}1MPa$$

(en compression)

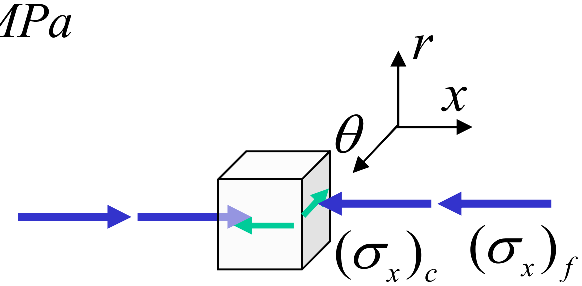


Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

4 - Calcul de $\tau_{x\theta}$ au point B



$$(\tau_{x\theta})_{\mathbf{B}} = K_{ts}\ \frac{T\ r}{J} = -1,6\ \frac{250x10^3\ N \cdot mm \cdot 15mm}{79,5x10^3\ mm^4} = -75,5MPa$$



$$J = \frac{\pi\ 30^4}{32} = 79,5x10^3\ mm^4$$

Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

4- Calcul des contraintes au point C

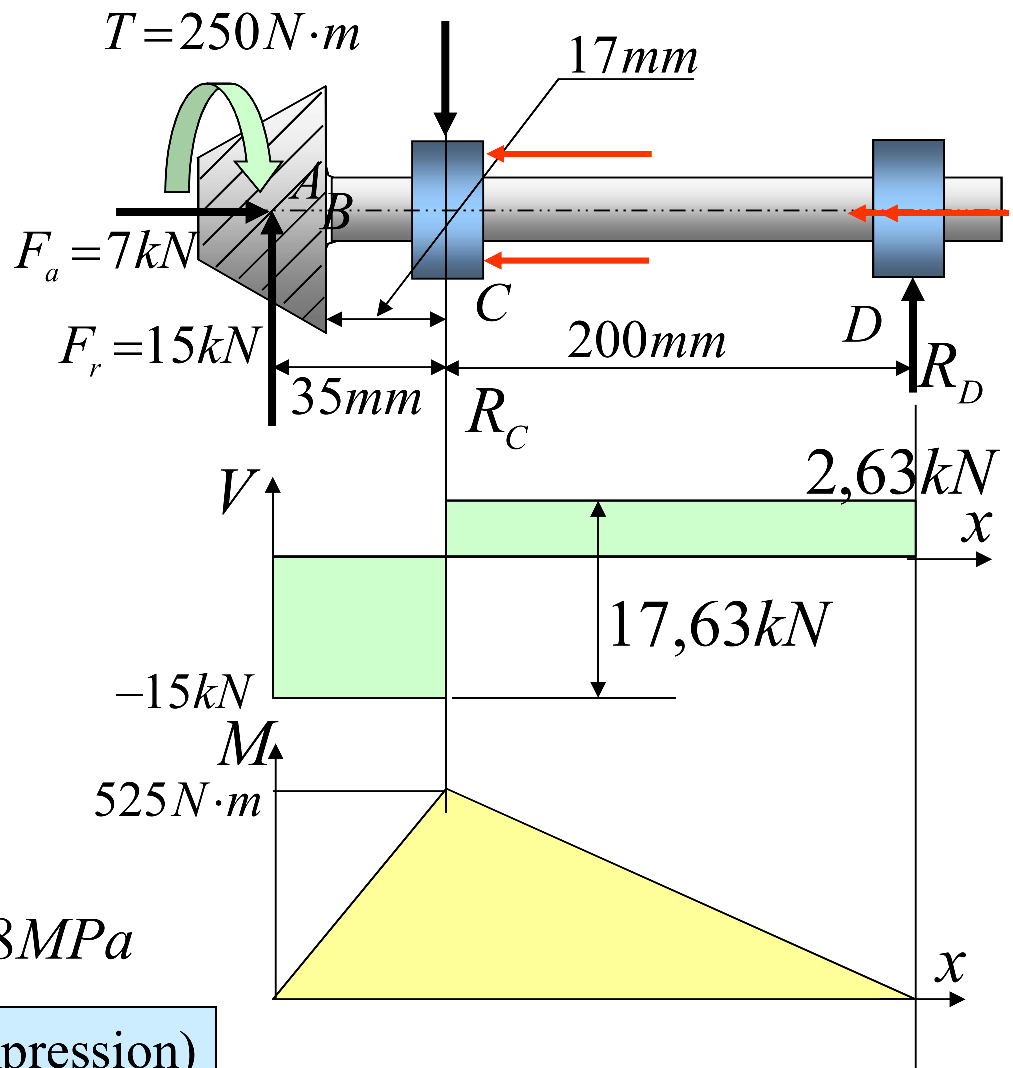
$$\sigma_x = \frac{F_a}{A} + \frac{M\,c}{I}$$

$$A = 706{,}9\,mm^2$$

$$I = 39{,}8x10^3\,mm^4$$

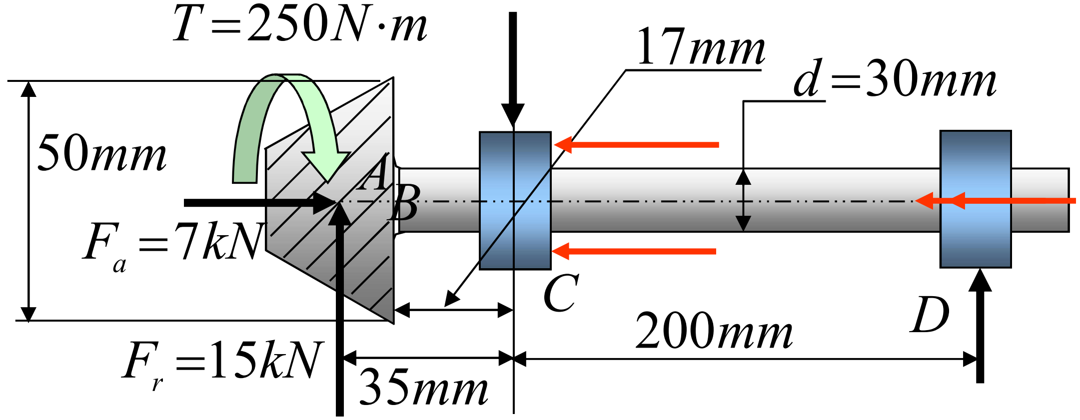
$$(\sigma_x)_C = \frac{7x10^3\,N}{706{,}9} + \frac{525x10^3\,N\cdot mm \cdot 15mm}{39{,}8x10^3\,mm^4} = 207{,}8MPa$$

(en compression)

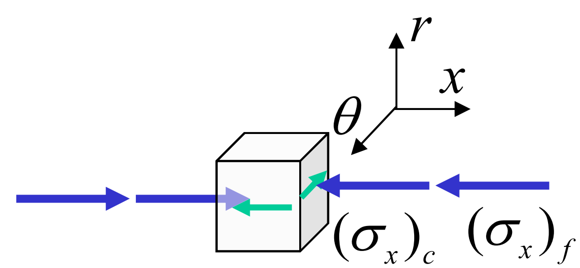


Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

4 - Calcul de $\tau_{x\theta}$ au point C



$$(\tau_{x\theta})_C = \frac{T\,r}{J} = \frac{-250x10^3\,N \cdot mm \cdot 15mm}{79,5x10^3\,mm^4} = -47,2MPa$$



$$J = 79,5x10^3\,mm^4$$

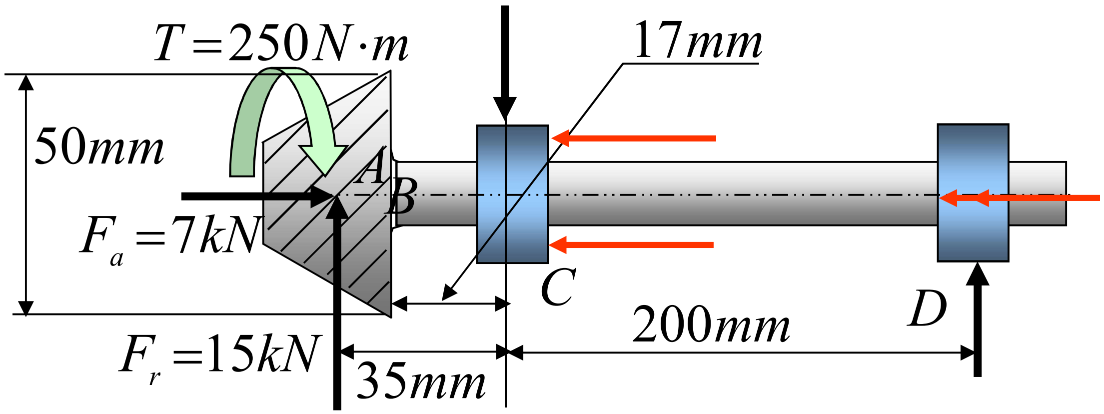
Détermination du facteur de sécurité d'un arbre

Solution

5- Section critique

$$(\sigma_x)_B = -217{,}1\,\text{MPa}$$
$$(\tau_{x\theta})_B = -75{,}5\,\text{MPa}$$

$$(\sigma_x)_C = -207{,}8\,\text{MPa}$$
$$(\tau_{x\theta})_C = -47{,}2\,\text{MPa}$$



La section critique est celle au point B

6- Calcul de FS en B

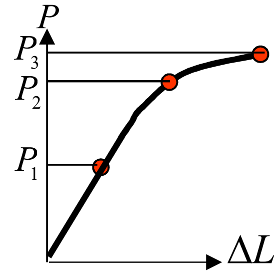
$$(\sigma_x)_B = -217{,}1\,\text{MPa}$$
$$(\tau_{x\theta})_B = -75{,}5\,\text{MPa}$$
$$(\sigma_\theta)_B = 0$$

$$\sigma_1 = 23{,}65\,\text{MPa} \quad ; \sigma_2 = -240{,}75\,\text{MPa} \quad \sigma_3 = \sigma_r = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{23{,}65-(-240{,}75)}{2} = 132{,}2\,\text{MPa}$$

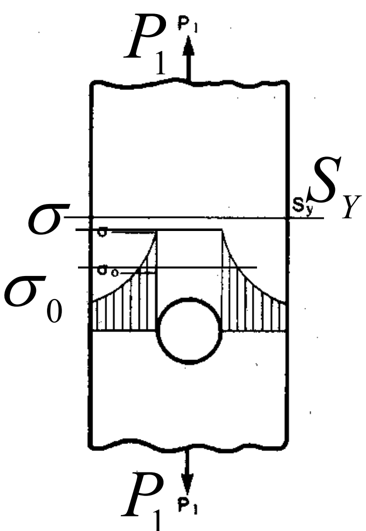
$$\boxed{FS = \frac{680}{2\cdot 132{,}2} = 2{,}57}$$

Comportement de matériaux ductiles



- Présence de concentration de contrainte

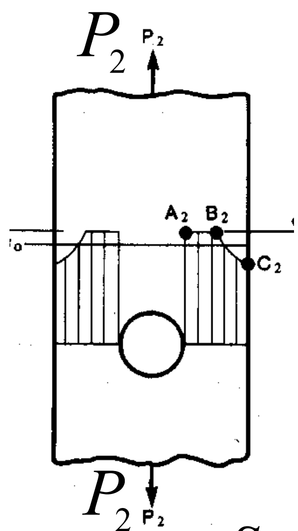
$$\sigma = \sigma_{max}$$
$$\sigma_0 = \sigma_{nom}$$



$$K_{t1} = K_t = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$
$$P_1 \leq P_Y$$

Domaine élastique

K_t s'applique

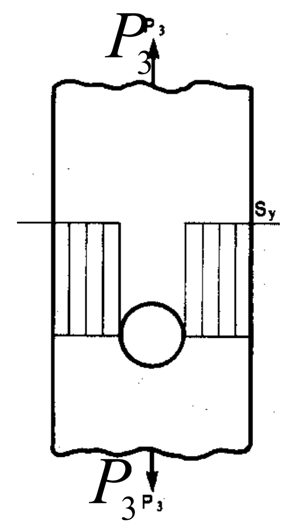


$$K_{t2} < K_t = \frac{S_Y}{\sigma_0}$$
$$P_Y < P_2 < P_L$$

Plasticité partielle

Effet des contraintes résiduelles

K_t ne s'applique pas

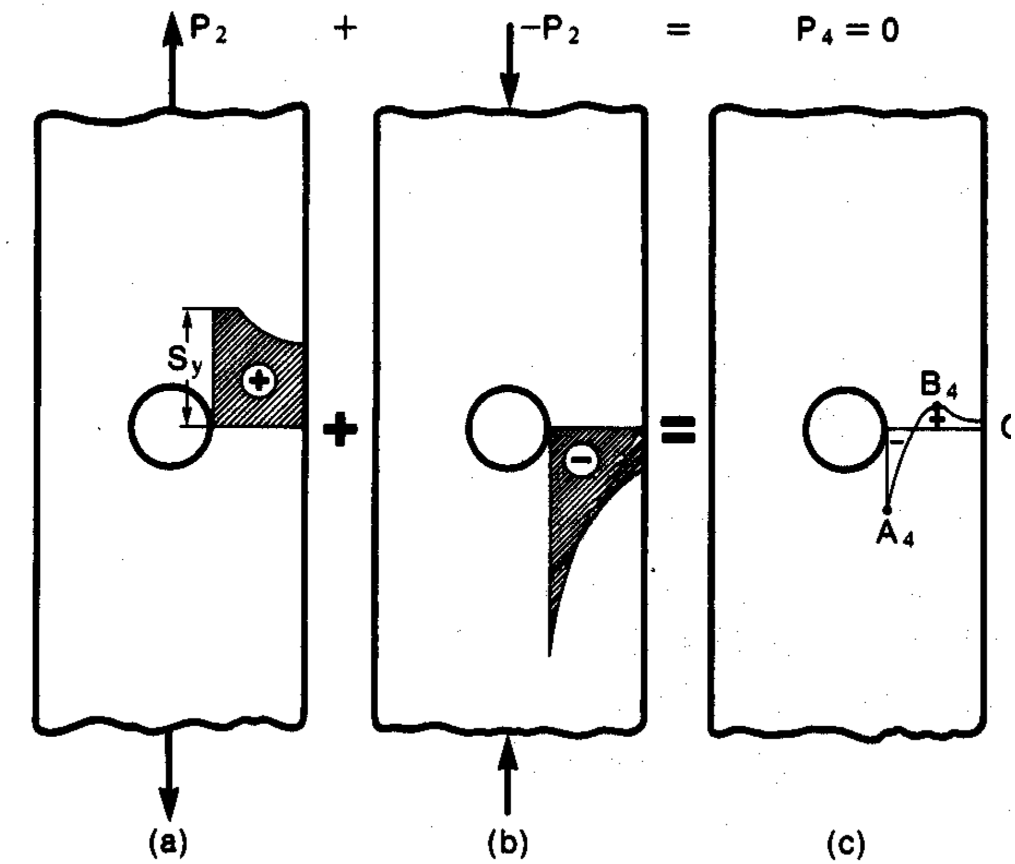


$$K_{t3} = \frac{S_Y}{\sigma_0} = \frac{S_Y}{S_Y} = 1$$
$$P_3 = P_L$$

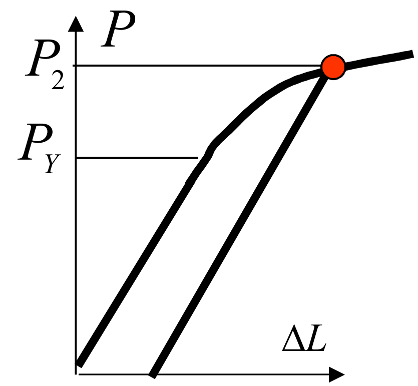
Plasticité totale

K_t ne s'applique pas

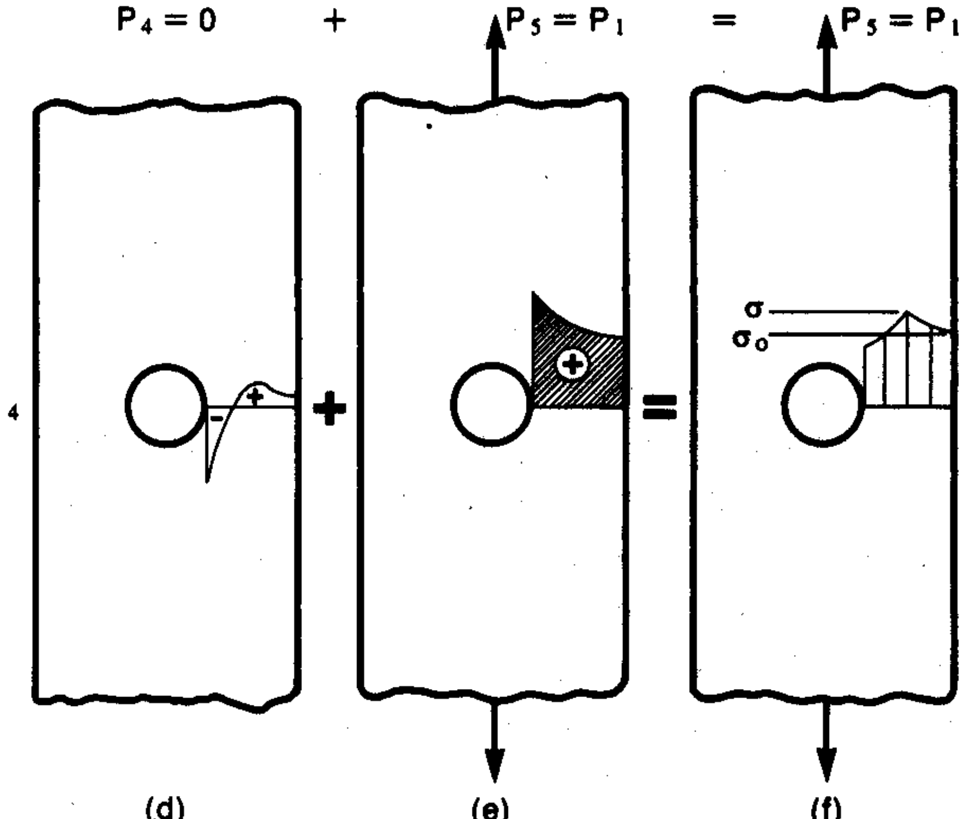
Effet des contraintes résiduelles sur K_t pour un matériau ductile



Chargement Déchargement Contraintes résiduelles



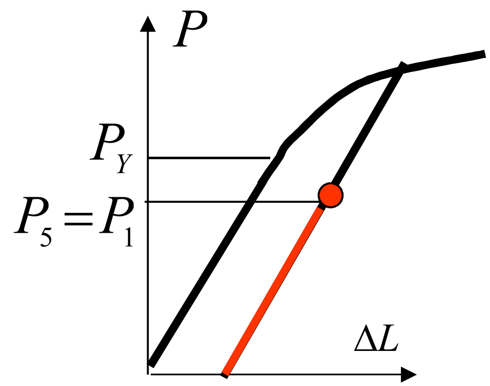
Effet des contraintes résiduelles sur K_t pour un matériau ductile

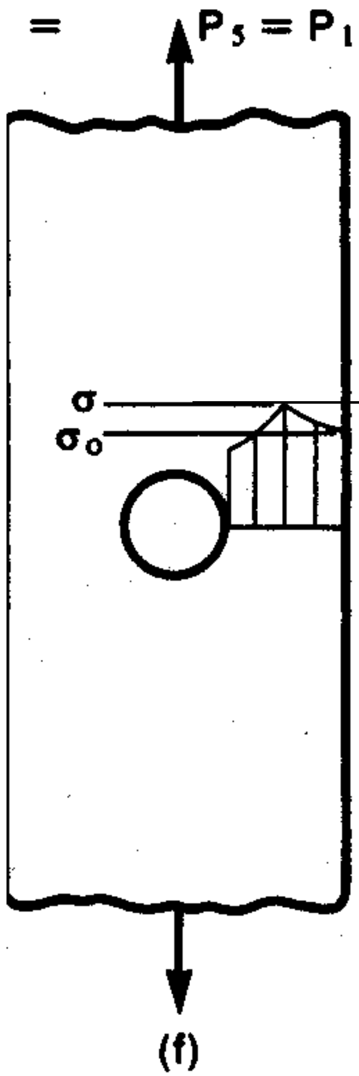


Contraintes résiduelles

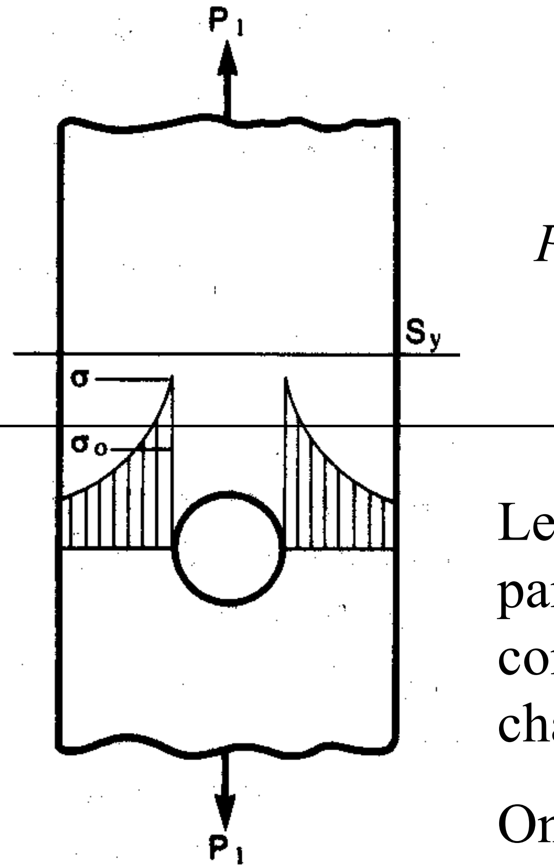
Chargement jusqu 'à $P_5 = P_1$

Distribution résultante

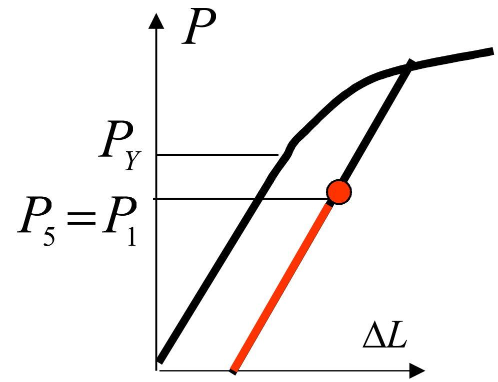




Distribution résultante



Chargement initial dans le domaine élastique



Le fait d'avoir induit une plasticité partielle réduit considérablement les contraintes dans la pièce lors d 'un chargement subséquent.

On peut alors négliger K_t.

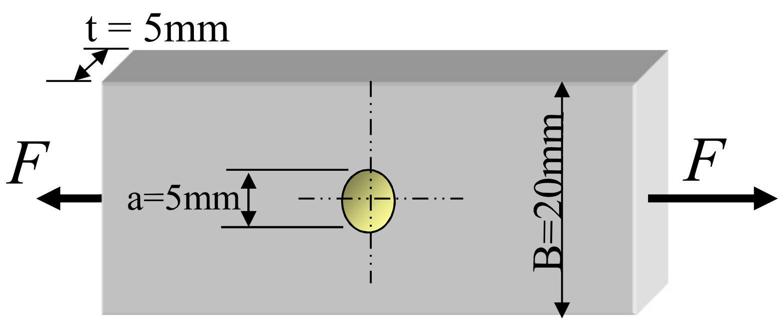
Résumé

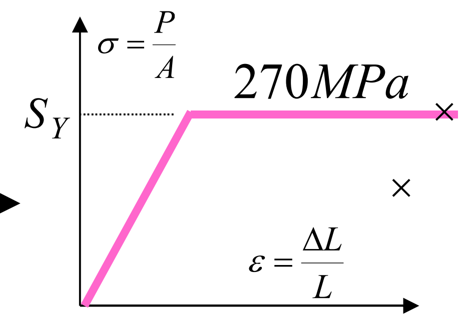
- **Matériaux ductiles**
  - Si on **ne tolère pas** de déformations plastiques dans la structure, on respecte le critère d'écoulement; la pièce demeure dans le domaine élastique et K_t s'applique
  - Si **on tolère** des déformations plastiques localisées, il y a des contraintes résiduelles qui annulent l'effet multiplicateur de K_t et on ignore K_t lors du design

- **Matériaux fragiles**
  - Peu ou pas de déformations plastiques
  - Pas de contraintes résiduelles
  - On considère toujours l'effet de K_t (sauf pour les fontes)

Exemple :

Soit la plaque perforée ci-contre.





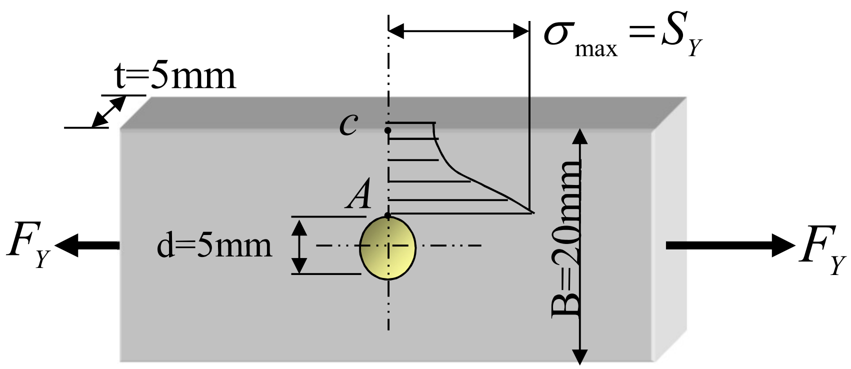
a) Calculer la contrainte agissant sur la paroi du trou en fonction de la force F sachant que le facteur $K_t = 2,45$. Faire ce calcul pour une force F variant de zéro à la force limite F_L

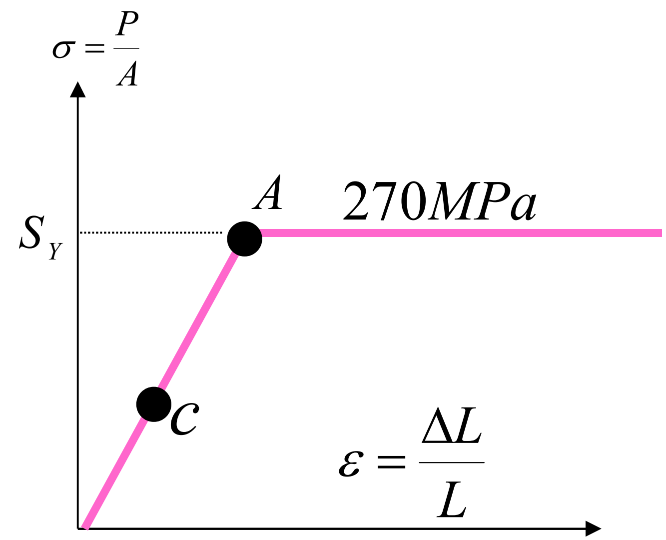
b) Quel est la réserve dans la plaque lorsque la force est F_Y? Le matériau a un comportement élastique parfaitement plastique comme montré.

a) La figure ci-dessous montre la situation lorsque la contrainte à la paroi du trou atteint **tout juste S_Y**

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nominal}} = 2{,}45 \frac{F_Y\,(N)}{(20-5)\cdot 5(mm^2)} = 270MPa$$

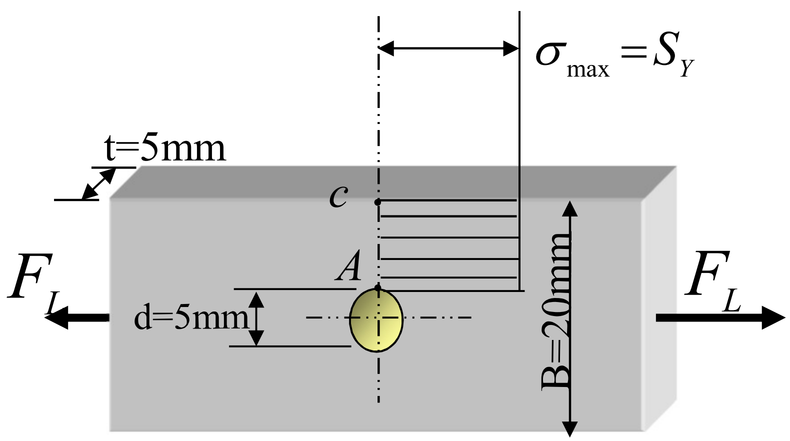
$$\Rightarrow F_Y = \frac{270\cdot(20-5)\cdot 5}{2{,}45} = 8{,}265kN$$

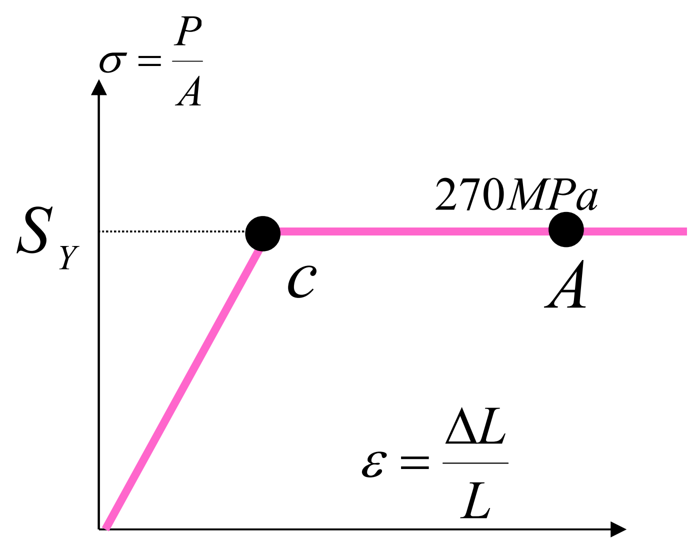




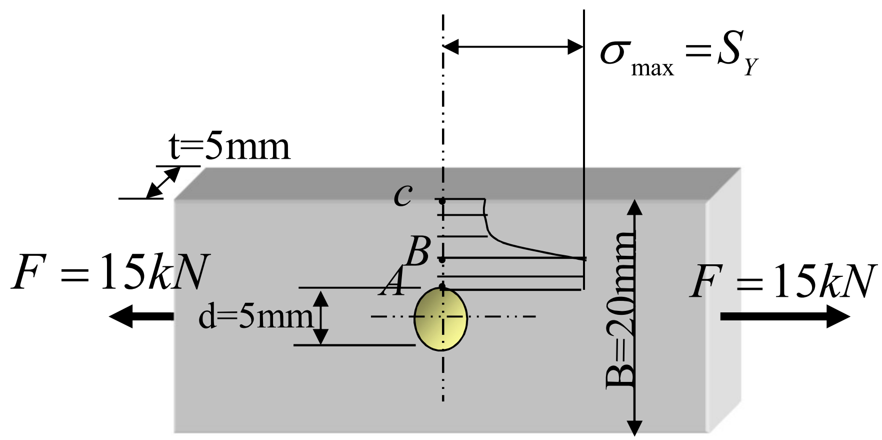
Lorsque *toute* la section est plastifiée, le facteur de concentration de contrainte ne s 'applique pas. La force limite F_L se calcule :

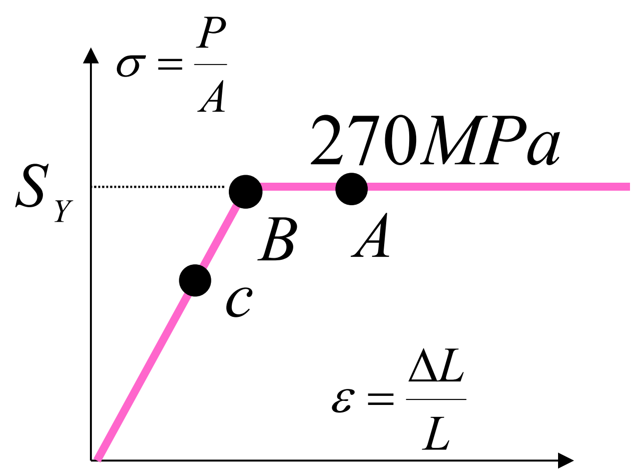
$$S_Y = \frac{F_L}{(20-5)\cdot 5} \Rightarrow F_L = 270\cdot(20-5)\cdot 5 = 20{,}250 kN$$





À **une valeur intermédiaire** de la force $F_Y < F < F_L$ (ex. 15 kN) la situation serait comme celle ci-dessous





On ne peut pas calculer cette distribution d 'une façon analytique.
Une méthode numérique comme les éléments finis permet de le faire.

b) La réserve restant dans la plaque au moment où la contrainte atteint la limite d'écoulement se calcule par :

$$F_Y = \frac{S_Y \cdot A_{net}}{K_t} = 8265N$$

$$F_L = S_Y \cdot A_{net} = 20250N$$

$$Réserve = \frac{F_L}{F_Y} = S_Y \cdot A_{net} \frac{K_t}{S_Y \cdot A_{net}} = \frac{20250}{8265} = 2{,}45 = K_t$$

Formulaire type à l’examen

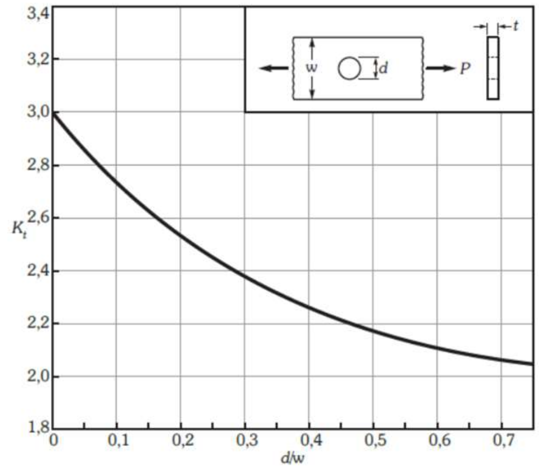


Figure D.1 Plaque avec trou transversal, soumise à une traction ou à une compression axiale.
$\sigma_{nom} = P/[(w-d)t]$

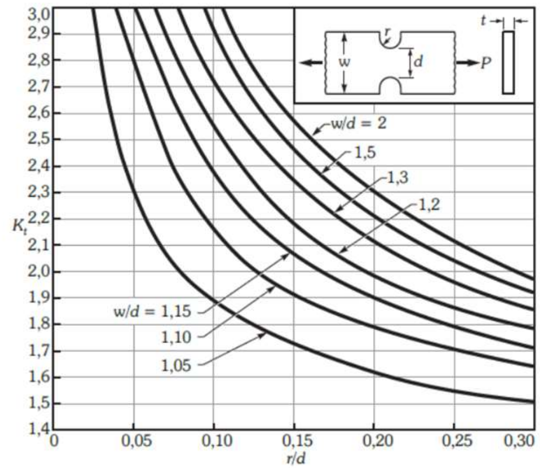


Figure D.2 Plaque avec encoche, soumise à une traction ou à une compression axiale.
$\sigma_{nom} = P/(d\ t)$

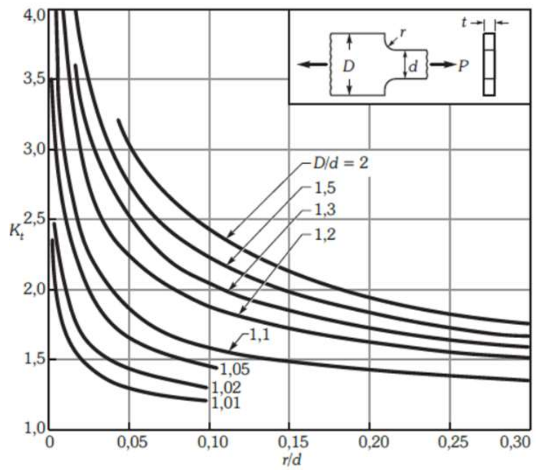


Figure D.3 Plaque avec épaulement, soumise à une traction ou à une compression axiale.
$\sigma_{nom} = P/(d\ t)$

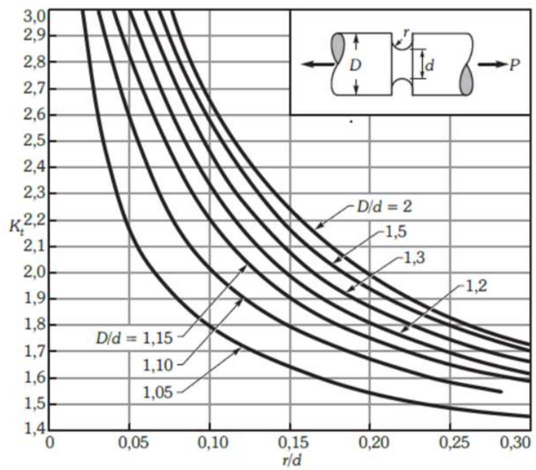


Figure D.4 Barreau cylindrique avec rainure circulaire, soumis à une traction.
$\sigma_{nom} = P/(\pi\ d^2/4)$

Formulaire type à l'examen

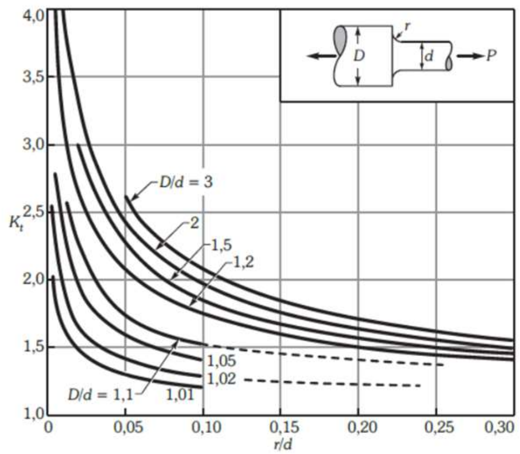


Figure D.5 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une traction axiale.

$\sigma_{nom} = P/(\pi\ d^2/4)$

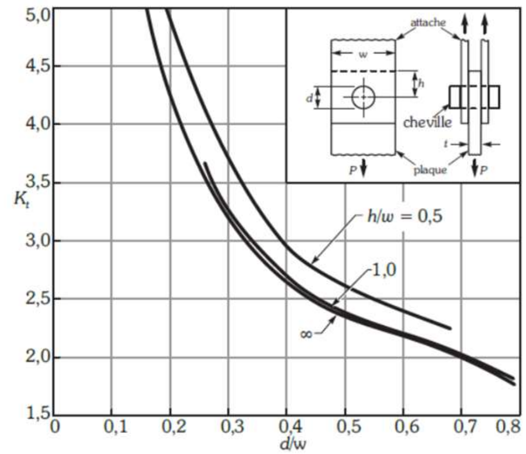


Figure D.6 Plaque retenue par un goujon passant dans un trou et soumise à une traction axiale (jeu négligeable entre le goujon et le trou). Pour un jeu non négligeable, augmenter K_t de 35 à 50 %.

$\sigma_{nom} = P/[(w - d)\ t]$

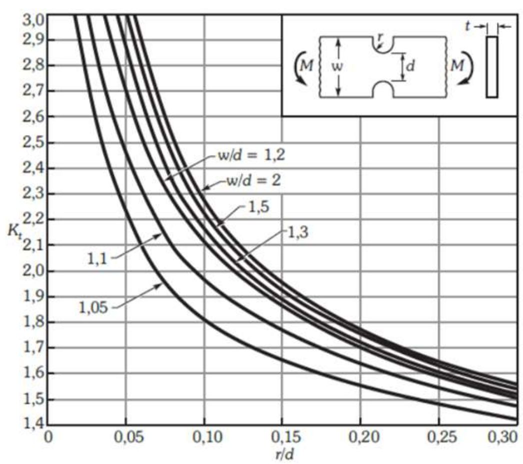


Figure D.7 Plaque avec encoche, soumise à une flexion.

$\sigma_{nom} = M(d/2)/(td^3/12)$

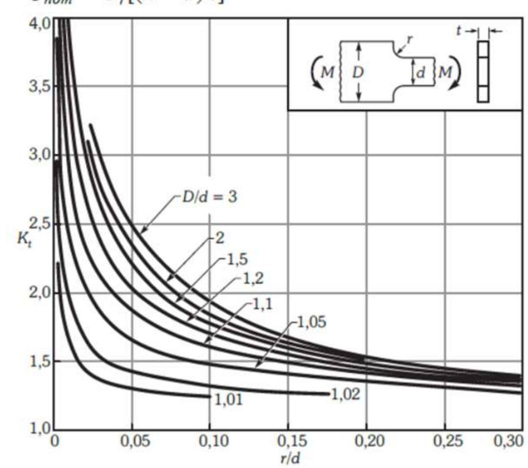


Figure D.8 Plaque avec épaulement, soumise à une flexion.

$\sigma_{nom} = M(d/2)/(t\ d^3/12)$

Formulaire type à l'examen

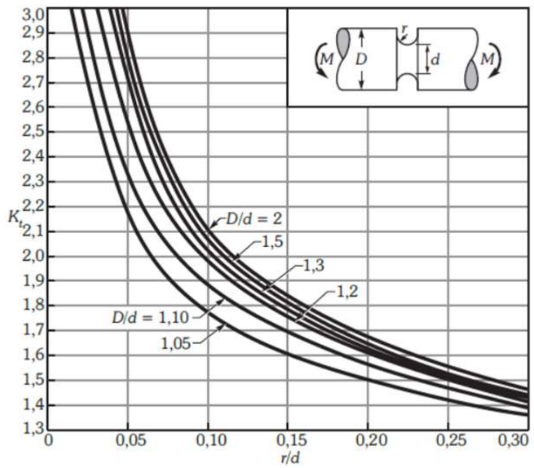


Figure D.9 Barreau cylindrique avec rainure circulaire, soumis à une flexion.
$\sigma_{nom} = M(d/2)/(\pi\ d^4/64)$

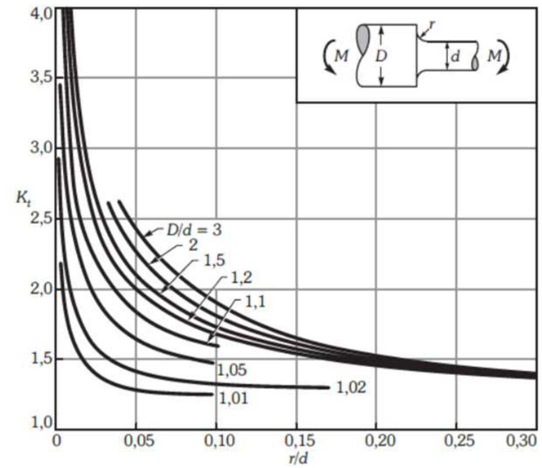


Figure D.10 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une flexion.
$\sigma_{nom} = M(d/2)/(\pi\ d^4/64)$

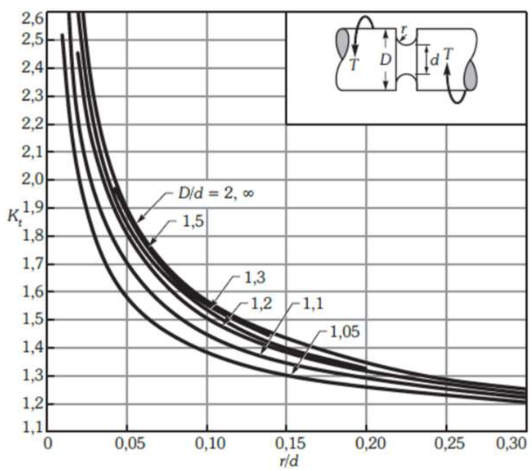


Figure D.11 Barreau cylindrique avec rainure circulaire, soumis à une torsion.
$\tau_{nom} = T(d/2)/(\pi\ d^4/32)$

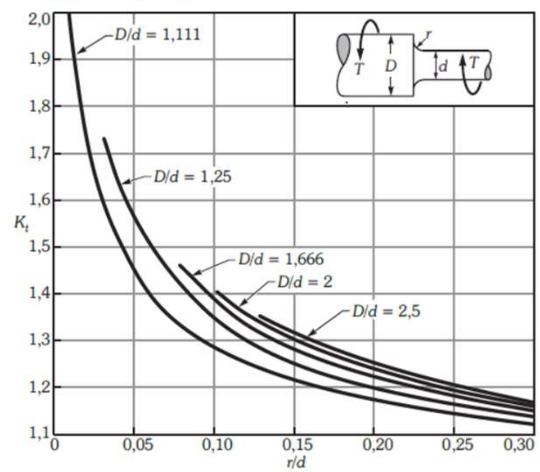


Figure D.12 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une torsion.
$\tau_{nom} = T(d/2)/(\pi\ d^4/32)$