



Table des matières

CONTENU DE COURS		PAGES
Section 1 : Révision des notions du cours MEC1420		11
Principes de base		13
Révision MEC1410 : statique		19
Chargement uniaxial		26
Flexion		32
Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants		36
Contraintes dans les poutres en flexion		47
Torsion des sections circulaires		56
Torsion des sections ouvertes et composées		59
Section rectangulaire minces; Applications aux profilés minces		66
Critères de défaillance des matériaux (ductiles : Tresca et Von Mises; fragiles)		108
Déformations		111
Relation contraintes/déformations		117
Section 2 : Flexion gauche		122
Efforts internes et analyse des contraintes associés à la flexion gauche		123
Contraintes dues à la flexion pure		127
Section 3 : Instabilité, flambement des colonnes, déversement de poutres, voilement		161
Définition de stabilité		163
Stabilité d'une membrure rigide en compression		164
Stabilité d'une membrure élastique en compression		180
Formule d'Euler		201
Colonne « rotule-rotule » soumise à une charge excentrée		206
Conception d'une colonne		213
Méthode de résolution approx. pour une poutre-colonne (chargement combiné)		218
Déversement latéral des poutres		234
Voilement des sections à parois minces		235



Table des matières

Section 4 : Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (Méthodes énergétiques)		238
Énergie de déformation		242
Énergie de déformation : traction, flexion et torsion		246
Théorème de Maxwell-Betti		253
Théorème de Castigliano		262
Théorème de Castigliano pour systèmes isostatiques et hyperstatiques		268, 283
Effets de l'effort tranchant		307
Section 5 : Concepts d'analyse limite et contraintes résiduelles		333
Modèles du comportement des matériaux		334
Analyse limite au chargement uniaxial, en torsion, à la flexion		336, 344, 354
Contraintes résiduelles		378
Section 6 : Concentration de contrainte		397
Valeur théorique du facteur de concentration de contrainte		402
Comportement des matériaux en présence de concentration de contrainte		420
Section 7 : Fatigue		433
Mécanismes de rupture par fatigue		435
Méthode d'essai normalisé		442
Diagramme S-N		445
Limite d'endurance		448
Diagramme de Goodman		465
Contraintes combinées normales et de cisaillement		481
Domage cumulatif		499



Formulaire MEC2405 Résistance des matériaux II

Section 1 : Rappel de résistance des matériaux I (MEC 1420)

$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} = -\frac{M_z}{S_z}$$

$$\tau_{x\theta} = \frac{Tr}{J}$$

Torsion section ouverte

$$\tau_{xi} = \frac{Tt}{J} \quad J = \sum \frac{bt^3}{3}$$

$$\sigma_x = \frac{Pr_m}{2t}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$\sigma_\theta = \frac{Pr_m}{t}$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

Torsion section fermée

$$\tau_{xs} = \frac{T}{2At} \quad J = \frac{4\bar{A}^2}{\int \frac{ds}{t}}$$

MEC1410

MEC1420

Superposition de contraintes (état plan de contrainte sur la surface z)

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan(2\theta_1) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$



Relations contraintes / déformations / température

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha\Delta T$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] + \alpha\Delta T$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Critères de défaillance

Tresca $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{S_Y}{2}$

$$FS = \frac{S_Y}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} = \frac{S_Y}{2\tau_{\max}}$$

$$S_{S_Y} = \frac{S_Y}{2}$$

Von Mises $\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = S_Y$

$$S_{S_Y} = 0,577S_Y$$

Section 2 : Flexion gauche

$$\bar{y}_i = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

MEC1410 $\tan \beta = \frac{M_y}{M_z}$

$$\tan \alpha = \frac{M_z I_{yz} + M_y I_z}{M_y I_{yz} + M_z I_y} = \frac{I_{yz} + I_z \tan \beta}{I_{yz} \tan \beta + I_y}$$

$$\sigma_x = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[(M_y I_{yz} + M_z I_y) y - (M_z I_{yz} + M_y I_z) z \right]$$

$$\sigma_x = -\left[\frac{M_y}{I_{yz}^*} + \frac{M_z}{I_z^*} \right] y + \left[\frac{M_z}{I_{yz}^*} + \frac{M_y}{I_y^*} \right] z$$

$$I_y^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_z}$$

$$I_z^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_y}$$

$$I_{yz}^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_{yz}}$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_i z_i} + \bar{y}_i \bar{z}_i A_i)$$

MEC1410

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta - I_{yz} \sin 2\theta$$

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta + I_{yz} \sin 2\theta$$

MEC1410

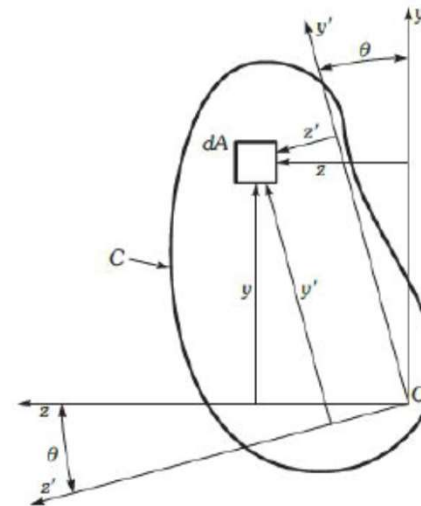
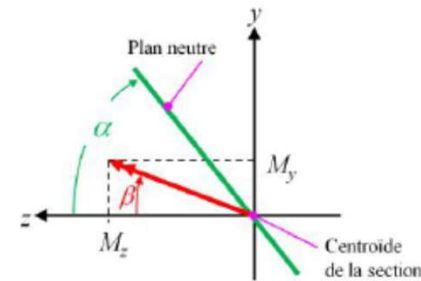


Figure A.4 Réaction du système d'axes. Le système d'axes y' et z' fait avec le système d'axes y et z un angle θ .

RDMII

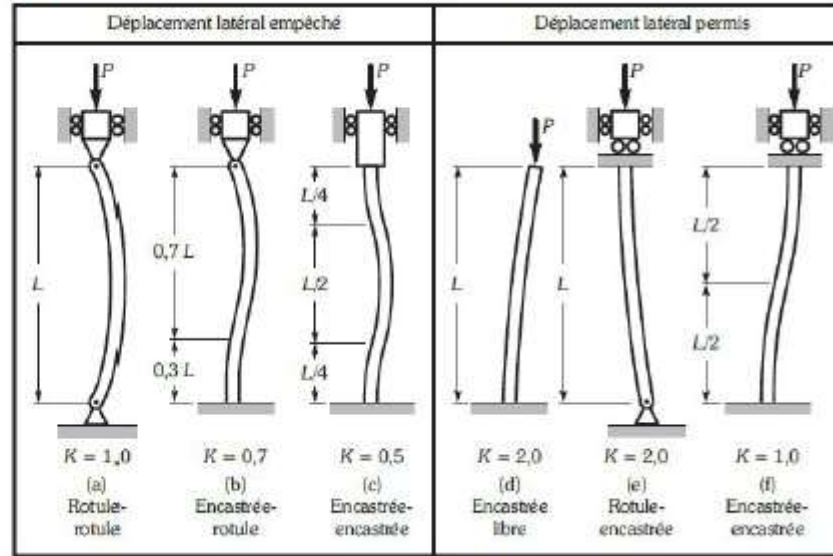
Section 3 : Instabilité et flambement

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

MEC1410



Code ACNOR

Flexion 2 plans

Flexion 1 plan

$$C_r = \phi AS_Y (1 + \lambda^{2n})^{-1/n} \quad \lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2 E}}$$

$$F_{amp} = \frac{1}{1 - \frac{C}{P_{cr}}}$$

$$\frac{C}{C_r} + \frac{F_{amp} M_z}{M_{rz}} + \frac{F_{amp} M_y}{M_{ry}} \leq 1$$

$$\frac{C}{C_r} \leq 1,0 \quad \frac{C}{C_{ri}} + \frac{F_{amp/i} M_i}{M_{ri}} \leq 1,0$$

RDMII



Section 4 : Énergie de déformation

Théorème de réciprocité
$$\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i)_I \bullet (\bar{\delta}_i)_{II} = \sum_{j=1}^m (\bar{P}_j)_{II} \bullet (\bar{\delta}_j)_I$$

Énergie de déformation
$$U = \sum \frac{P_i^2 L}{2AE} + \sum \frac{T_i^2 L}{2GJ} + \sum \int \frac{M_i^2 dx}{2EI} + \sum \int \frac{V_i^2 dx}{2A_c G}$$

Théorème de Castigliano
$$\frac{dU}{dF} = \sum P_i \frac{\partial P_i}{\partial F} \frac{L}{AE} + \sum T_i \frac{\partial T_i}{\partial F} \frac{L}{GJ} + \sum \int M_i \frac{\partial M_i}{\partial F} \frac{dx}{EI} + \sum \int V_i \frac{\partial V_i}{\partial F} \frac{dx}{A_c G}$$

Section 7 : Fatigue

Critère de Goodman

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u}}$$

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u}}$$

Facteur de correction

$$k_e = \frac{1}{q(K_t - 1) + 1}$$

Matériaux ferreux

$$N = 1000 \left(\frac{S_f}{0,9S_u} \right)^{\frac{3}{\log\left(\frac{S_e}{0,9S_u}\right)}}$$

$$\frac{S_f}{0,9S_u} = \left(\frac{S_e}{0,9S_u} \right)^{\frac{\log N - 3}{3}}$$

Matériaux non ferreux

$$N = 1000 \left(\frac{S_f}{0,9S_u} \right)^{\frac{5,7}{\log\left(\frac{S_e}{0,9S_u}\right)}}$$

$$\frac{S_f}{0,9S_u} = \left(\frac{S_e}{0,9S_u} \right)^{\frac{\log N - 3}{5,7}}$$

Contraintes équivalentes

$$\sigma_{a'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 \right] + 3(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2)}$$

$$\sigma_{m'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xm} - \sigma_{ym})^2 + (\sigma_{ym} - \sigma_{zm})^2 + (\sigma_{zm} - \sigma_{xm})^2 \right] + 3(\tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{zxm}^2)}$$

$$\sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i} = 1$$

$$n_r = N_r \left(1 - \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i} \right)$$

RDMII

MEC2310

Facteurs de concentration de contraintes

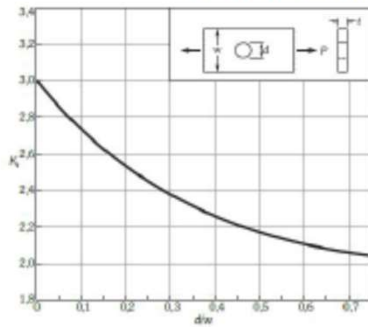


Figure D.1 Plaque avec trou transversal, soumise à une traction ou à une compression axiale.
 $\sigma_{max} = P/[(w-d)y]$

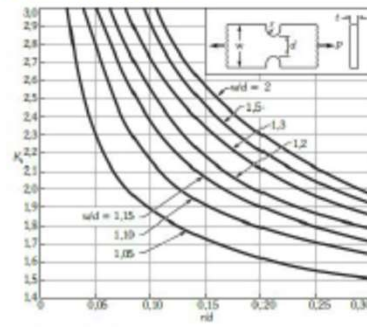


Figure D.2 Plaque avec encoche, soumise à une traction ou à une compression axiale.
 $\sigma_{max} = P/(d \cdot t)$

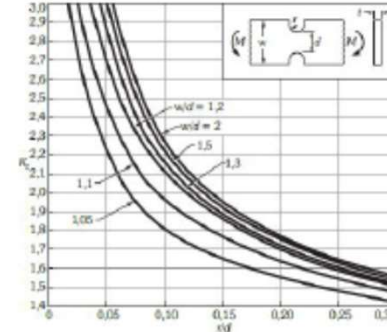


Figure D.7 Plaque avec encoche, soumise à une flexion.
 $\sigma_{max} = M(d/2)/(t d^2/12)$

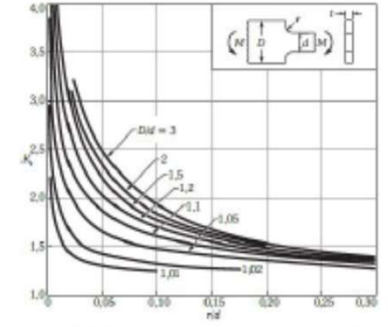


Figure D.8 Plaque avec épaulement, soumise à une flexion.
 $\sigma_{max} = M(d/2)/(t d^2/12)$

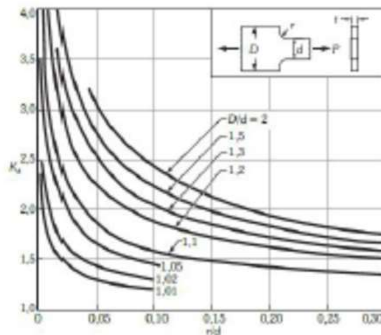


Figure D.3 Plaque avec épaulement, soumise à une traction ou à une compression axiale.
 $\sigma_{max} = P/(d \cdot t)$

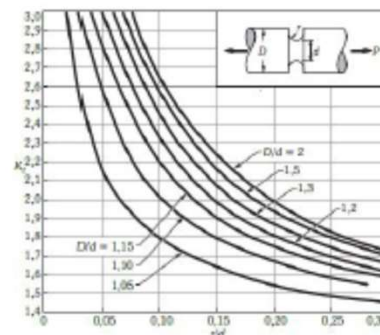


Figure D.4 Barreau cylindrique avec rainure circulaire, soumis à une traction.
 $\sigma_{max} = P/(\pi d^2/4)$

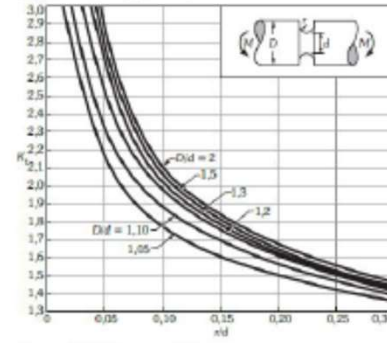


Figure D.9 Barreau cylindrique avec rainure circulaire, soumis à une flexion.
 $\sigma_{max} = M(d/2)/(\pi d^3/64)$

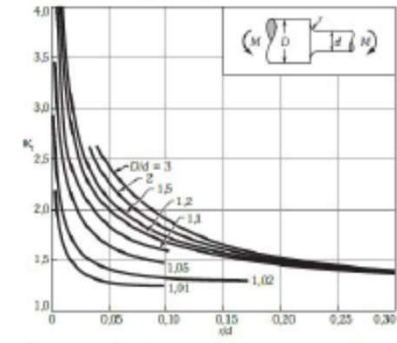


Figure D.10 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une flexion.
 $\sigma_{max} = M(d/2)/(\pi d^3/64)$

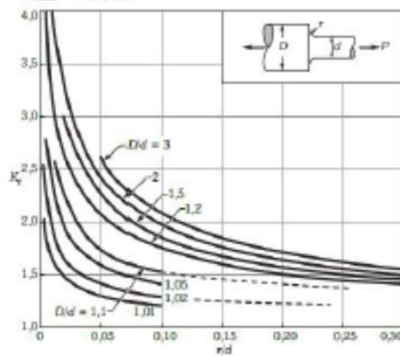


Figure D.5 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une traction axiale.
 $\sigma_{max} = P/(\pi d^2/4)$

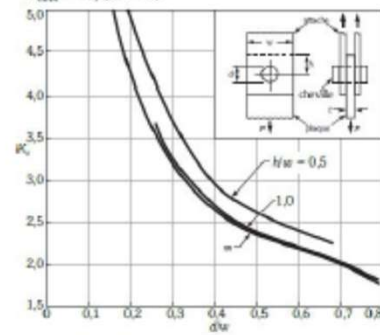


Figure D.6 Plaque retenue par un goujon passant dans un trou et soumise à une traction axiale (jeu réglable entre le goujon et le trou). Pour un jeu non négligeable, augmenter K_t de 35 à 50 %.
 $\sigma_{max} = P/[(w-d)t]$

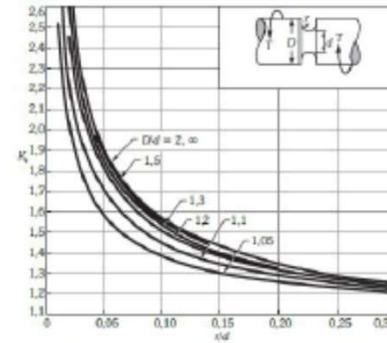


Figure D.11 Barreau cylindrique avec rainure circulaire, soumis à une torsion.
 $\tau_{max} = T(d/2)/(\pi d^3/32)$

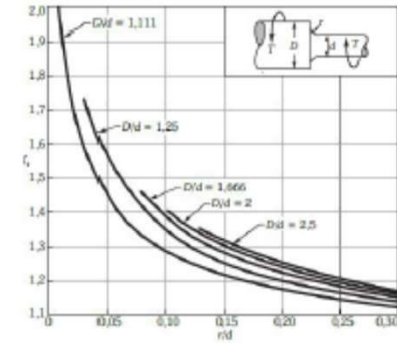


Figure D.12 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une torsion.
 $\tau_{max} = T(d/2)/(\pi d^3/32)$



« L'ingénieur est un type qui sait ce qu'il peut négliger. »

Prof. E. Juillard, 1886-1982

Pouvoir négliger est, en technique, une nécessité tout aussi impérieuse que savoir calculer. Mais savoir négliger est un art difficile et subtil qui exige à la fois une connaissance approfondie des phénomènes ainsi que des techniques, et un jugement sûr pour évaluer le degré d'approximation nécessaire, encore compatible avec les buts à atteindre. L'ingénieur doit savoir que les modèles simples sont faux, mais que ceux qui ne le sont pas sont inutilisables. Entre un perfectionnisme fatal parce que trop coûteux et un empirisme dangereux par son caractère aléatoire, il doit trouver le juste compromis qui satisfait en même temps les exigences de qualité et les impératifs économiques. Il y a des choses que l'on peut calculer, il y en a d'autres qu'il faut estimer ou sentir. L'ingénieur doit être capable des deux démarches et, plus encore, il doit avoir le discernement nécessaire pour faire la distinction entre les deux.

La réalité est toujours plus complexe que la théorie qui tente de la décrire. En effet, pour appréhender cette réalité, on est bien obligé de la simplifier et de la schématiser. Elle s'en venge quelquefois avec malice ou violence, rappelant l'ingénieur imprudent à sa condition d'homme ... Mais souvent aussi, elle se prête à ce jeu et accepte de donner à l'ingénieur la joie d'avoir participé à une création ...

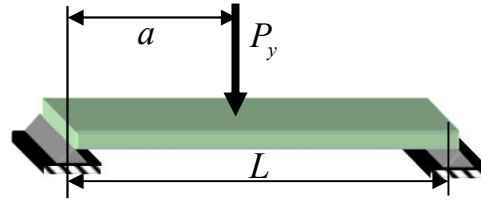
Notions de contrainte

- Études des contraintes pour les trois types de chargement simple d'une membrure droite

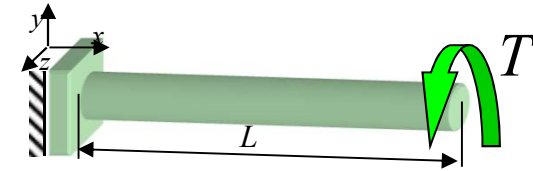


Chargement axial

Traction-compression et réservoir sous pression



Chargement en flexion



Chargement en torsion

Combinaisons des chargements



Conception de structures mécaniques

- Critères de conception

1. Résistance

Révision RDM I, flexion gauche, analyse limite, concentration de contrainte

2. Rigidité

Révision RDM I, méthodes énergétiques

3. Instabilité

Instabilité de membrures rigides, flambement de membrures élastiques

4. Fatigue

Chargements cycliques



Conception de structures mécaniques

1. Résistance

- Prédire les contraintes maximales et les comparer à un critère de défaillance
- Éviter les déformations plastiques

2. Rigidité

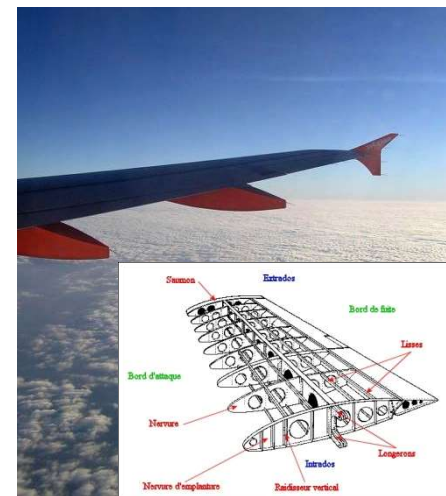
- Prédire les valeurs maximales des déformations ou des déplacements

3. Instabilité

- Éviter l'effondrement de la structure suite à un phénomène d'instabilité

4. Fatigue

- Prédire la durée de vie d'une structure sous chargements cycliques





Conception de structures mécaniques

1. Résistance

- Prédire les contraintes maximales et les comparer à un critère de défaillance

Facteur de sécurité en résistance

$$F S = \frac{\text{Contrainte permise}}{\text{Contrainte induite}}$$

2. Rigidité

- Prédire les valeurs maximales déformations ou les déplacements

Ex. critère sur le déplacement

$$d < d_{\max}$$

3. Instabilité

- Éviter l'effondrement de la structure suite à un phénomène d'instabilité

Formule d'Euler, Code ACNOR

$$\frac{C}{C_r} + \frac{F_{amp/z} M_z}{M_{rz}} + \frac{F_{amp/y} M_y}{M_{ry}} \leq 1,0$$

4. Fatigue

- Durée de vie d'une structure sous chargements cycliques

Loi de Goodman, Loi de Miner

$$\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = 1,0$$



Critères de défaillance

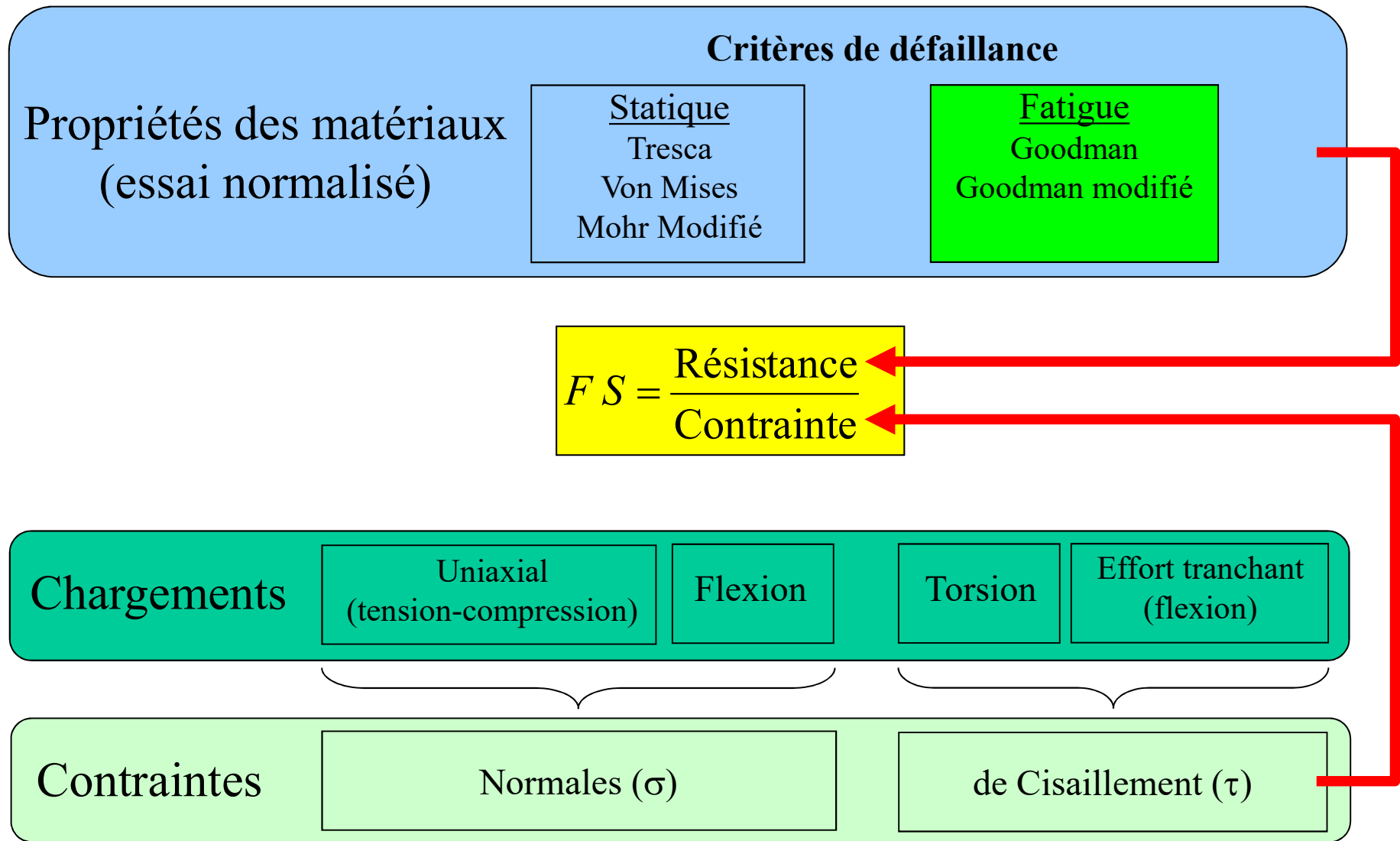
Évaluation de la résistance de pièces mécaniques, l'ingénieur doit évaluer le facteur de sécurité (FS) :

$$FS = \frac{\text{Contrainte permise}}{\text{Contrainte induite}} = \frac{\text{Résistance}}{\text{Contrainte}}$$

Contrainte permise est évaluée à partir des propriétés du matériau de la pièce et des critères de défaillance

Contrainte induite est calculée à partir du chargement et de la géométrie de la pièce

Critères de défaillance



Rappel de certaines notions de MEC1410 (1/4)

- **Diagramme de corps libéré (DCL) en 3D**
 - Addition vectorielle
 - Calcul du moment causé par une force

Équations d'équilibre d'un corps 3D

Les équations d'équilibre d'un corps rigide 3D sous forme vectorielle sont :

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

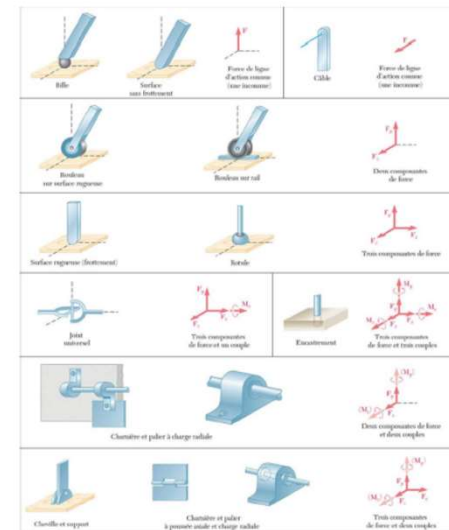
Les conditions d'équilibre peuvent se traduire par six équations scalaires comme suit:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad \sum F_y = 0 & \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \quad \sum M_y = 0 & \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

Ces 6 équations donnent une solution pour un maximum de 6 inconnues.

MEC1410: Cours #6 p. 5

Réactions aux appuis et liaisons des corps rigides 3D



MEC1410: Cours #6 p. 6

Rappel de certaines notions de MEC1410 (2/4)

- Propriétés de surface
 - Position du centroïde

Centres géométriques: Surfaces

Pour une plaque homogène d'épaisseur uniforme :

$$\Delta W = \rho g t \Delta A \quad W = \rho g t A$$

ρ = masse volumique du matériau, g = accélération gravitationnelle, t = épaisseur de la plaque

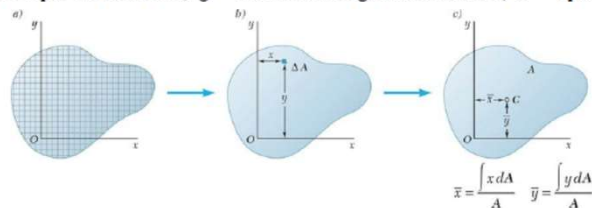


Figure 5.3 Centre géométrique d'une surface

À partir des équations d'équivalence :

$$\sum M_y : \bar{x}A = x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \dots + x_n \Delta A_n$$

$$\sum M_x : \bar{y}A = y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \dots + y_n \Delta A_n$$

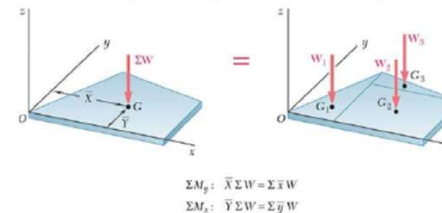
À la limite $dA \rightarrow 0$:

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA$$

MEC1410: Cours #7 p. 4

Figures composées

Pour obtenir les coordonnées \bar{X} et \bar{Y} du centre de gravité G de la plaque, on subdivise la plaque en géométries simples:



$$\sum M_y : \bar{X} \Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$

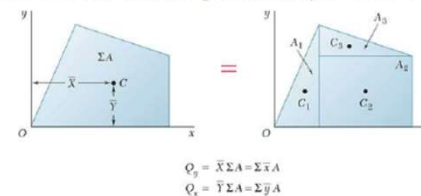
$$\sum M_x : \bar{Y} \Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

Figure 5.9 Centre de gravité d'une plaque composée

$$\sum M_y : \bar{X} \Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$

$$\sum M_x : \bar{Y} \Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

Pour une plaque homogène d'épaisseur uniforme, le centre de gravité G coïncide avec le centre géométrique C de sa surface.



$$Q_y = \bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$

$$Q_x = \bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

Figure 5.10 Centre géométrique d'une surface composée

$$Q_y : \bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$

$$Q_x : \bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

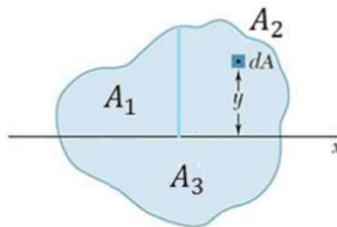
MEC1410: Cours #7 p. 10

Rappel de certaines notions de MEC1410 (3/4)

- Propriétés de surface
 - Second moments de surface (I_y, I_z)
 - Théorème des axes parallèles
 - Rayon de giration ($k = (I/A)^{1/2}$) → nous utiliserons r dans ce cours

Surfaces composées

Considérons une surface A composée de plusieurs surfaces A_1, A_2, A_3, \dots



On peut écrire:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

$$\int y^2 dA = \int y^2 dA_1 + \int y^2 dA_2 + \int y^2 dA_3 + \dots$$

$$I_x(A) = I_x(A_1) + I_x(A_2) + I_x(A_3) + \dots$$

MEC1410: Cours #11 p. 11

Théorème des axes parallèles

Considérons le second moment d'une surface A par rapport à l'axe AA' . En ajoutant un axe BB' passant par le centre géométrique, on a $y = y' + d$ où d correspond à la distance entre les axes AA' et BB' .

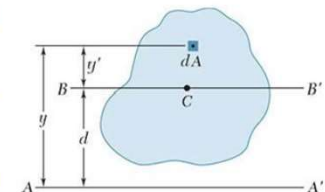


Figure 9.9

En remplaçant y dans l'équation du second moment de surface on trouve:

$$I_{AA'} = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

$$Q_{BB'} = \int y' dA = 0$$

$$I = \bar{I} + A d^2$$

MEC1410: Cours #11 p. 8

Rappel de certaines notions de MEC1410 (4/4)

- Propriétés de surface
 - Moment produit d'une surface (I_{yz})
 - Théorème de translation

PRODUIT D'INERTIE

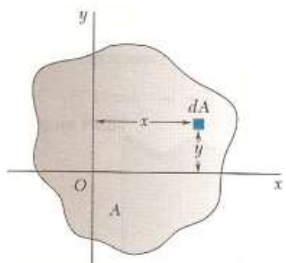


Figure 9.14

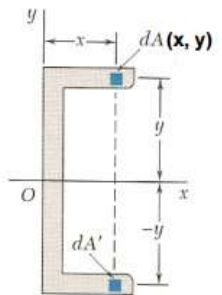


Figure 9.15 (x, -y)

si x et/ou y = axe de symétrie

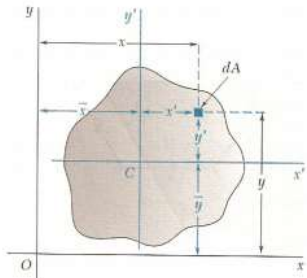
$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

I_{xy} peut être + ou -

$$I_{xy} = 0$$

MEC1410: Cours #11 complément p. 1

THÉORÈME des AXES PARALLÈLES



pour les moments d'inertie de surface et de masse:

surface: $I_x = \bar{I}_x + A(d_y^2)$

masse: $I_x = \bar{I}_x + m(r_{yz}^2)$

$x = x' + \bar{x}$

$y = y' + \bar{y}$

pour les produits d'inertie de surface:

$$I_{xy} = \int xy \, dA = \int [(x' + \bar{x})(y' + \bar{y})] \, dA$$

$$I_{xy} = \int x'y' \, dA + \bar{x} \int y' \, dA + \bar{y} \int x' \, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA$$

$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$

⇒ si x' ou y' = axe symétrie: $I_{xy} = \bar{x}\bar{y}A$

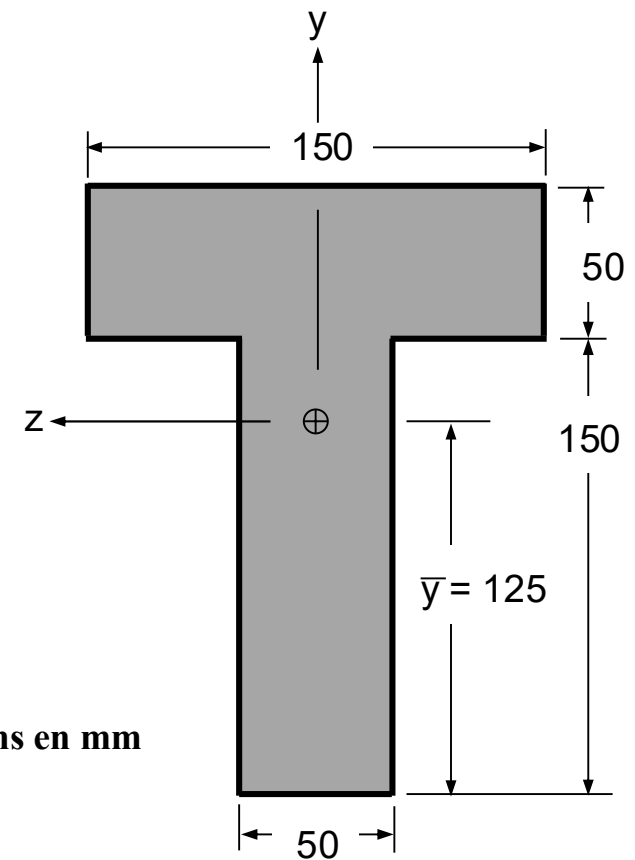
MEC1410: Cours #11 complément p. 2



Rappel de certaines notions de MEC1410 (Exercice 1)

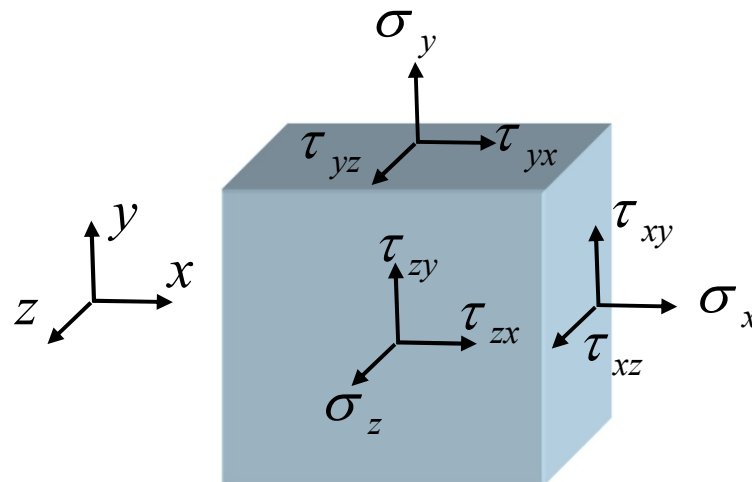
Pour la section de la poutre représentée sur la figure ci-dessous, vérifiez que :

- La position de centroïde $\bar{y} = 125$ mm;
- Le second moment de surface $\bar{I}_z = 53,125 \times 10^6$ mm⁴.



Rappel: Contrainte et élément infinitésimal

- Dans un **état de contrainte le plus complet**, chaque cube (ou élément) infinitésimal d'un solide est soumis à trois contraintes sur chacun de ses six plans
 - Une contrainte normale σ_i
 - Deux contraintes de cisaillement τ_{ij} orthogonales entre elles et qui reposent dans le plan

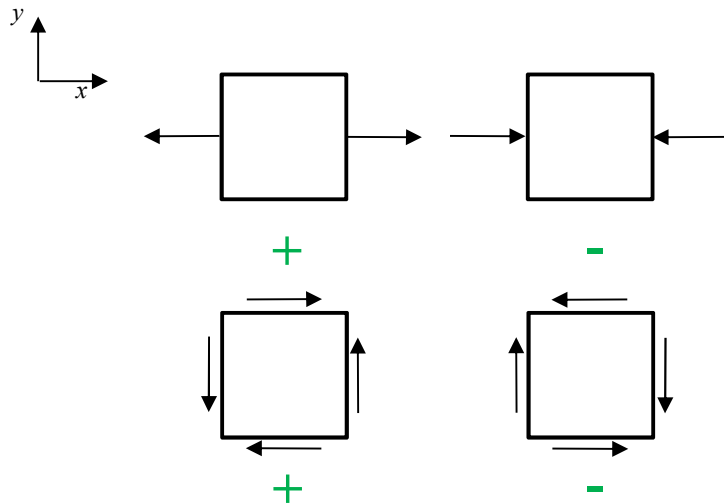
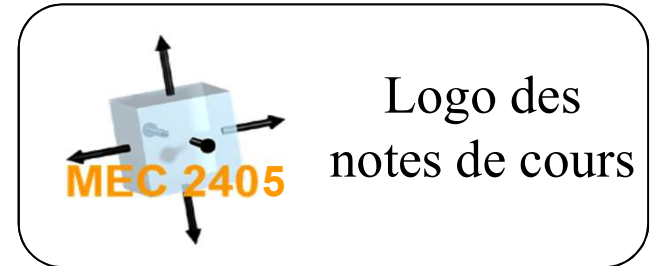




Rappel: Contrainte et élément infinitésimal

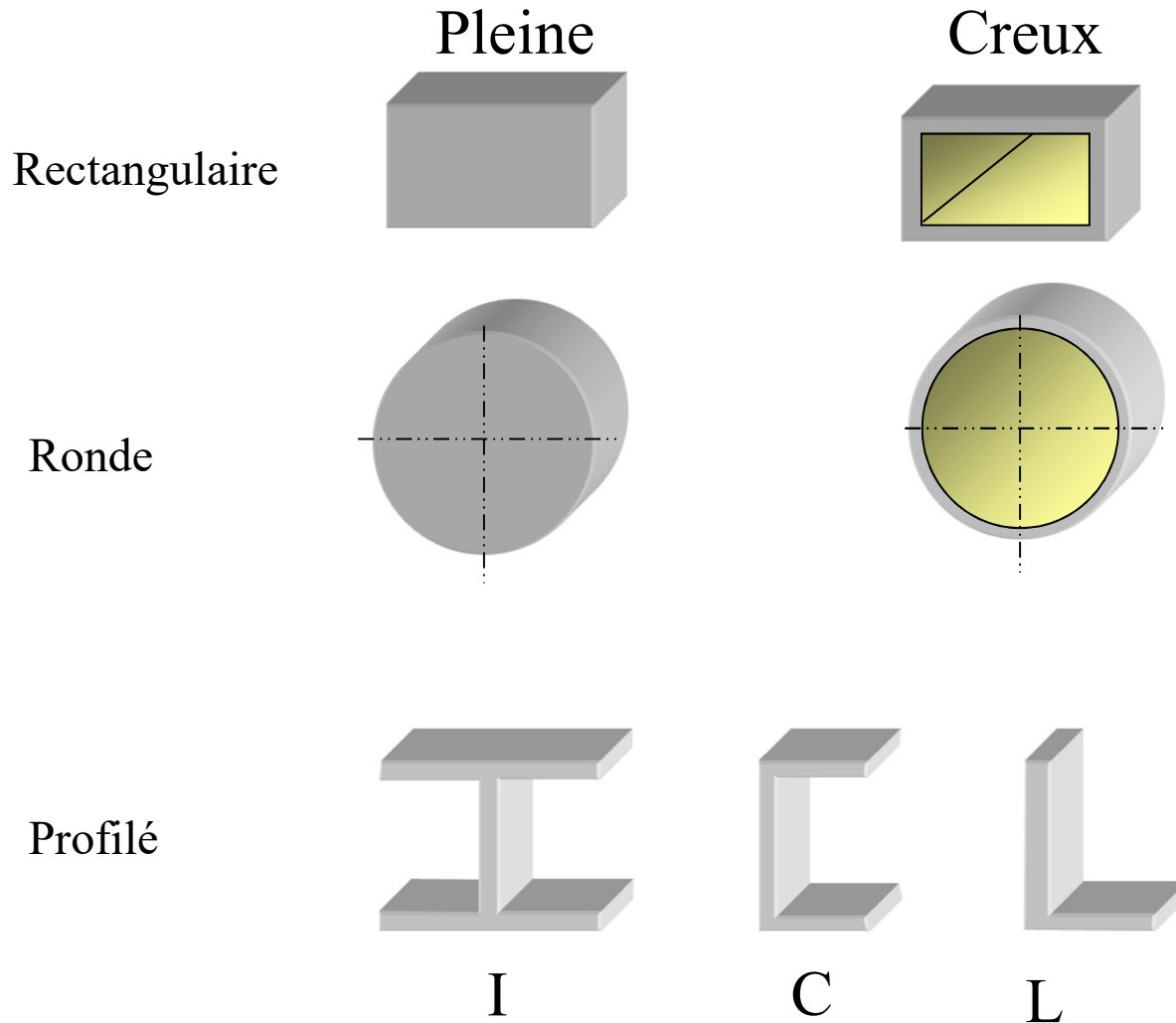
Contrainte :

- Normale σ (ex. σ_x) Face et direction
- De cisaillement τ (ex. τ_{xy}) Face
Direction

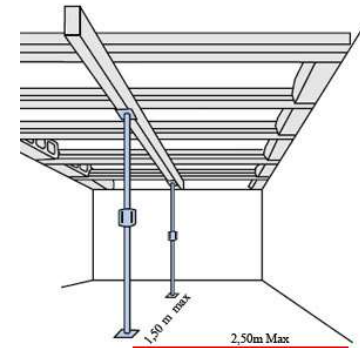


(+) si face (+) et direction (+)
ou
(+) si face (-) et direction (-) } **sinon (-)**

Sections les plus couramment rencontrées en ingénierie



Arbres de transmission

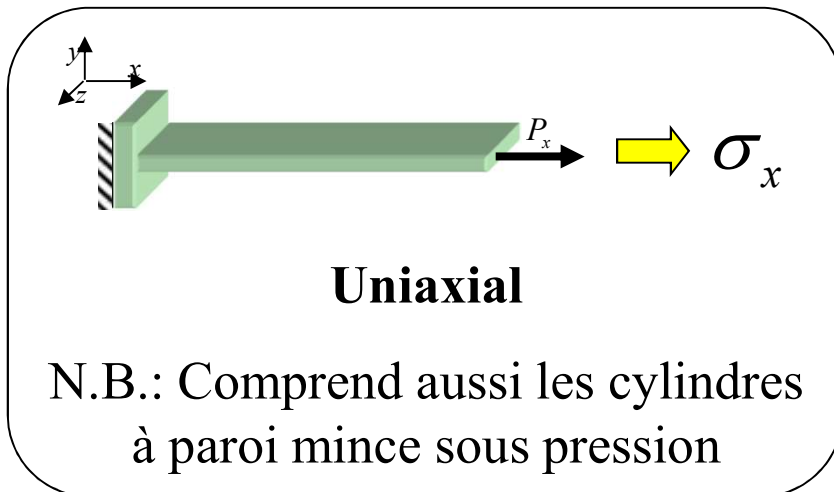


Plancher de maison

Notions de contrainte

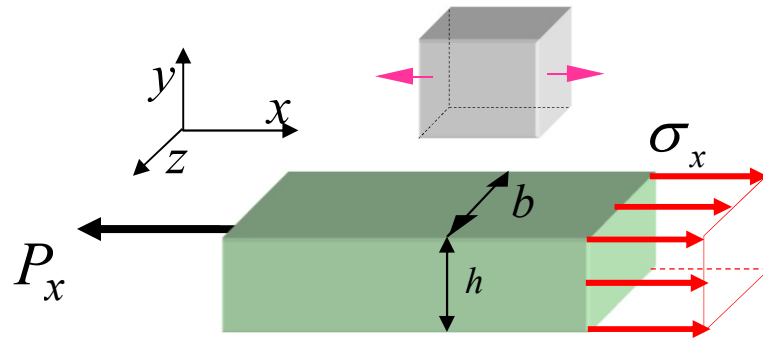
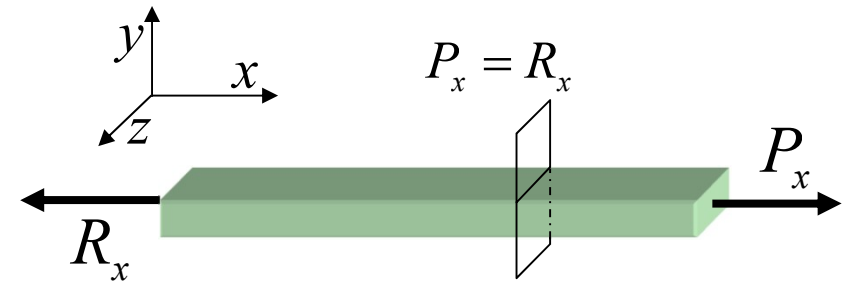
Dans la grande majorité des cas, les équations que l'ingénieur utilise pour calculer les contraintes se résument à :

- **Chargement uniaxial**
- Chargement de flexion
- Chargement de torsion
- Chargement combiné:
 - axial-flexion
 - axial-torsion
 - flexion-torsion
 - flexion-axial-torsion



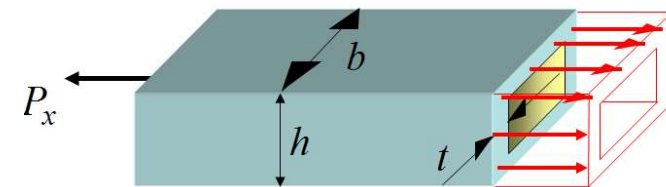
Notions de contrainte

Chargement uniaxial,
section rectangulaire



Section pleine

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A} \quad ; \quad A = b \cdot h$$



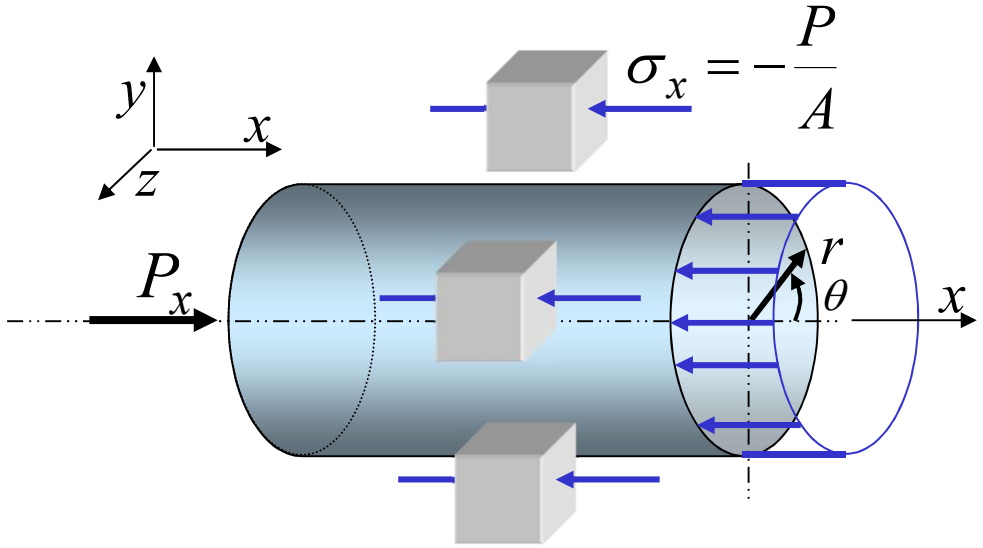
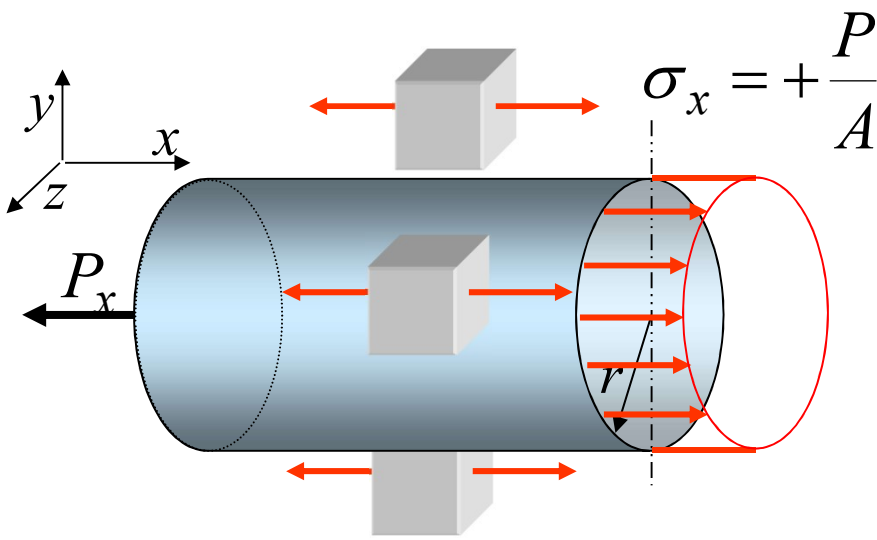
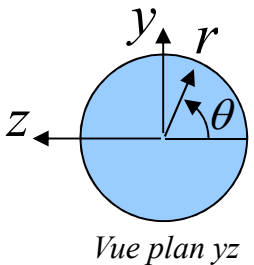
Section évidée

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A} \quad A = (b \cdot h) - [(b - 2t)(h - 2t)]$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Notions de contrainte

Chargement uniaxial, barreau circulaire plein



Pour un barreau plein: $A = \pi r^2$

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{x\theta} &= \tau_{xr} = \tau_{\theta r} = 0 \end{aligned}$$



Notions de contrainte

Cylindre à paroi mince sous pression

- Cas particulier de chargement uniaxial
- Important en génie mécanique
- Applications
 - Vérins pneumatiques et hydrauliques,
 - Tuyauterie de distribution d'eau, d'air comprimé ou de vapeur
 - Réservoirs sous pression tels que les chaudières thermiques, les échangeurs de chaleur, les réservoirs d'air comprimé

MEC3200 - Transmission de chaleur

MEC3210 - Systèmes de pompage, ventilation et compresseurs

MEC3350 - Systèmes hydrauliques et pneumatiques

Notions de contrainte

Cylindre à paroi mince sous pression

- Rapport: rayon moyen (r_m) / épaisseur de la paroi (t) > 10
- Distribution de la contrainte tangentielle (σ_θ) est constante à travers la paroi
- Type:

OUVERT

Contrainte dans la direction x ,

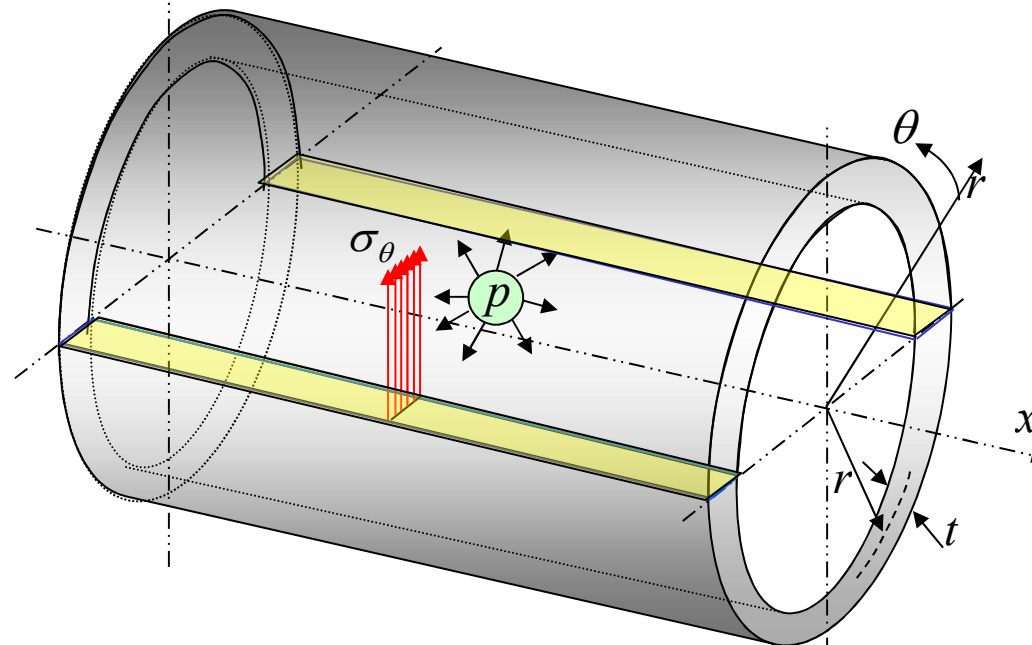
$$\sigma_x = 0$$

ou

FERMÉ

Contrainte dans la direction x ,

$$\sigma_x \neq 0$$



Notions de contrainte

Cylindre **fermé** à paroi mince soumis à une pression interne p et à une force axiale F en tension

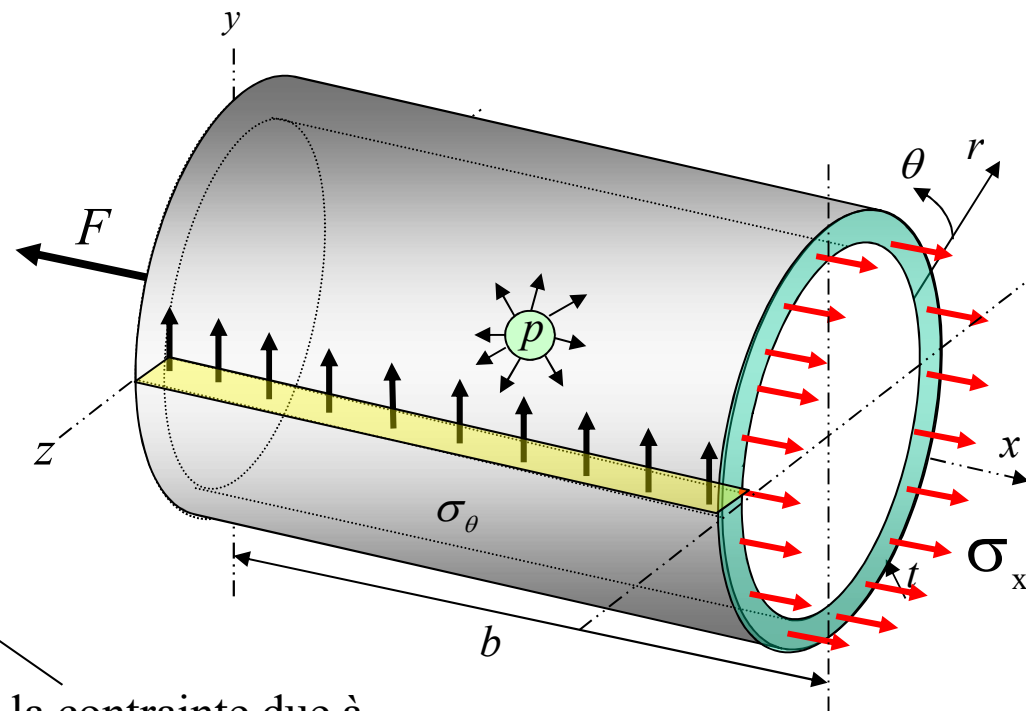
$$\sigma_r = -p \quad \text{ou} \quad 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{p r_m}{t}$$

$$\sigma_x = \underbrace{\frac{p r_m}{2t}} + \underbrace{\frac{F}{2\pi r_m t}}$$

Partie de la contrainte due à la pression

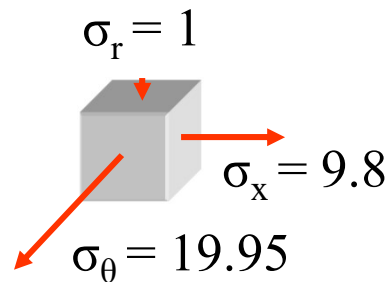
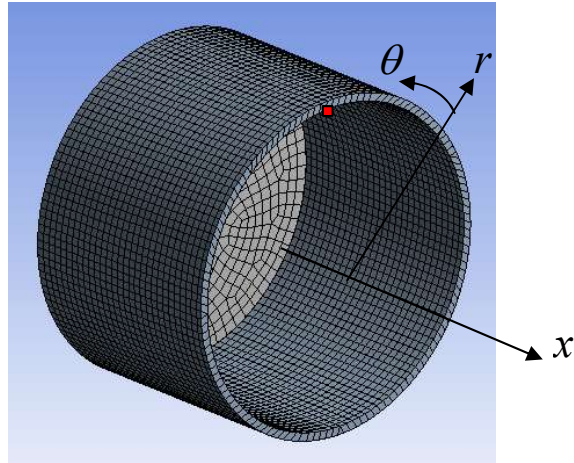
Partie de la contrainte due à la force extérieure F



Vérification des formules par éléments finis (Ansys)

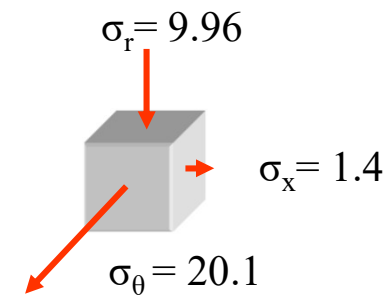
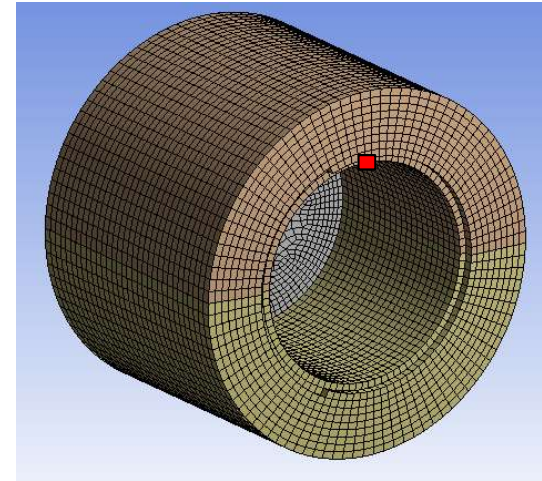
Paroi mince ($t = 4\text{mm}$)

- $P = 1 \text{ MPa}$
- $r_m = 80\text{mm}$



Contrainte en MPa

Paroi épaisse ($t = 20\text{mm}$)

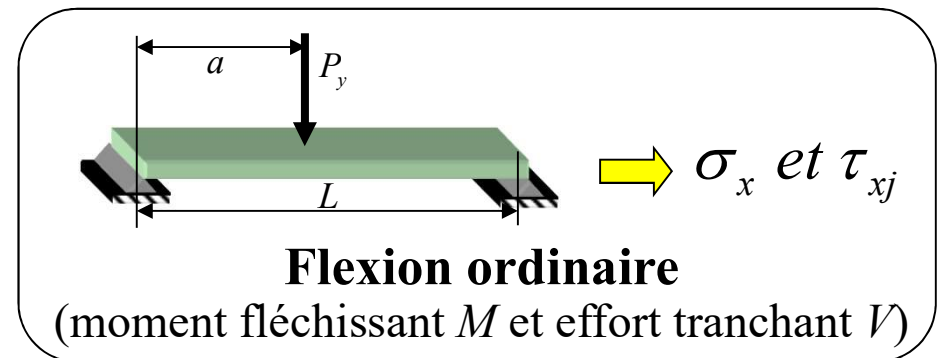
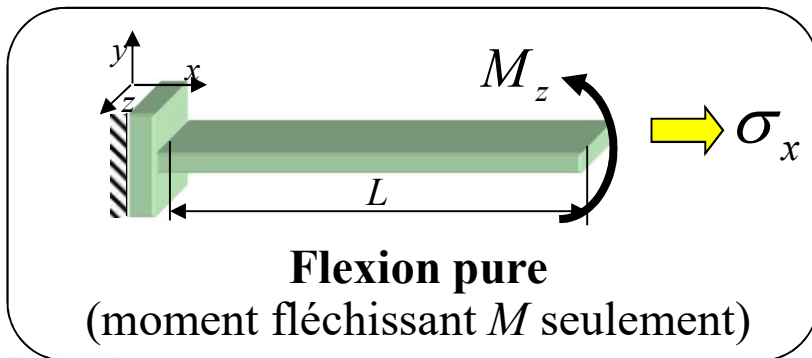


Valeurs prises sur la surface intérieure

Notions de contrainte : Flexion

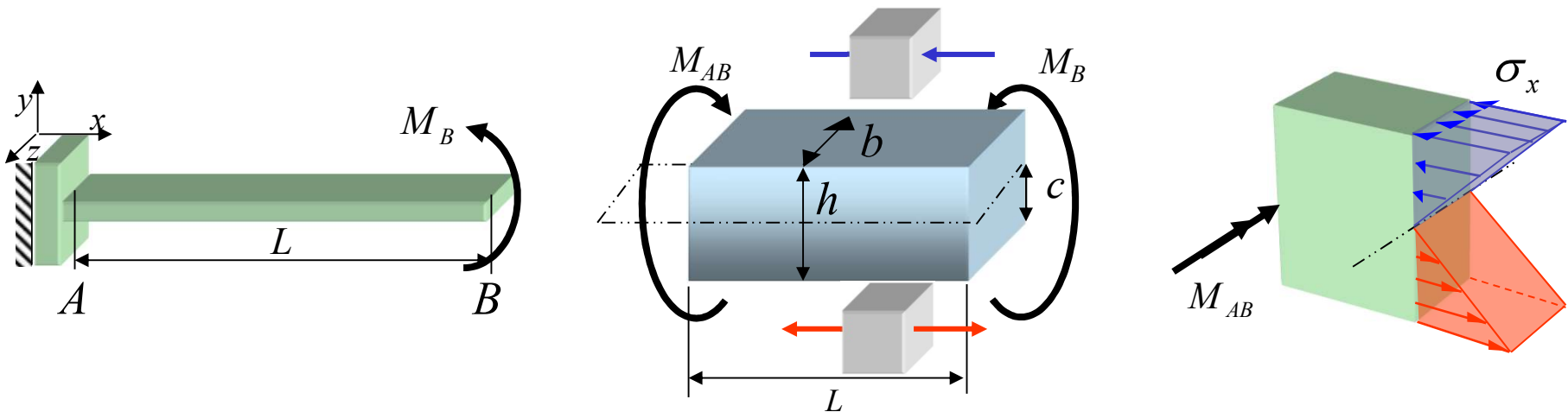
Dans la plupart des cas, les équations que l'ingénieur utilise pour calculer les contraintes se résument à :

- Chargement uni-axial
- **Chargement de flexion**
- Chargement de torsion
- Chargement combiné:
 - axial-flexion
 - axial-torsion
 - flexion-torsion
 - flexion-axial-torsion



Notions de contrainte : Flexion pure

- Moment concentré (M_B) sur une poutre rectangulaire pleine
- Moment interne (M_{AB}) qui engendre la contrainte; ici M_{AB} est égal à M_B
 - c = distance du plan neutre à la fibre extrême (ici, $c = h/2$)



Contraintes aux fibres extrêmes

$$\sigma_x = \pm \frac{M_{AB} c}{I_z} = \pm \frac{M_{AB}}{S_z}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

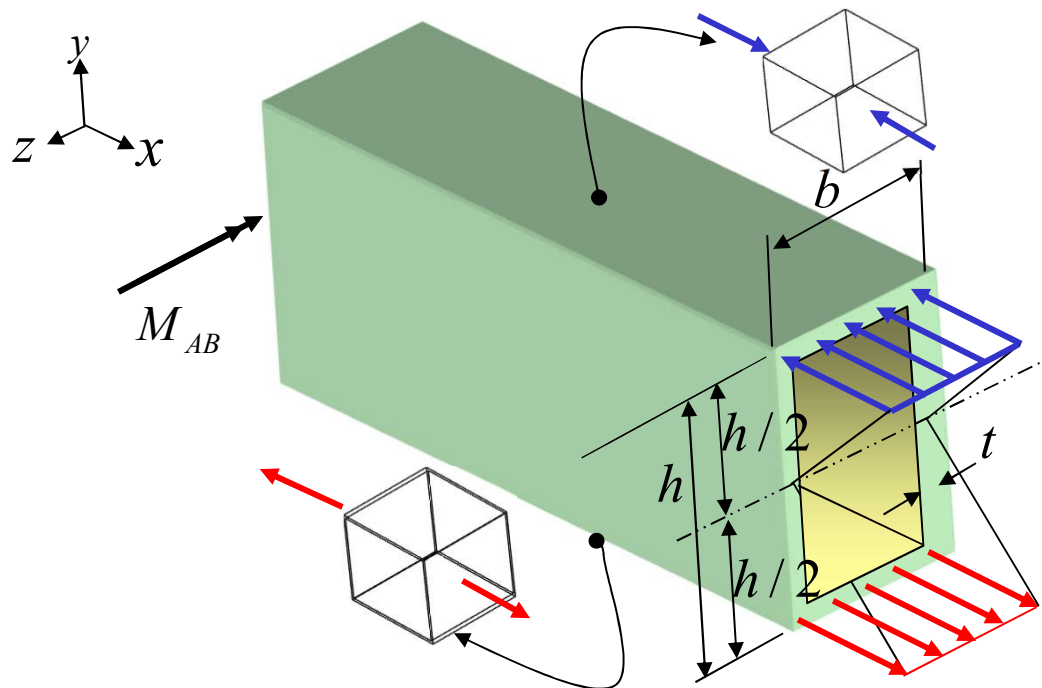
$$S_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Notions de contrainte : Flexion pure

- Moment concentré sur une poutre rectangulaire à paroi mince



Augmentation linéaire de la contrainte normale en fonction de la distance par rapport au plan neutre

$$\sigma_x = -\frac{M_{AB} y}{I_z}$$

Contraintes aux fibres extrêmes

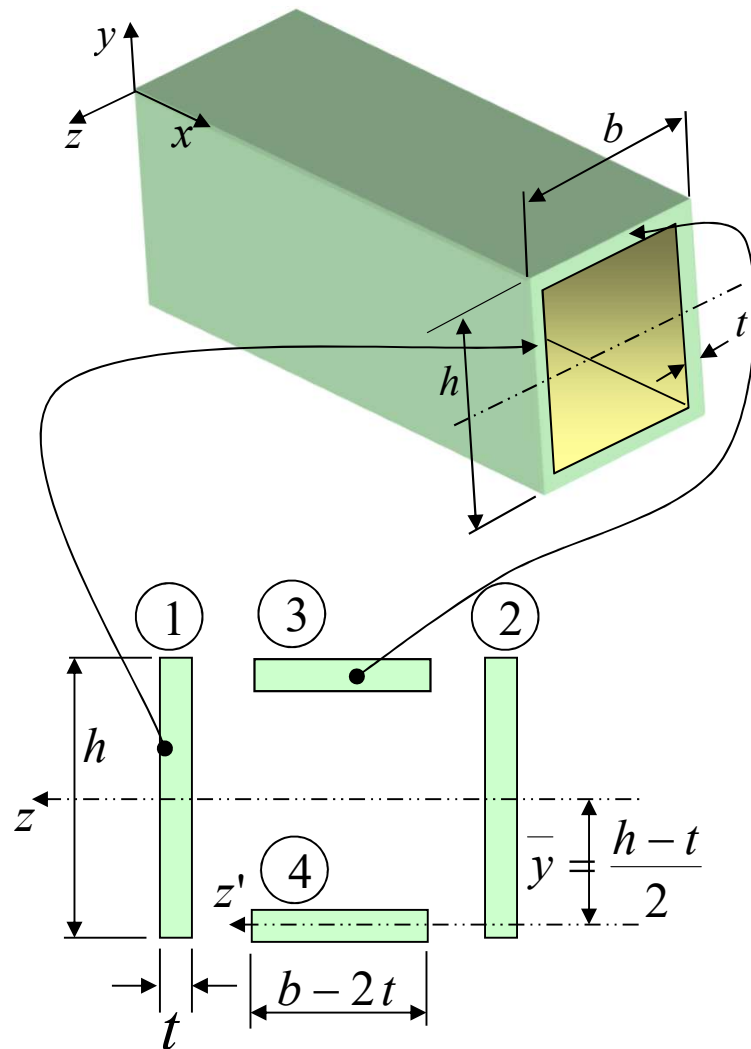
$$\sigma_x = \pm \frac{M_{AB} c}{I_z}$$

où $c = \frac{h}{2}$

Rappel : Comment calculer I_z ?

Notions de contrainte : Flexion pure

Rappel : Comment calculer I_z ?



$$I_z = I_{z1+2} + I_{z3+4}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow I_{z1+2} = 2 \frac{t h^3}{12}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \Rightarrow I_{z3+4} = 2 \left(I_{z'} + \bar{y}^2 A \right)$$

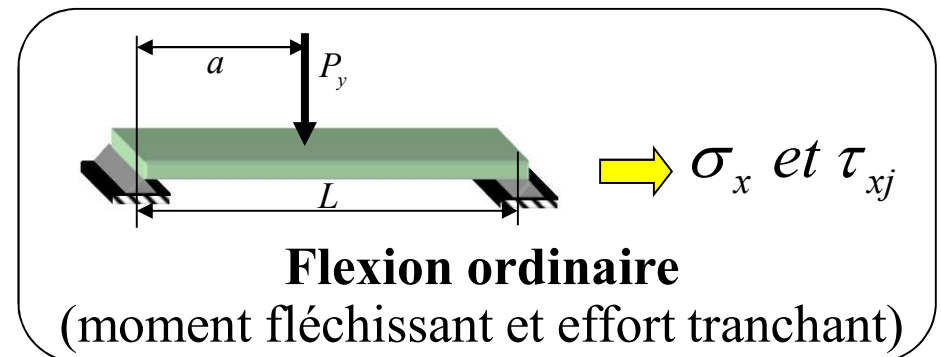
$$I_{z3+4} = 2 \left(\frac{(b-2t)t^3}{12} + \left(\frac{h-t}{2} \right)^2 (b-2t)t \right)$$

$$I_z = \frac{1}{6} \left(t h^3 + (b-2t)t^3 + 3(h-t)^2 (b-2t)t \right)$$

Notions de contrainte : Flexion ordinaire

Dans la plupart des cas, les équations que l'ingénieur utilise pour calculer les contraintes se résument à :

- Chargement uni-axial
- **Chargement de flexion ordinaire: avec moment fléchissant et effort tranchant**
- Chargement de torsion
- Chargement combiné:
 - axial-flexion
 - axial-torsion
 - flexion-torsion
 - flexion-axial-torsion

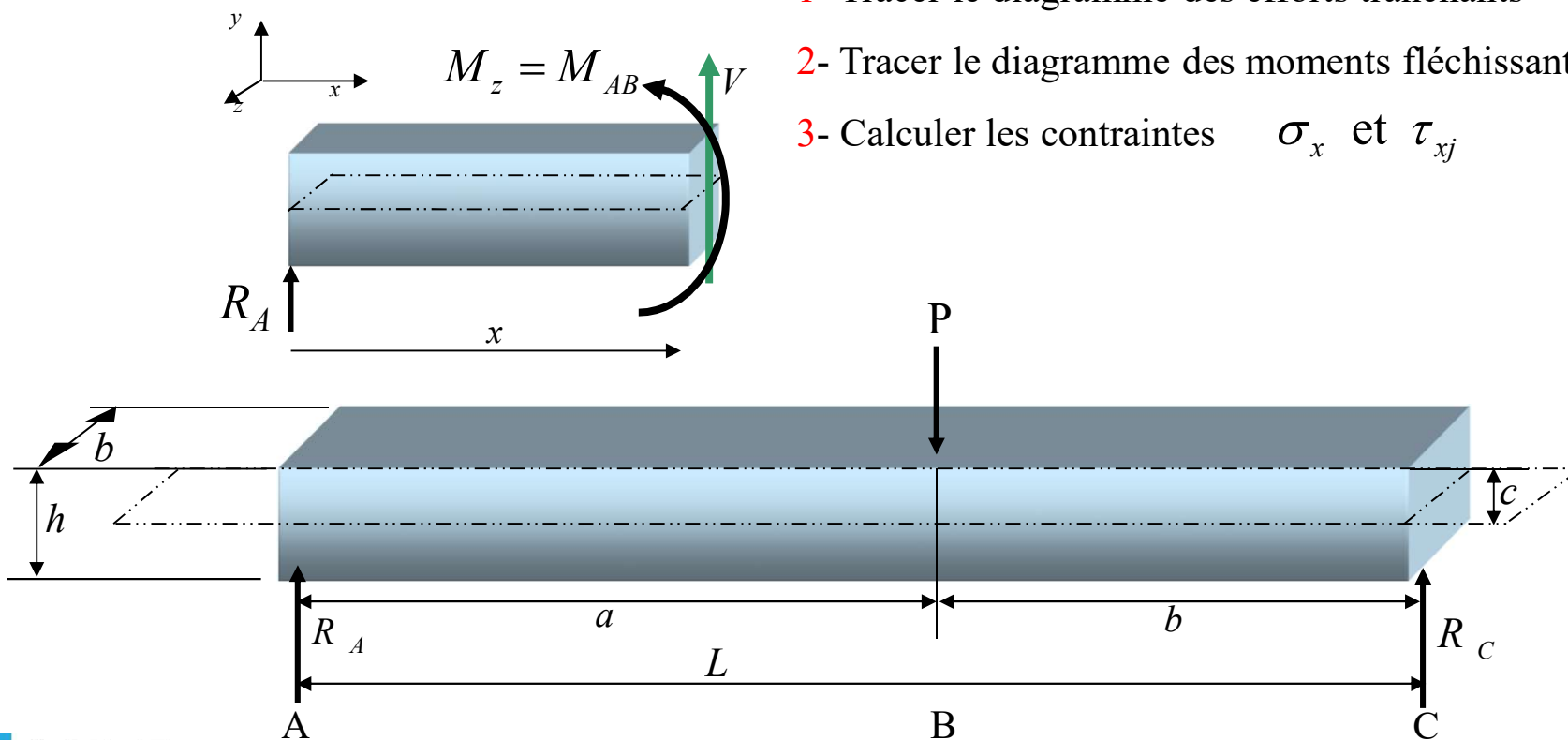


Notions de contrainte : Flexion ordinaire

Charge concentrée sur une poutre ayant des appuis simples

Après avoir calculer les réactions R_A et R_B la procédure de solution est :

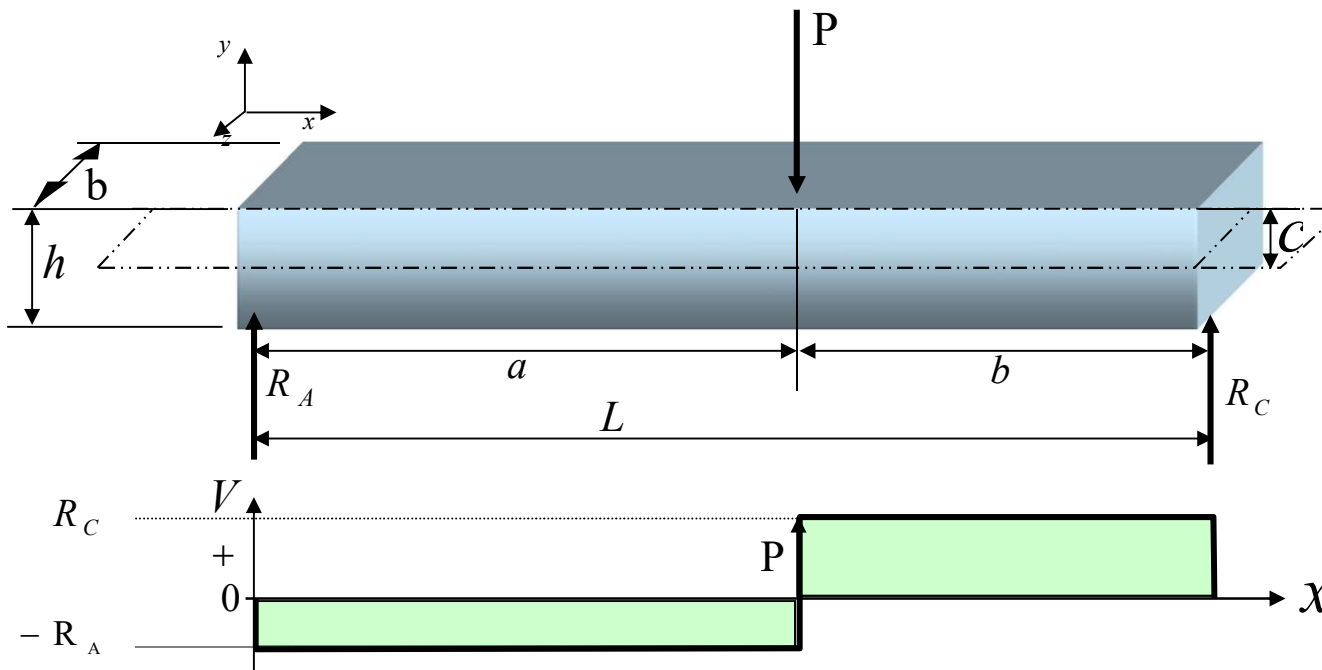
- 1- Tracer le diagramme des efforts tranchants
- 2- Tracer le diagramme des moments fléchissants (M_z)
- 3- Calculer les contraintes σ_x et τ_{xj}



Notions de contrainte : Flexion ordinaire

1- Tracer le diagramme des efforts tranchants

Le diagramme des efforts tranchants varie d'une quantité égale à
 - (*la force concentrée*) à l'endroit où celle-ci est appliquée



$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$\Delta V = -q \Delta x$$

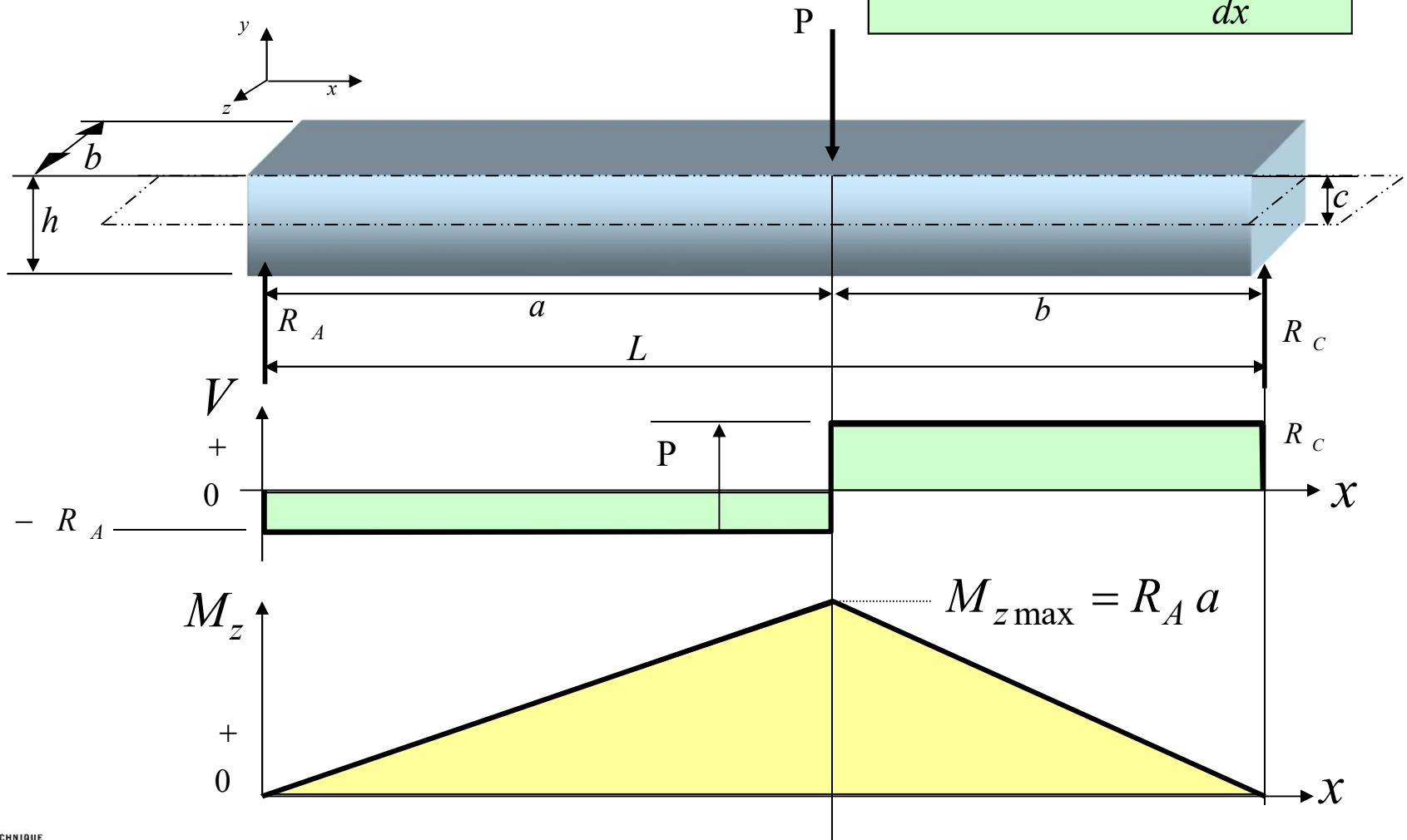
$$\frac{dM}{dx} = -V$$

$$\Delta M = -V \Delta x$$

Notions de contrainte : Flexion ordinaire

2- Tracer le diagramme des moments fléchissants

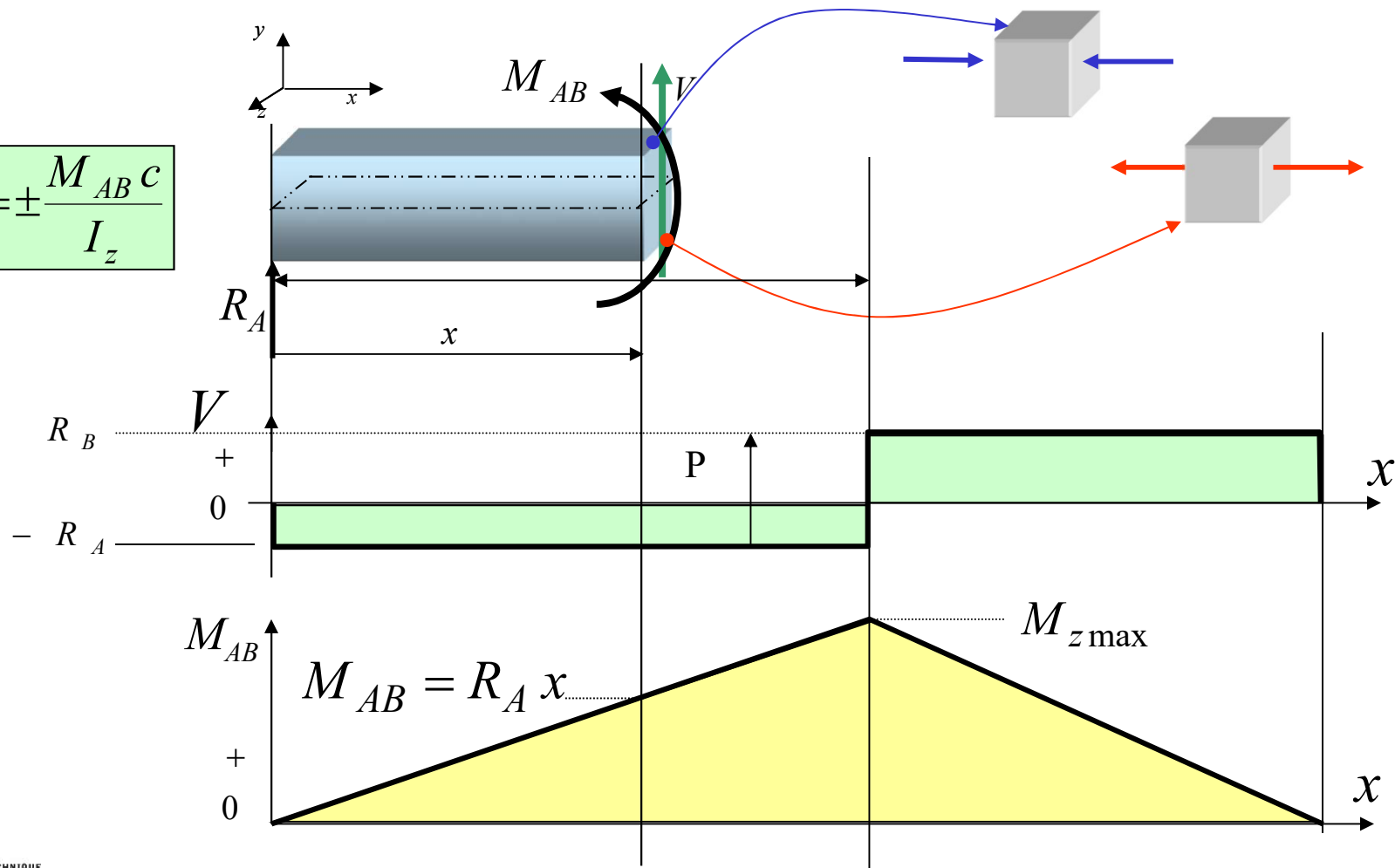
$$\Delta M = -V \Delta x \quad \frac{dM}{dx} = -V$$



3 - Calculer la contrainte σ_x

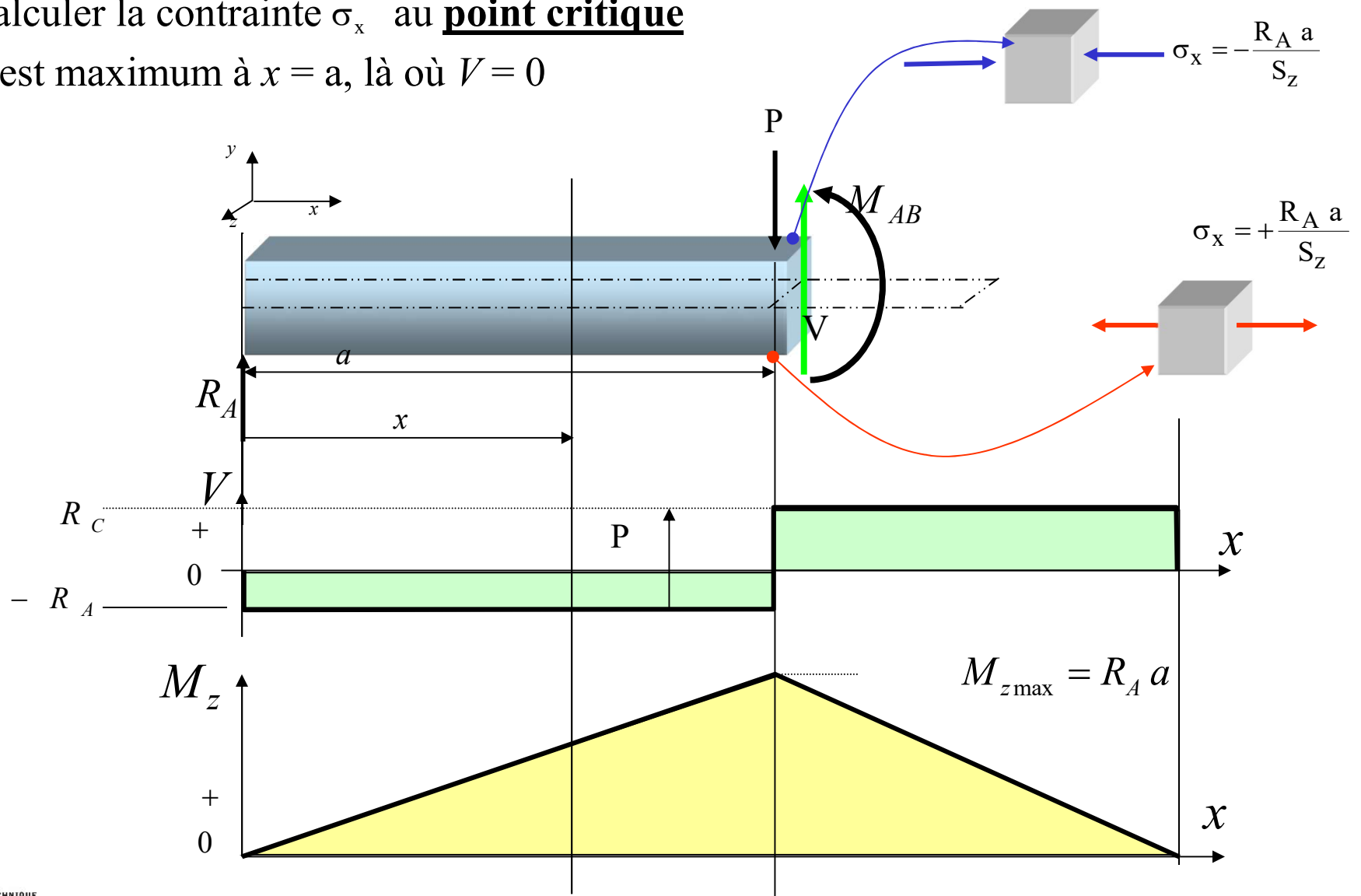
On fait une coupe de la pièce à une distance x de l'appui gauche

$$\sigma_x = \pm \frac{M_{AB} c}{I_z}$$

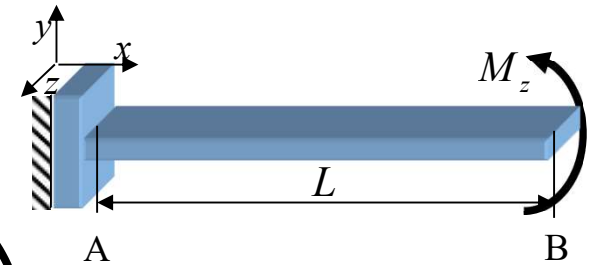
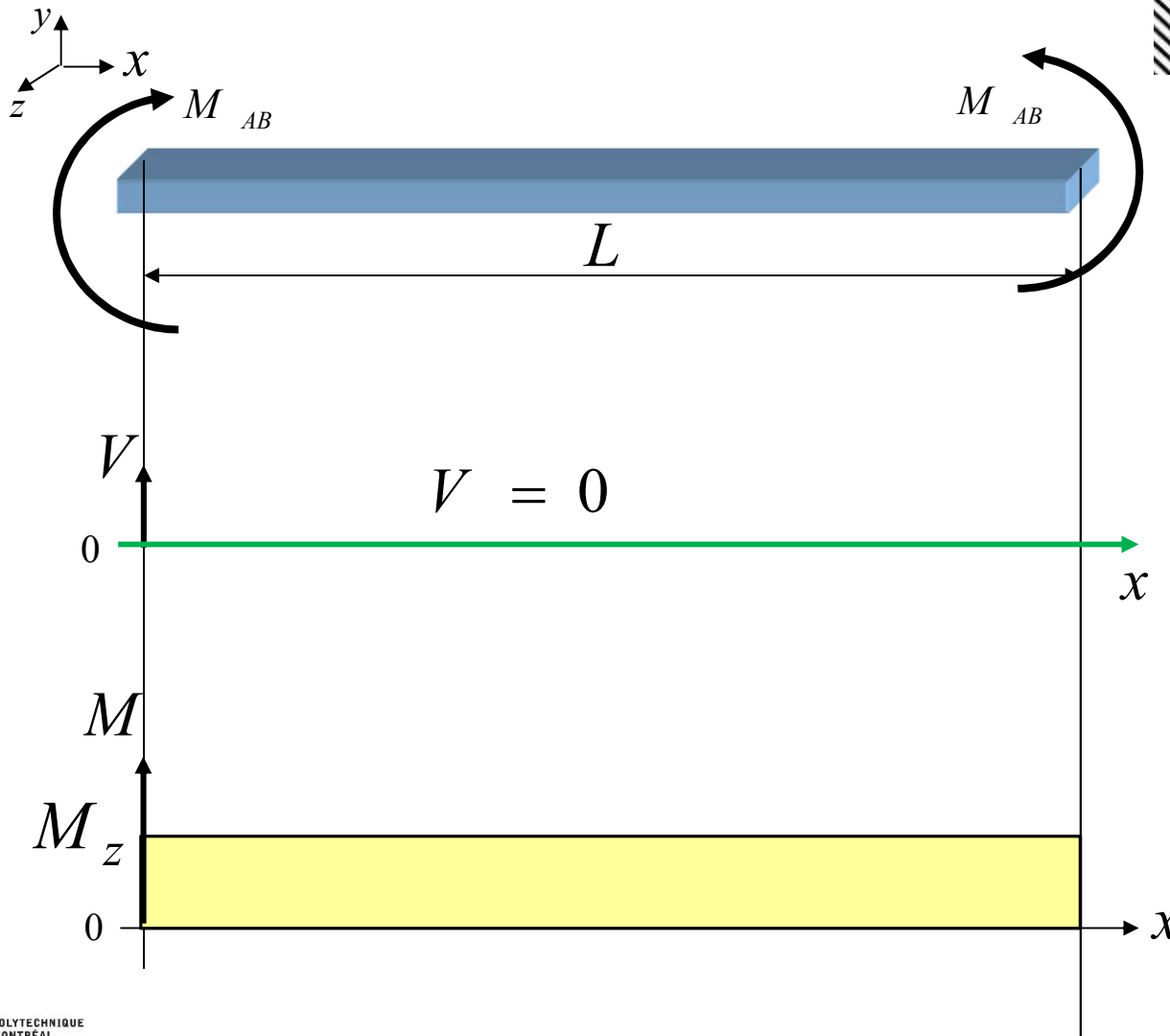


3- Calculer la contrainte σ_x au **point critique**

M_{AB} est maximum à $x = a$, là où $V = 0$



Exemple 1: Flexion pure



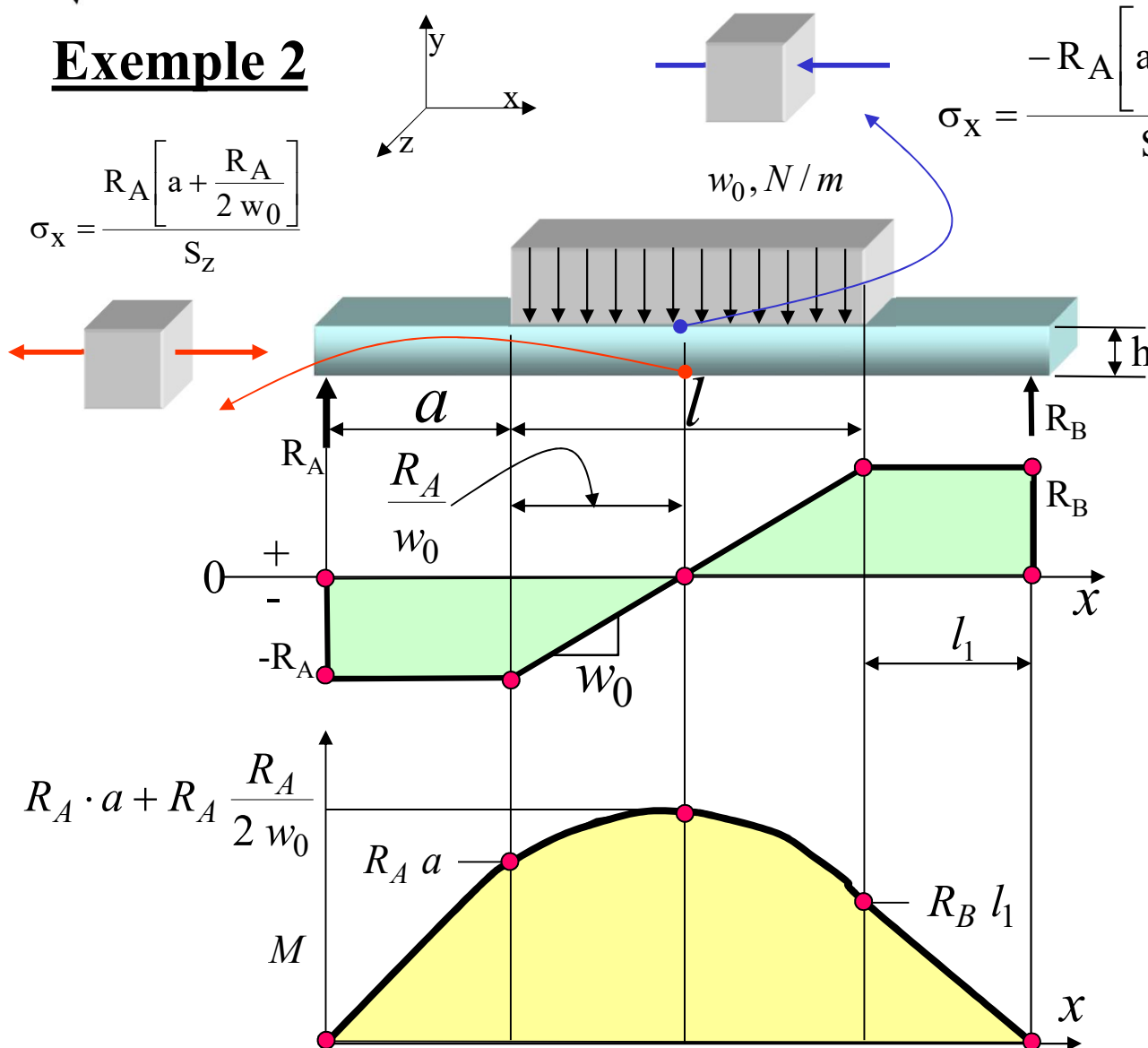
$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$\Delta V = -q \Delta x$$

$$\frac{dM}{dx} = -V$$

$$\Delta M = -V \Delta x$$

Exemple 2



$$\sigma_x = \frac{-R_A \left[a + \frac{R_A}{2 w_0} \right]}{S_z}$$

Charge uniformément distribuée sur une partie de la poutre

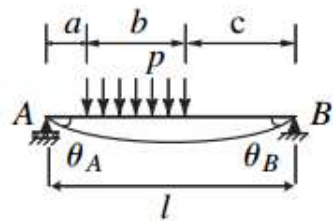
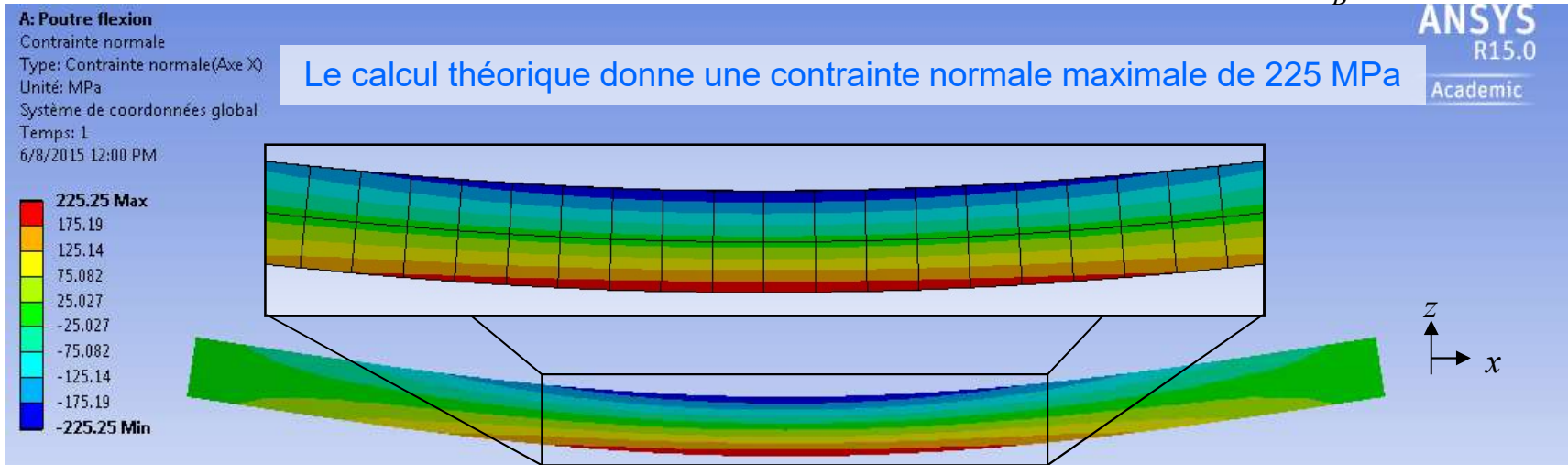
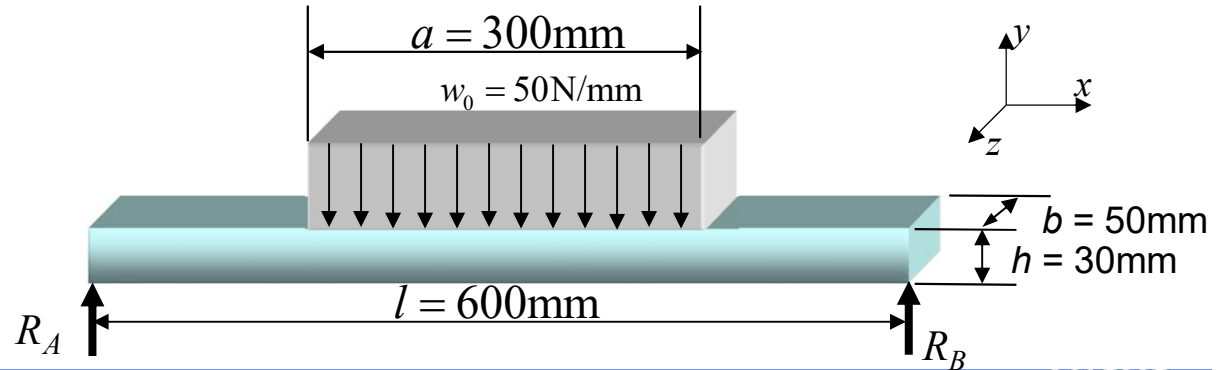
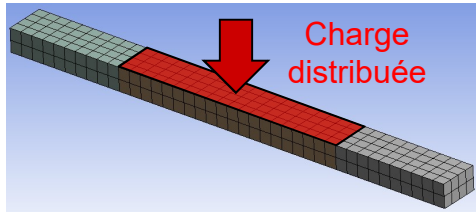
$$\frac{dV}{dx} = -q \quad \Delta V = -q \Delta x$$

$$\frac{dM}{dx} = -V \quad \Delta M = -V \Delta x$$

$$q = -w_0$$

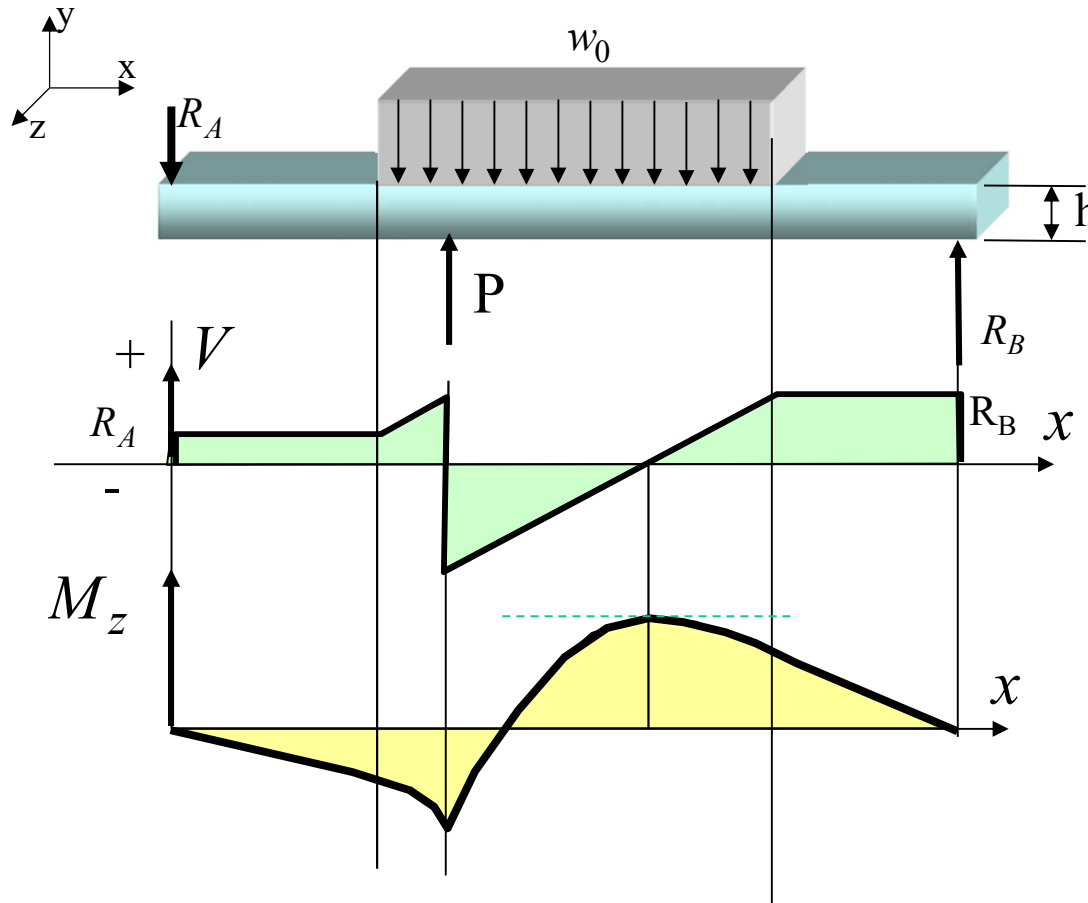
● Points importants à identifier

Représentation de σ_x par ÉM de l'exemple 2



Pour $a < x < b + a$,
$$M(x) = \frac{pb}{2l}(b + 2c)x - p \frac{(x - a)^2}{2}$$

Exemple 3



Il faut bien calculer les réactions aux appuis

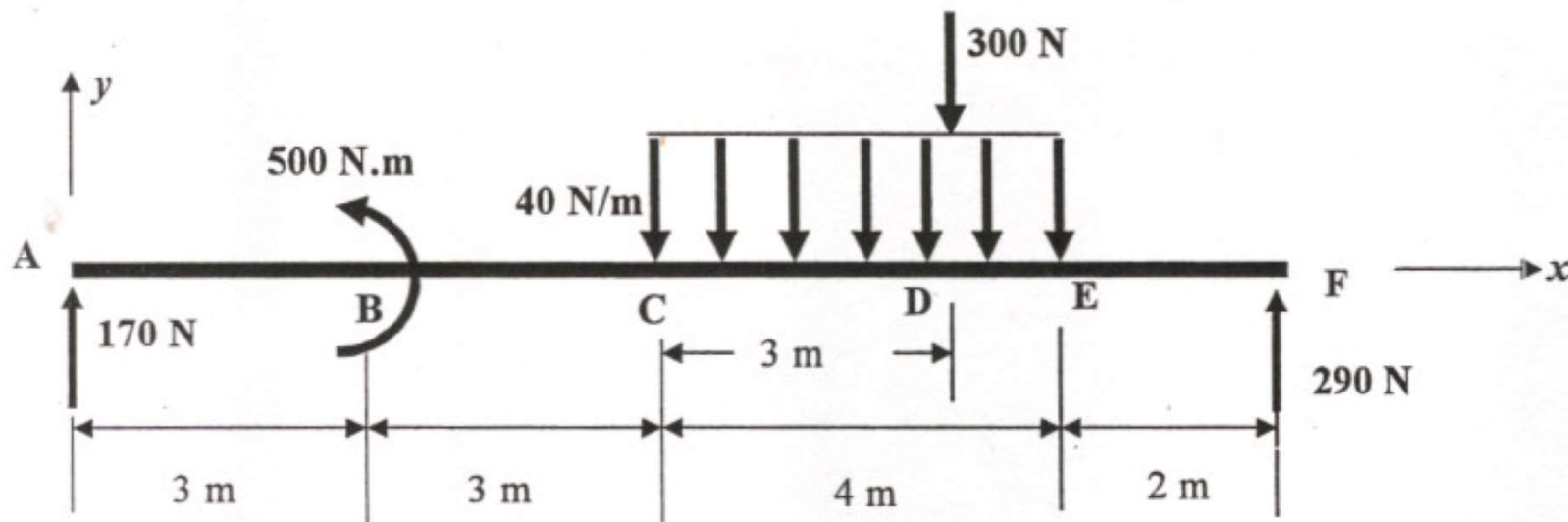
Ici, V passe par zéro à deux sections de la pièce ; il faut alors calculer σ_x aux deux endroits pour trouver les contraintes maximales

Notions de contrainte : Exercice 2

Pour la poutre illustrée ci-dessous, les réactions aux appuis A et F ont été calculées; leurs valeurs sont indiquées sur la figure :

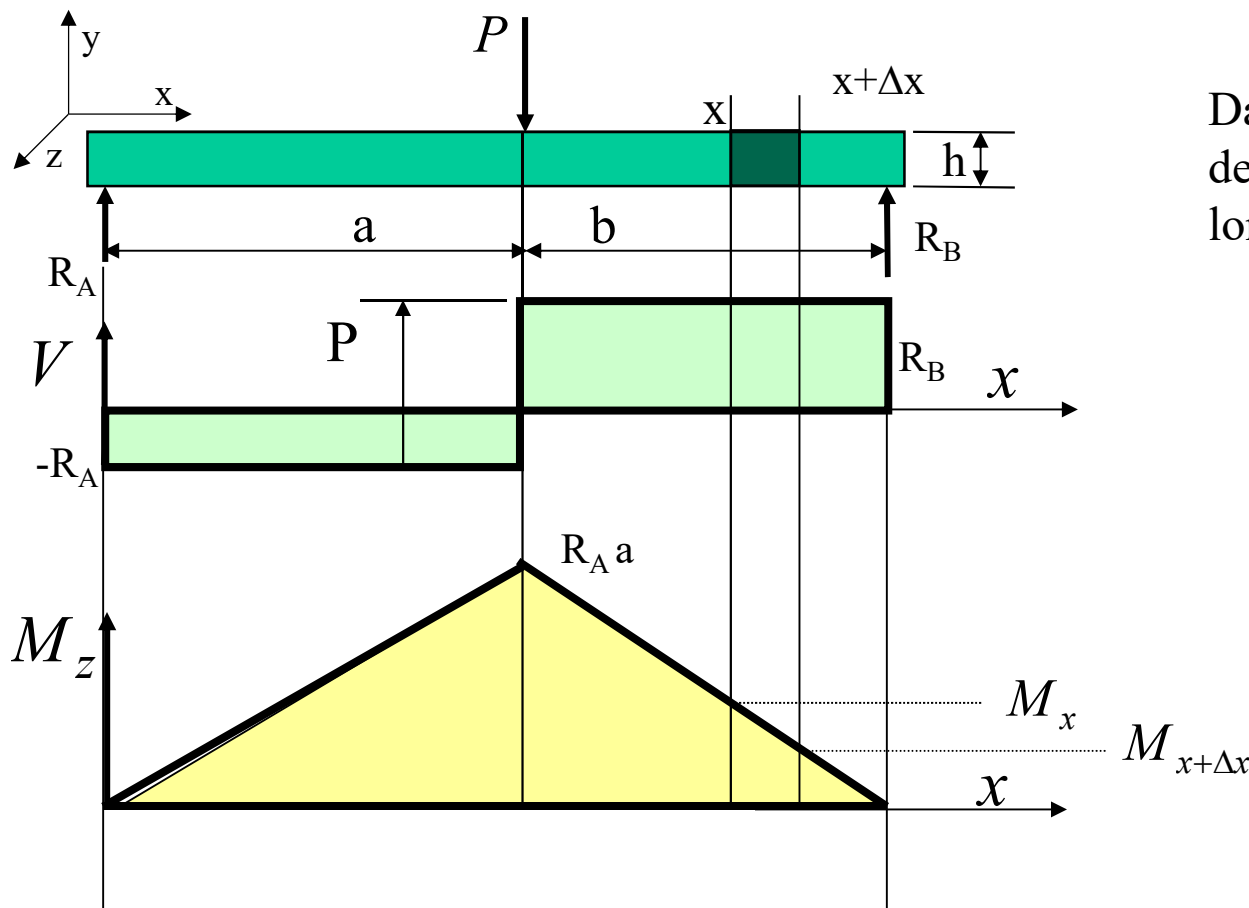
$$R_A = 170 \text{ N} ; R_F = 290 \text{ N}$$

- Tracez le diagramme de l'effort tranchant en indiquant les valeurs importantes;
- Complétez le diagramme du moment fléchissant; en indiquant les valeurs importantes.

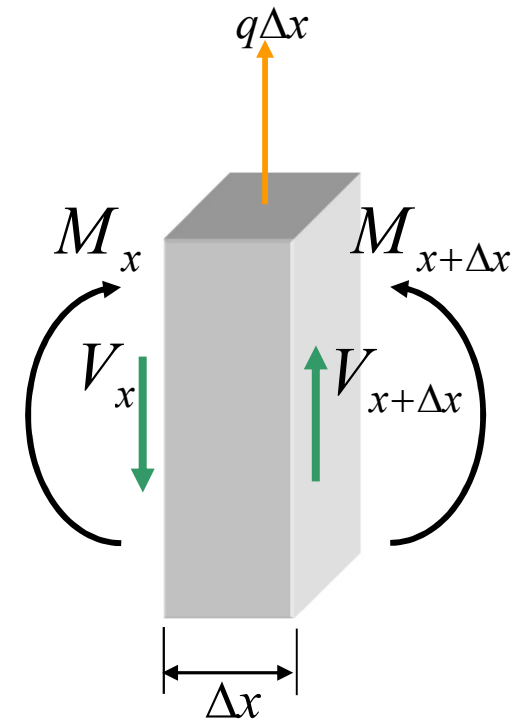


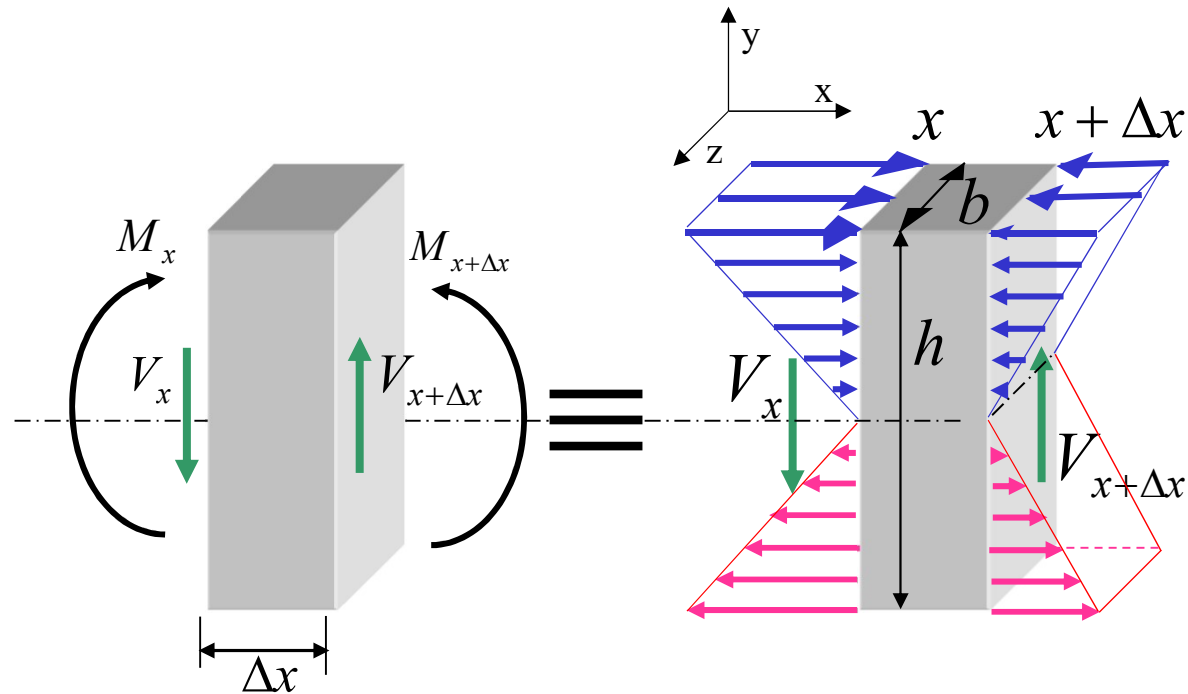
Notions de contrainte : Flexion ordinaire

Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant



Dans cette poutre, à une distance x de l'origine, isolons une section de longueur Δx





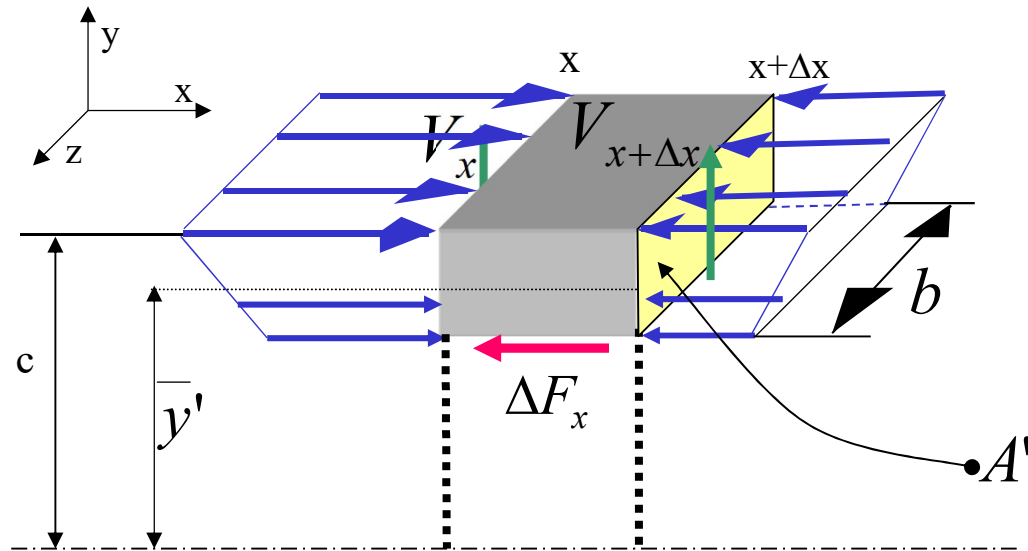
Un élément de poutre de longueur Δx est en équilibre :

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_{x+\Delta x} = M_x - V\Delta x \quad (4.11)$$

$$\sum F_x = \int \sigma_x dA = 0 \quad (4.3a)$$

avec
$$\sigma_x = -\frac{M y}{I_z} \quad (4.12a \text{ et } 4.12b)$$

A' est mesurée sur la face sur laquelle agit V

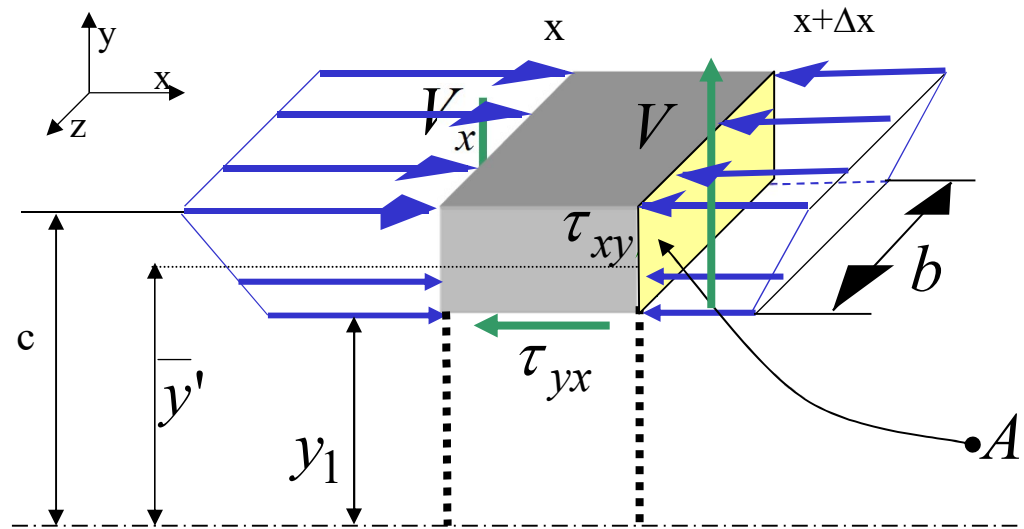


Si on isole un élément de cette section d'aire A' dont le centroïde est situé à une distance \bar{y}' de l'axe neutre, il faut ajouter une force *interne* ΔF_x pour que l'élément soit en équilibre:

$$\sum F_x = \int_{A'} |\sigma_x| dA - \int_{A'} |\sigma_{x+\Delta x}| dA - \Delta F_x = 0 \quad (4.13)$$

C'est cette force ΔF_x qui cause une contrainte de **cisaillement**.

Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant



$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z b} = \frac{V_y A' \bar{y}'}{I_z b}$$

b est mesuré à y_1 (surface glissante)

I_z est le second moment de toute la section par rapport à z

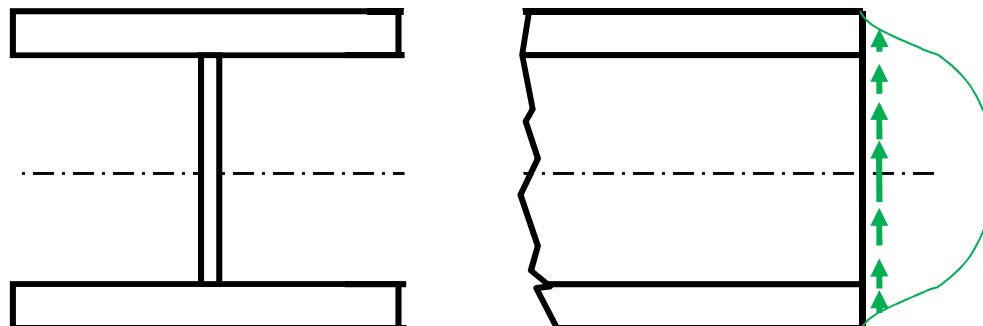
Q est le premier moment de surface

Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant

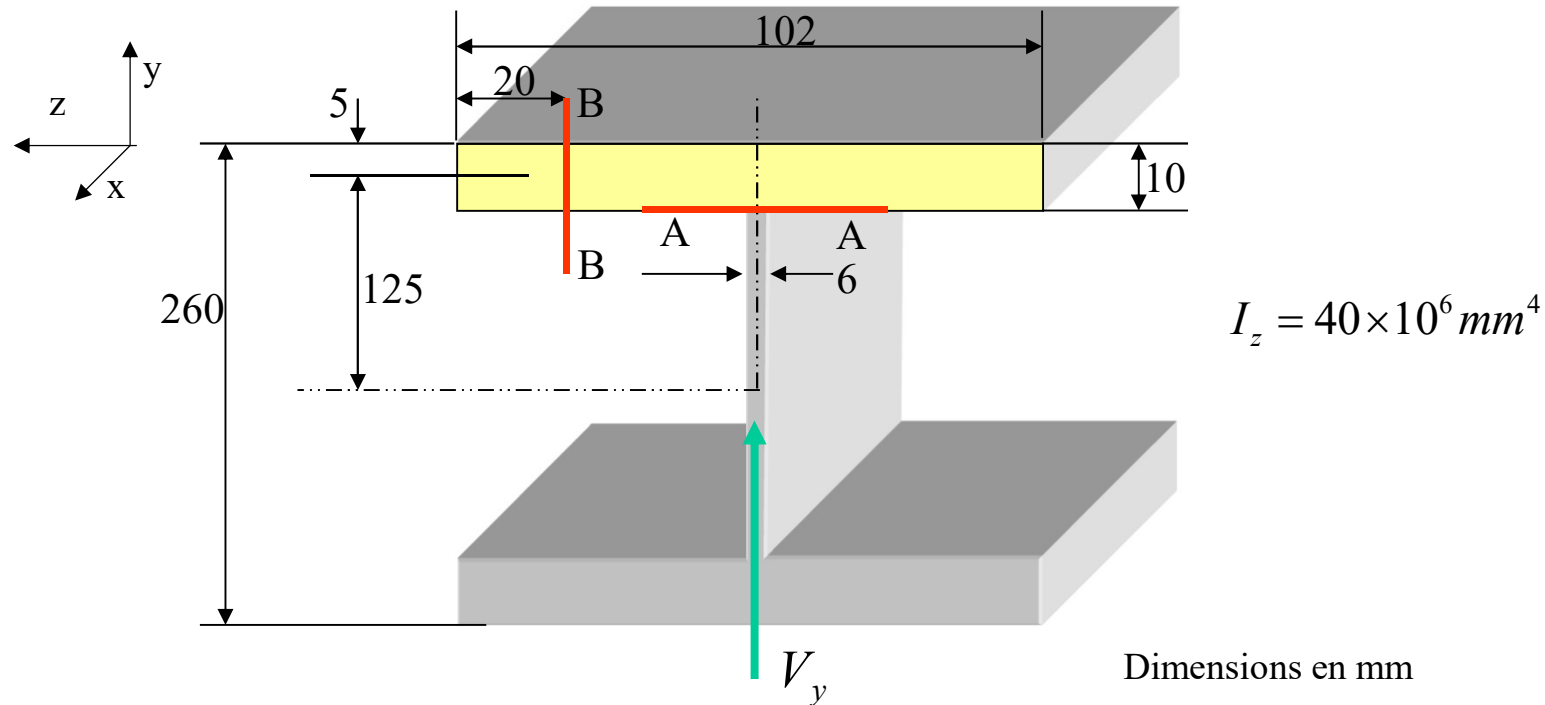
La figure ci-dessous illustre la répartition en intensité des contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant dans un profilé en I.

On remarque :

- **les contraintes de cisaillement sont nulles aux fibres extrêmes de la poutre**
- **la contrainte de cisaillement est maximale à l'axe neutre de la poutre**
- la majeure partie de l'effort tranchant est reprise dans l'âme de la poutre
- les contraintes de cisaillement sont relativement constantes dans l'âme



Exemple : Calculer les contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant V_y en A-A et en B-B :



Section A-A est dans l'âme de la poutre, sous la semelle supérieure.

Section B-B est dans la semelle supérieure, à 20 mm de l'extrémité gauche.

À la section d'étude A-A :

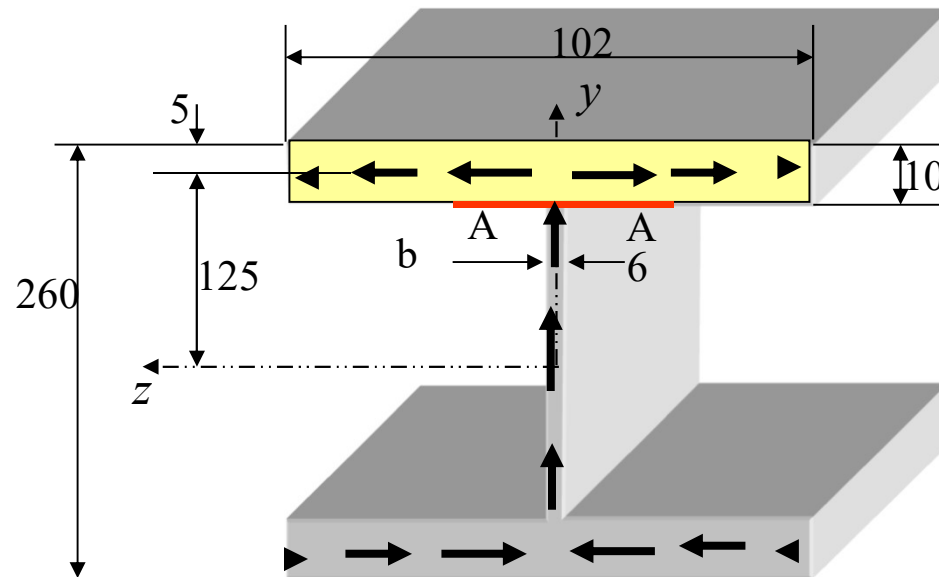
La contrainte de cisaillement se calcule :

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z b}$$

où $Q =$ le premier moment de l'aire de la section de la poutre qui est au dessus de la section d'étude par rapport à l'axe neutre, soit

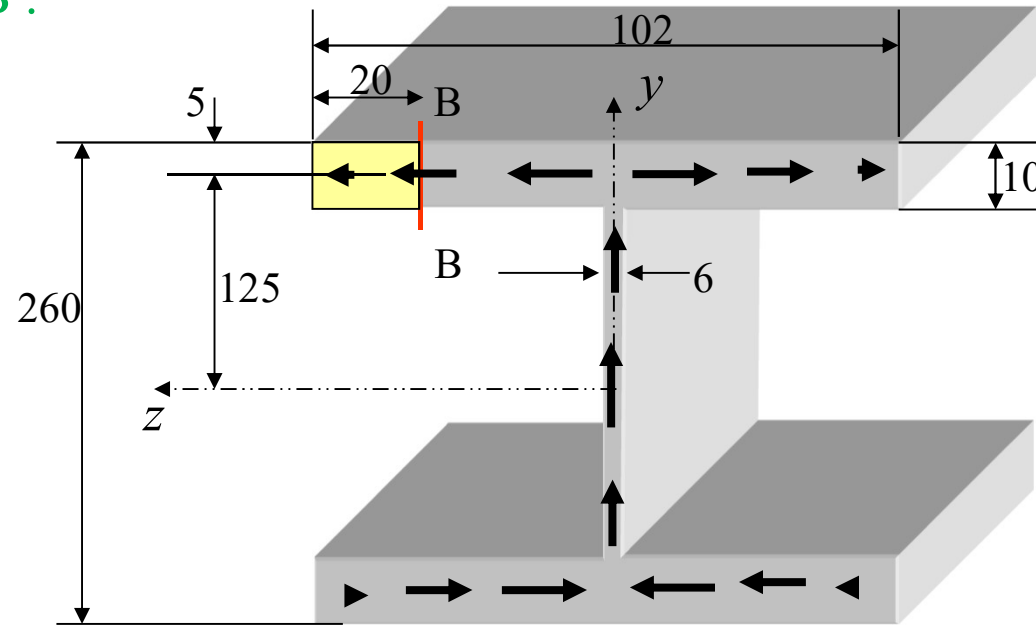
$$Q = A' \cdot \bar{y}' = (102 \cdot 10) \cdot 125 = 127,5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

et $b = 6 \text{ mm}$



À la section d'étude B-B :

$$\tau_{xz} = \frac{V_y Q}{I_z b}$$



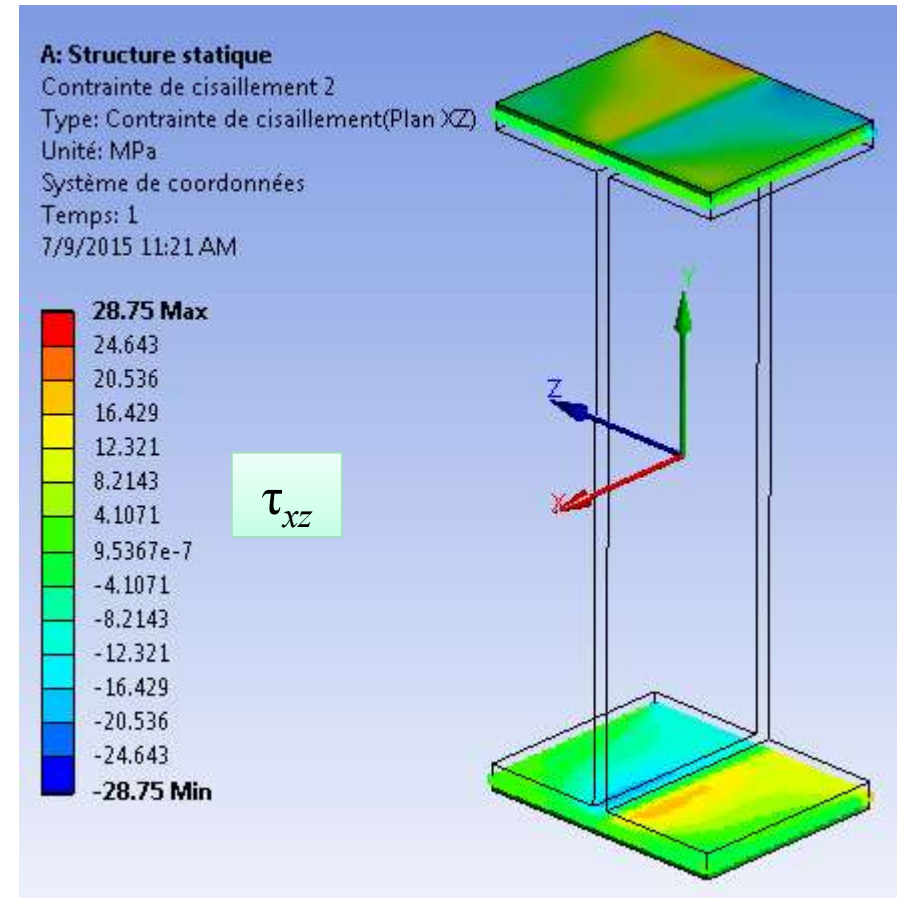
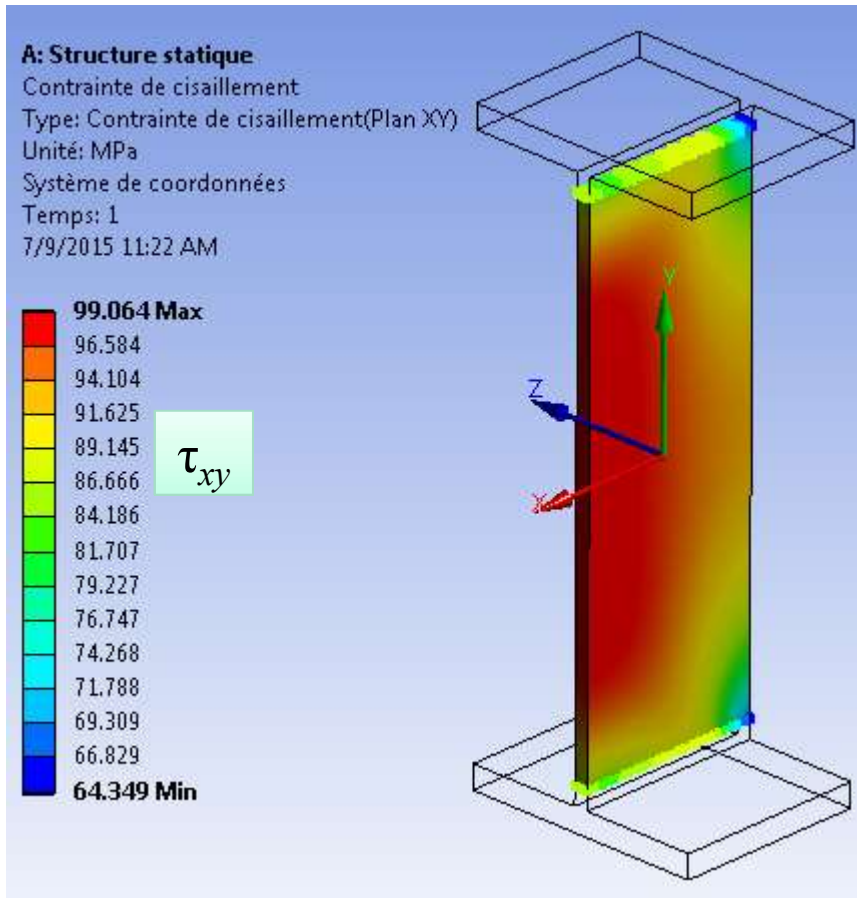
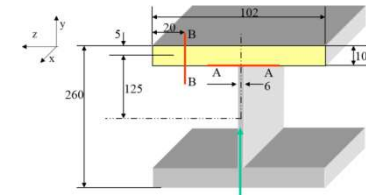
$$Q = A' \cdot \bar{y}' = (20 \cdot 10) \cdot 125 = 25 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

et

$b = 10 \text{ mm}$, l'épaisseur de la semelle

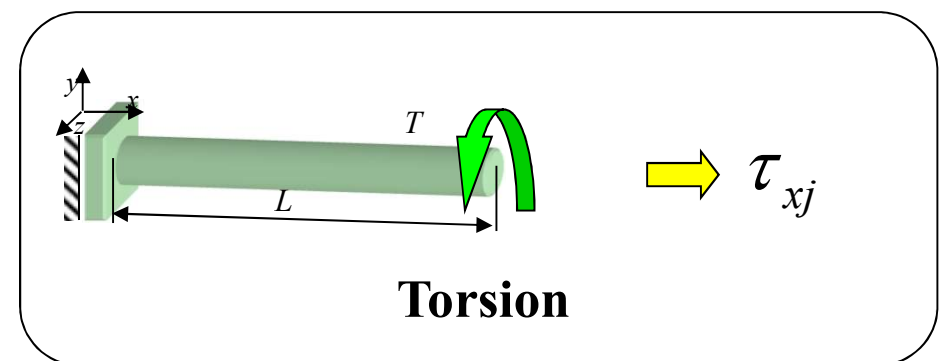
Résultats FEM

Force de cisaillement $V_y = 142.4 \text{ kN}$



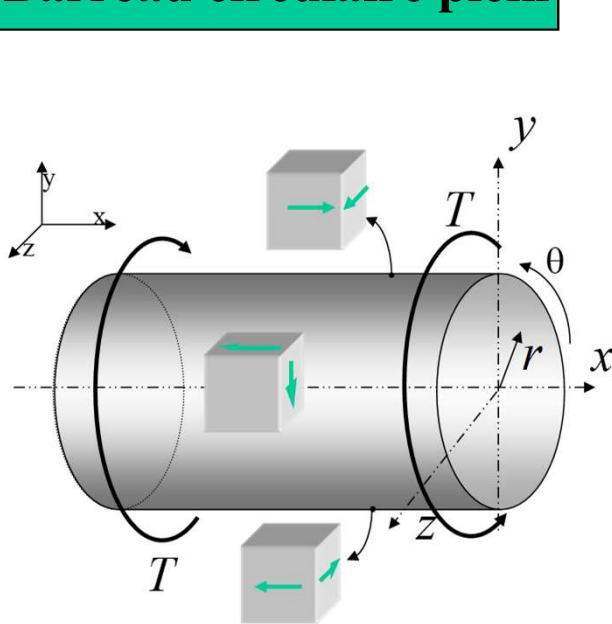
Dans la grande majorité des cas, les équations que l'ingénieur utilise pour calculer la sollicitation se résument à :

- Chargement uni-axial
- Chargement de flexion
- Chargement de torsion
- Chargement combiné:
 - axial-flexion
 - axial-torsion
 - flexion-torsion
 - flexion-axial-torsion



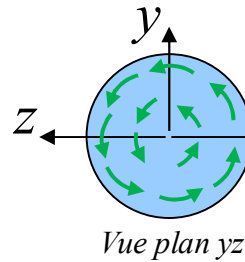
Notions de contrainte : Torsion

Barreau circulaire plein

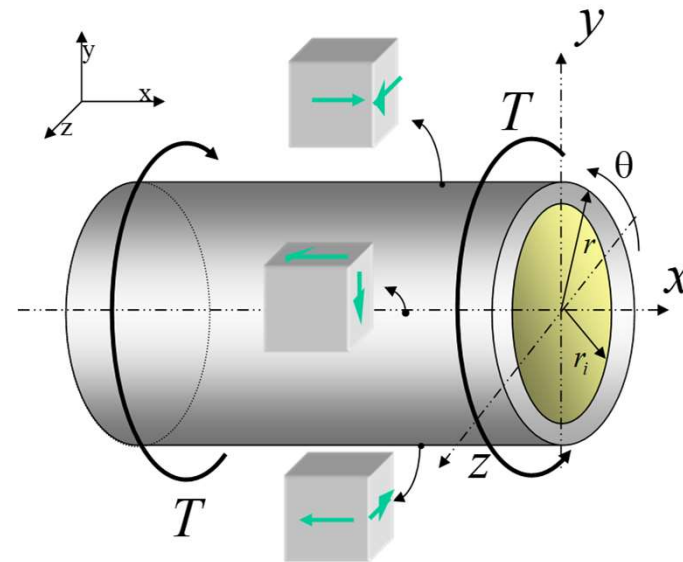


$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

J : second moment polaire
(constante de torsion)



Tube circulaire



$$J = \frac{\pi (r_e^4 - r_i^4)}{2}$$

$$J = 2\pi r^3 t$$

où r est le rayon moyen

**Contrainte de cisaillement
à la surface externe**

$$|\tau_{x\theta}| = \left| \frac{T r}{J} \right|$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_r = \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{xr} = \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Notions de contrainte : Exercice 3

Le réservoir à paroi mince ABC encastré-libre (voir figure a) est chargé à son extrémité libre C selon les sens montrés. Les chargements externes sont les suivants :

$$p = 4,5 \text{ MPa} ; F = 90,48 \text{ kN} ; T = 23,255 \text{ kN.m} ; M_y = 10,465 \text{ kN.m} ; M_z = 2,907 \text{ kN.m}.$$

La section du tube est montrés sur la figure b).

- Déterminez l'état de contrainte complet au point B_1 (voir figures a et b).
- Illustrez cet état de contrainte sur l'élément montré à la figure c).

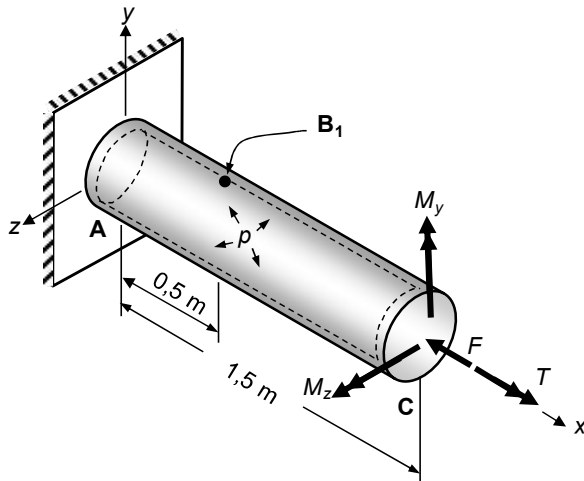


Fig. a) Tube à paroi mince sous pression

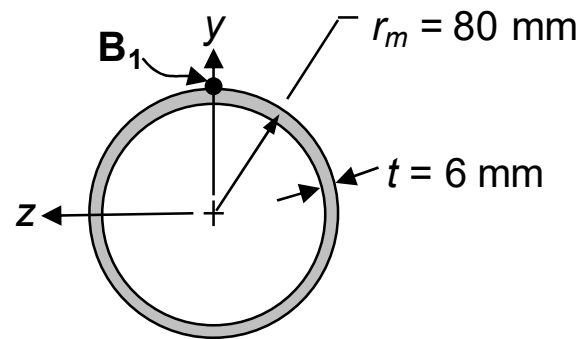


Fig. b) Section du tube

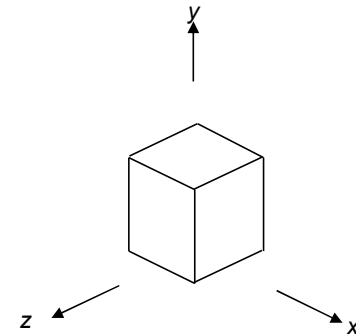


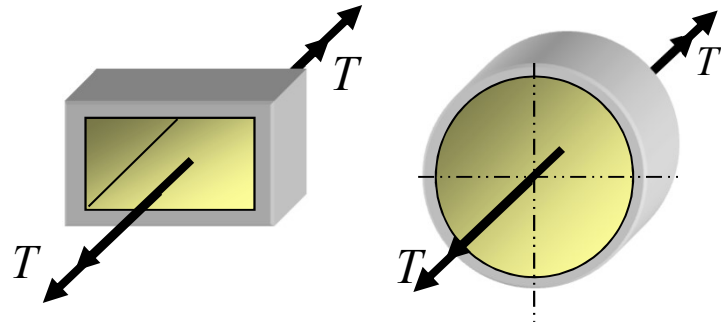
Fig. c) Élément infinitésimal B_1



Notions avancées en torsion

- **Objectifs**
 - Dessiner la propagation du flux de cisaillement sur la section d'une structure en torsion
 - Savoir calculer la contrainte de cisaillement et la constante de torsion (J) pour une section
 - ouverte (mince et épaisse)
 - fermée
 - Identifier la contrainte de cisaillement maximale dans une section composée (en utilisant la compatibilité géométrique)

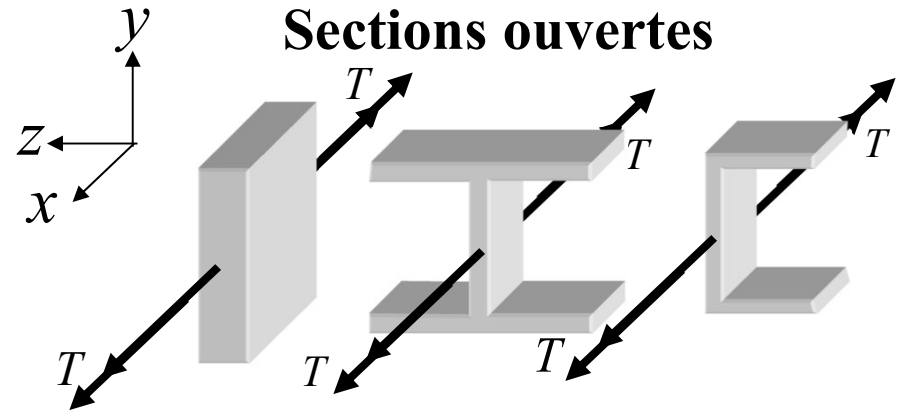
Sections fermées



$$\tau_{xs} = \frac{T}{2 A t}$$

$$J = \frac{4 \bar{A}^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad \text{Formule générale}$$

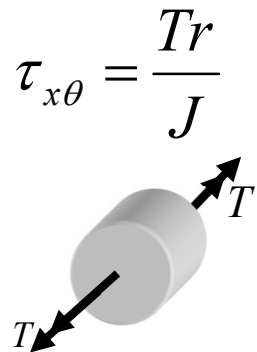
Sections ouvertes



$$\tau_{xy} = \frac{T t}{J}$$

$$J = \frac{1}{3} b t^3$$

Section circulaire



$$\tau_{x\theta} = \frac{T r}{J}$$

$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

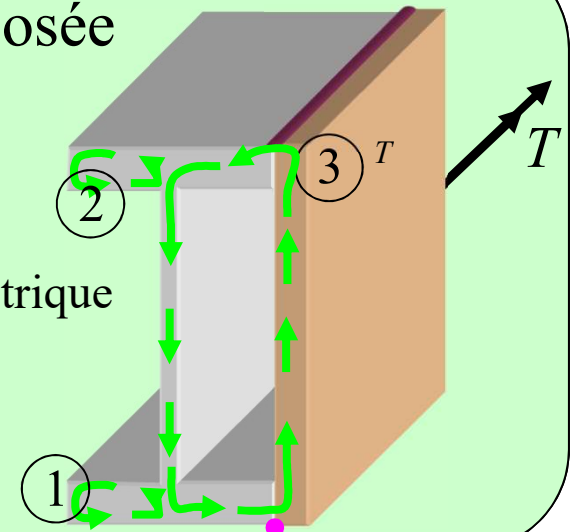
$$J = \frac{\pi (r_e^4 - r_i^4)}{2} = 2 \pi r^3 t$$

Rayon moyen

Section composée

Compatibilité géométrique

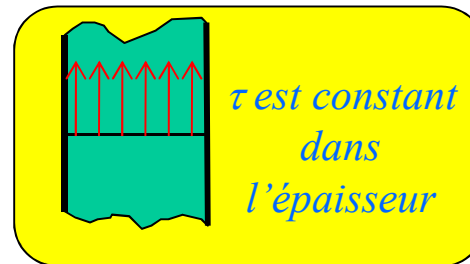
$$\Delta \phi = \frac{T L}{G J}$$



Notions avancées en torsion : Section fermée

q , le **flux** de cisaillement (une définition),
est une force / unité de longueur de paroi,
 N / m . Sur une section **fermée**, q est constant
autour de la section même si l'épaisseur t varie

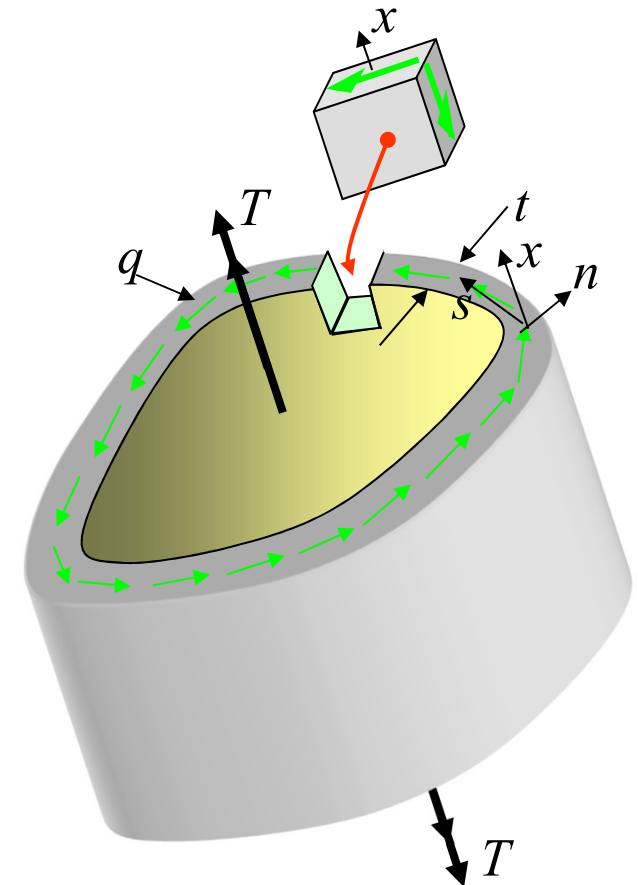
$$q = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xs} \, dn \cong \tau_{xs} t$$



$$\sigma_x = \sigma_n = \sigma_s = \tau_{xn} = \tau_{ns} = 0$$

Donc,

$$\sigma_n = \sigma_3 = 0 \text{ (contrainte principale)}$$



Notions avancées en torsion : Section fermée

Avec $q = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xs} dn \cong \tau_{xs} t$ $q = \text{constant suivant la direction } s$

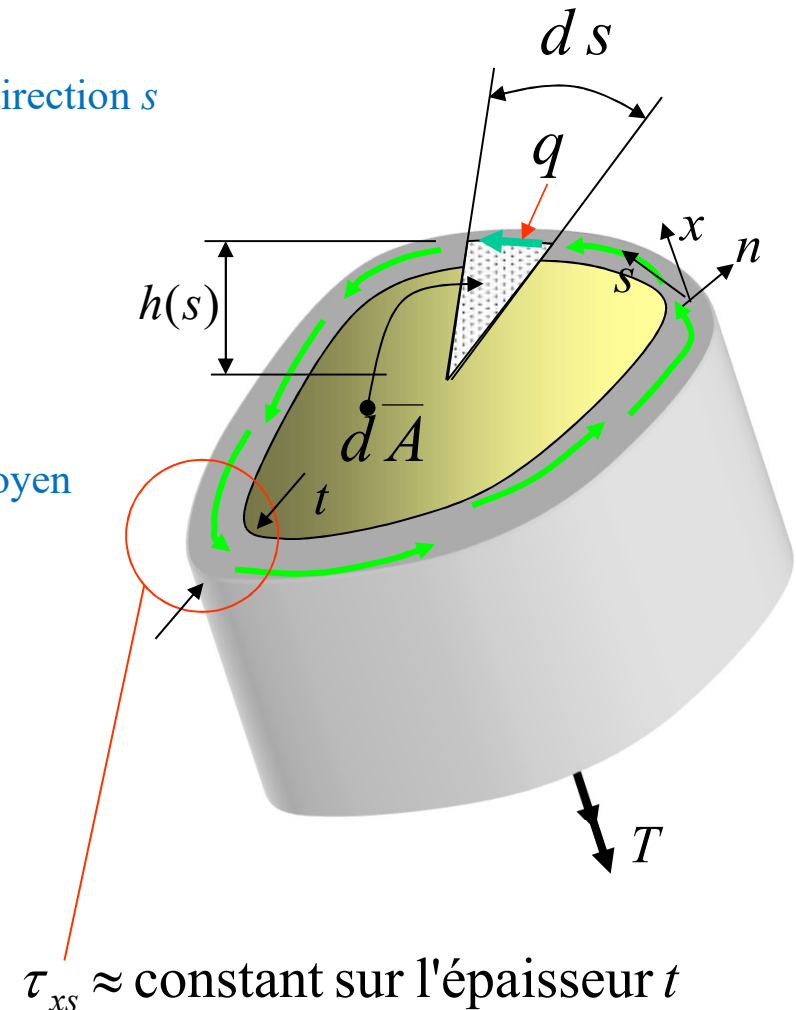
$\sum M_x = T - \int h(s) q ds = 0$ *Équation d'équilibre*

et $\int h(s) ds = 2 \bar{A}$ $\bar{A} = \text{aire du périmètre moyen}$

On obtient : $T = 2 q \bar{A}$

et :

$$\tau_{xs} = \frac{T}{2 A t_{\min}}$$



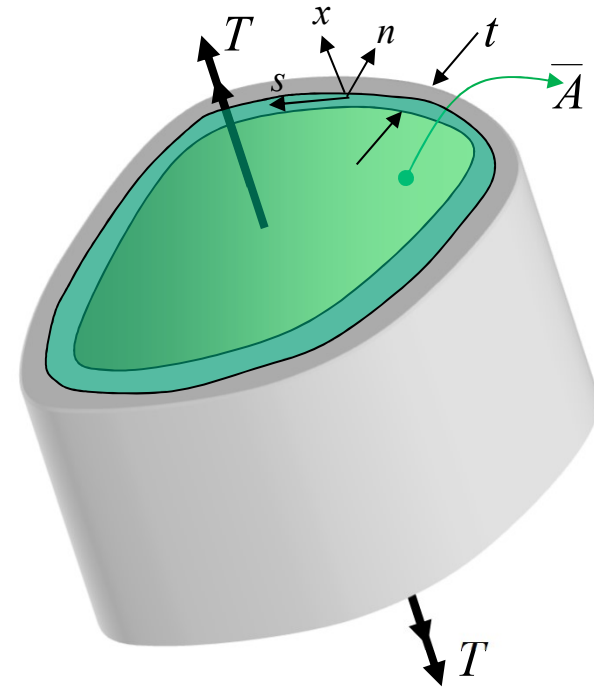
Notions avancées en torsion : Section fermée

Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{xs} = \frac{T}{2 A t_{\min}}$$

τ_{xs} est maximum pour t_{\min}

Puisque q est constant selon s , si t augmente, τ_{xs} diminue



\bar{A} est l'aire à l'intérieur du périmètre moyen de la section

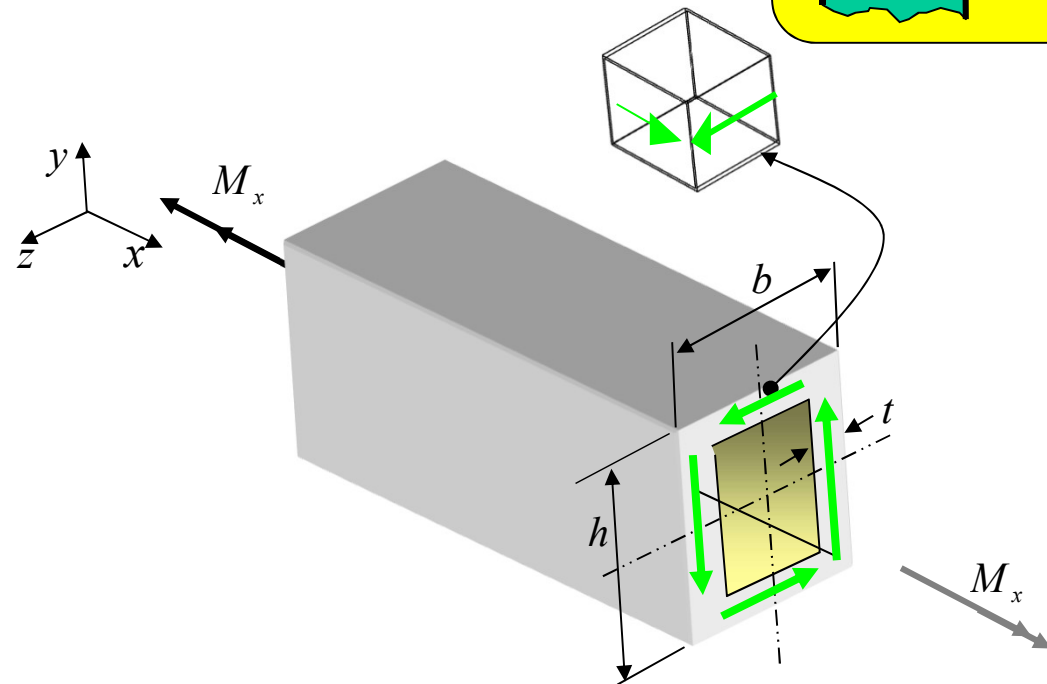
Notions avancées en torsion : Section fermée

Tube rectangulaire à paroi mince



$$\bar{A} = (b - t)(h - t)$$

\bar{A} est la surface à l'intérieur du périmètre moyen



Contrainte de cisaillement moyenne dans la paroi

$$\tau_{xs} = \frac{M_x}{2 \times \bar{A} \times t}$$

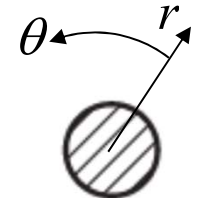
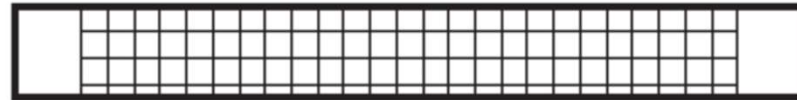
$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_n = \sigma_s &= 0 \\ \tau_{xn} = \tau_{ns} &= 0 \end{aligned}$$

Déformation observée en torsion

Dans un barreau circulaire

$$\tau_{x\theta}$$

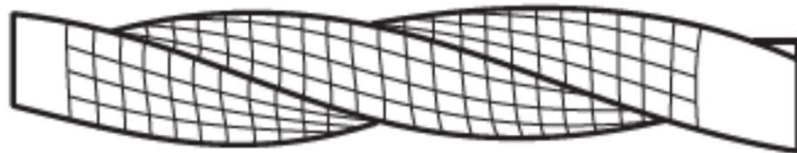
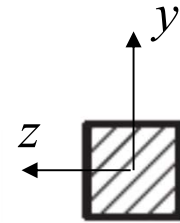
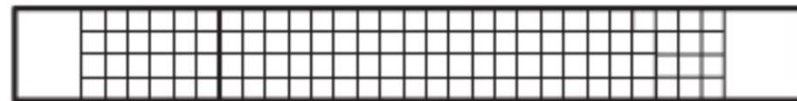
$$s \equiv \theta$$



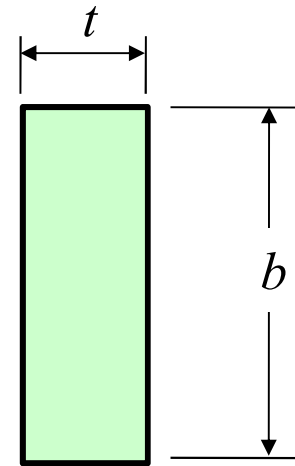
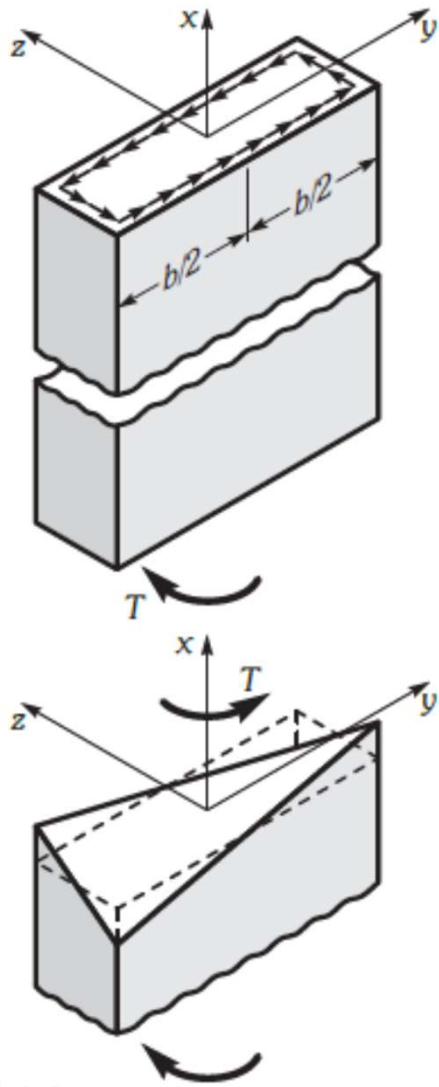
Dans un barreau prismatique

$$\tau_{xy} \text{ et } \tau_{xz}$$

$$\theta \equiv y \text{ ou } \theta \equiv z$$

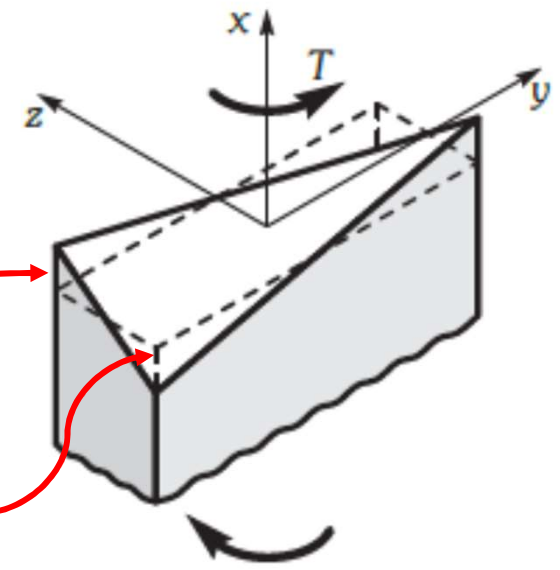


Déformations de cisaillement pour section prismatique

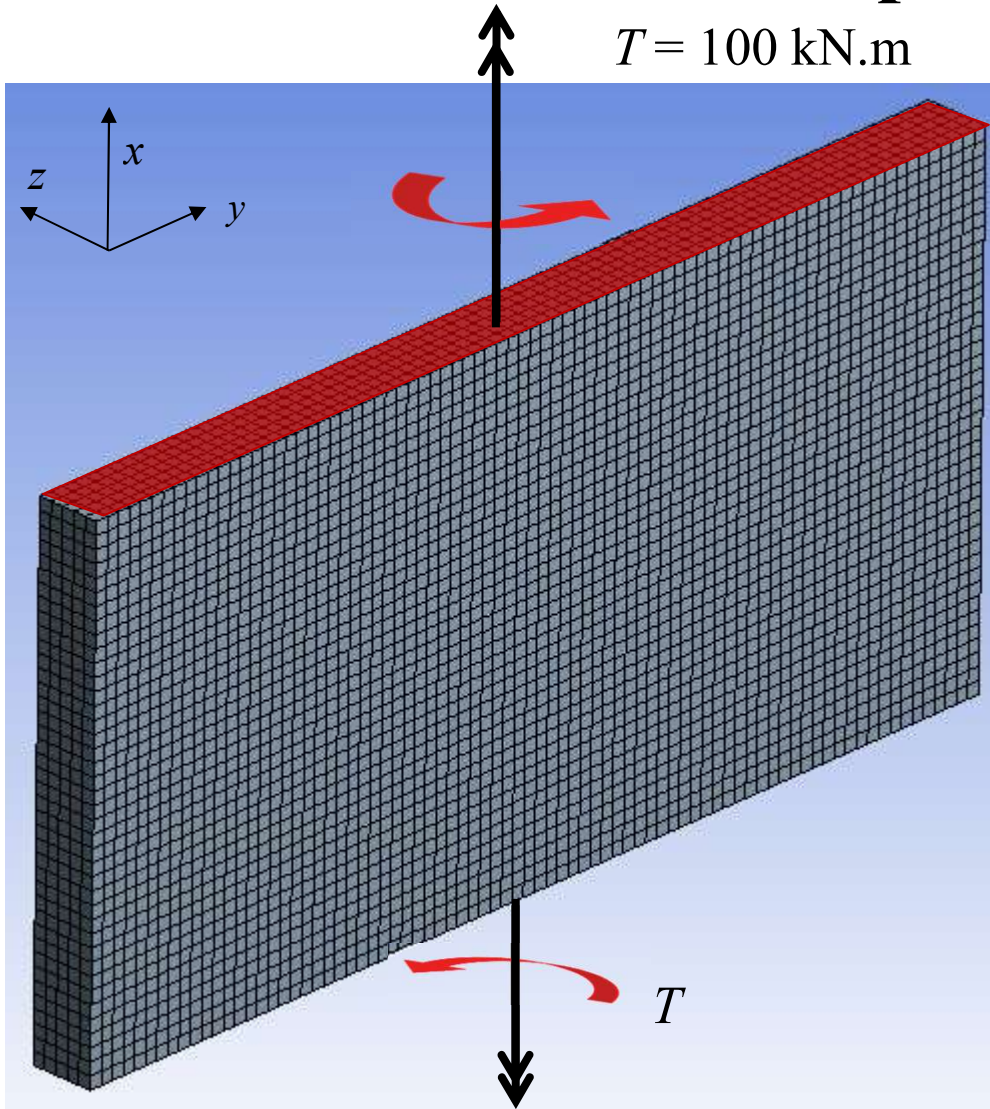


Changement de l'angle droit :
dans le plan x - z , donc γ_{xz} et τ_{xz}

dans le plan x - y , donc γ_{xy} et τ_{xy}



Simulation par ÉF



Rectangle mince:

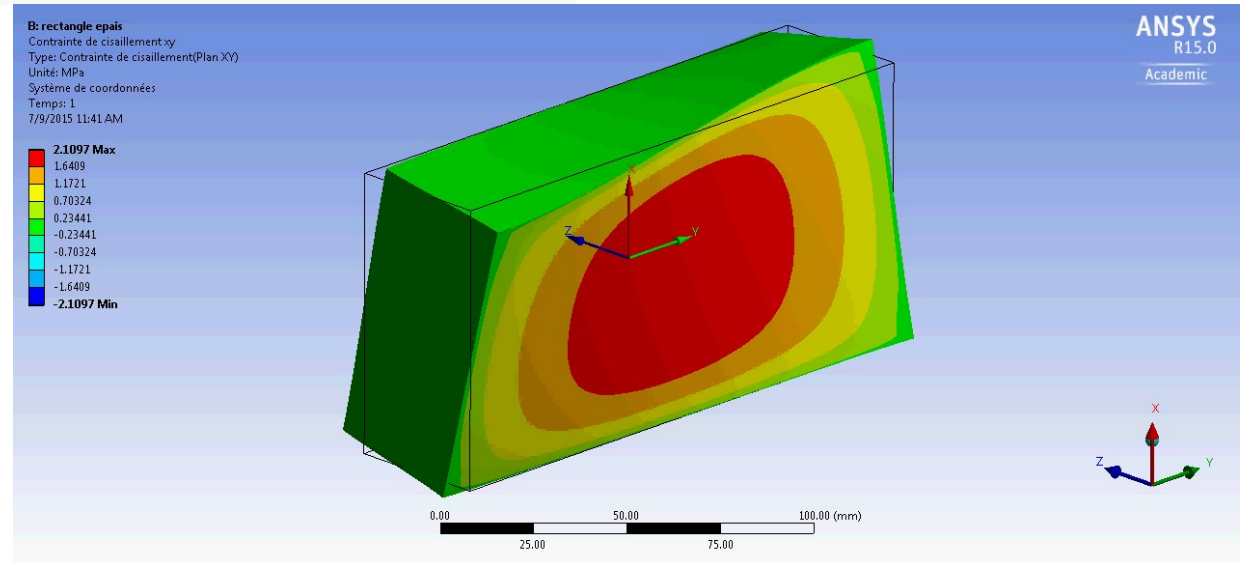
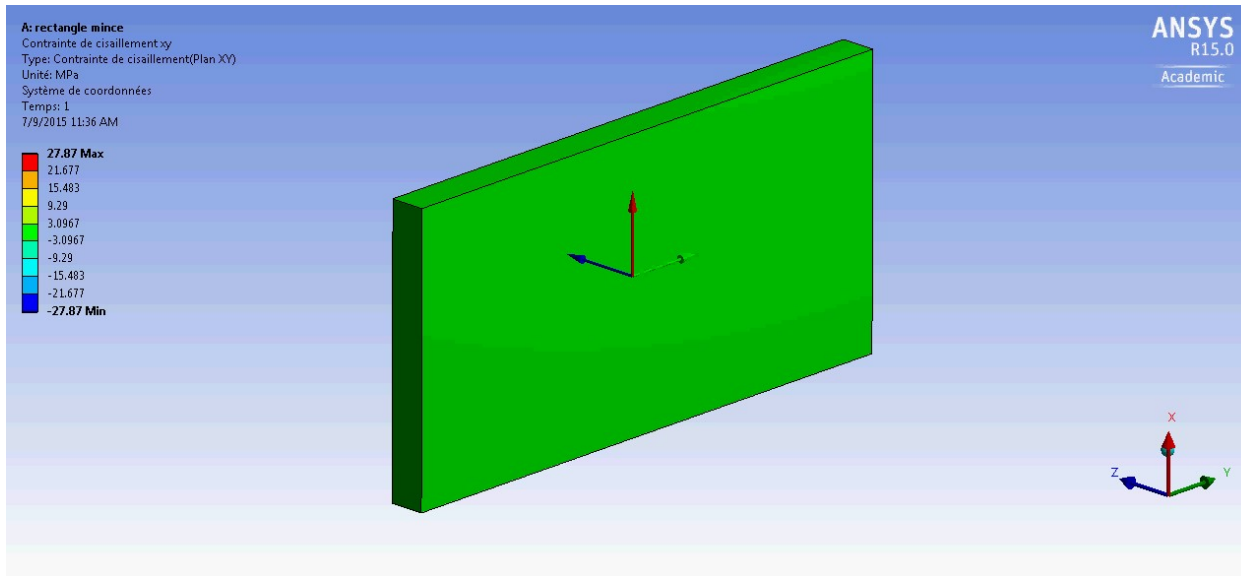
160x10x80mm

Rectangle épais:

160x40x80mm



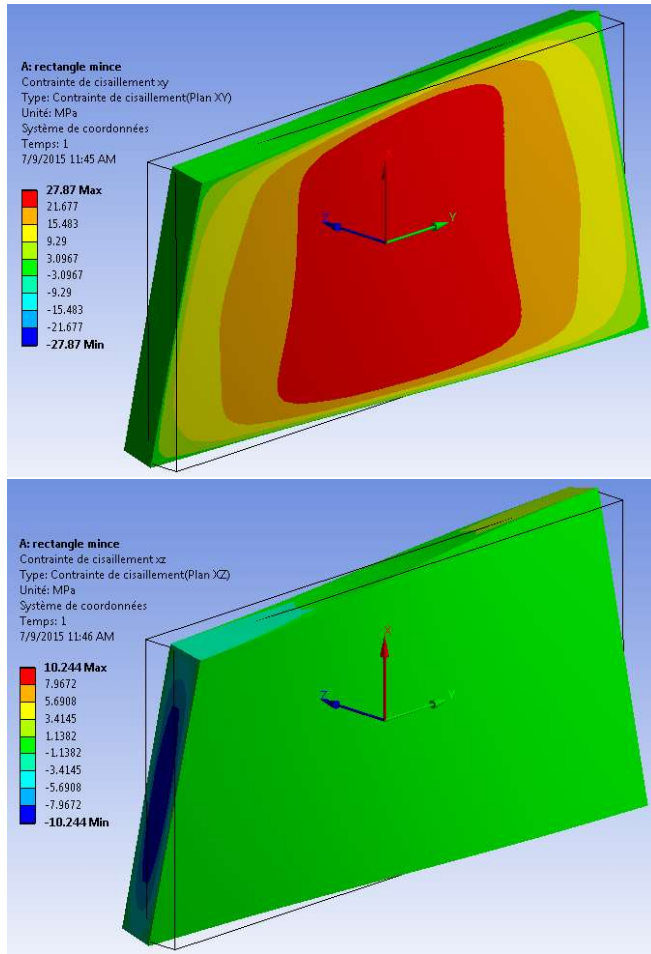
Simulation par ÉF: rectangle mince en torsion



Contraintes de cisaillement pour les 2 épaisseurs

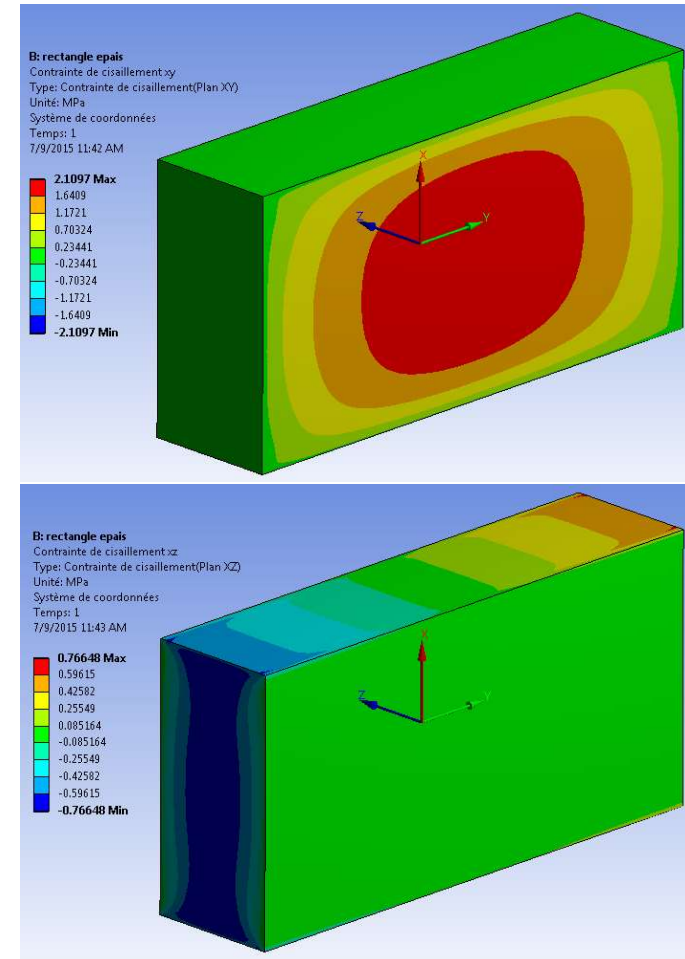
Rectangle mince

Rectangle épais



τ_{xy}

τ_{xz}

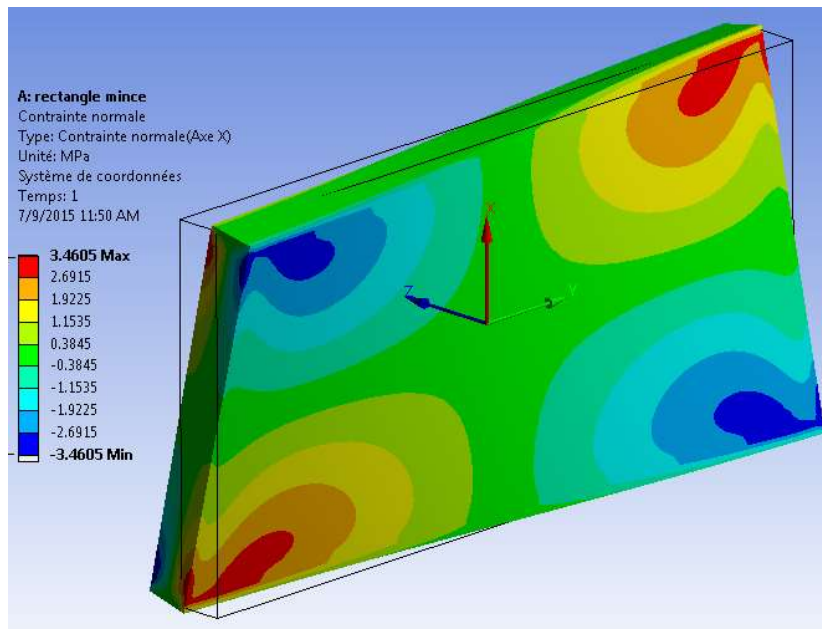


La déformation a été amplifiée d'un facteur 100

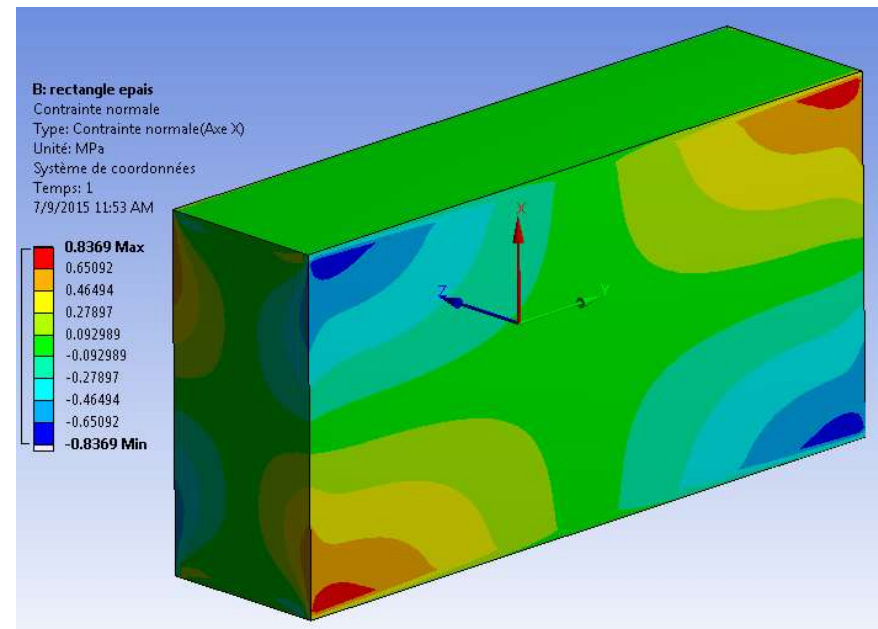
Préparé par Henri Yelle, ing, Marie Bernard, ing et Daniel Therriault, ing.

Contrainte normale σ_x pour les 2 épaisseurs

Rectangle mince



Rectangle épais



La déformation a été amplifiée d'un facteur 100

Préparé par Henri Yelle, ing, Marie Bernard, ing et Daniel Therriault, ing.

Résolution pour une section rectangulaire

Si $b/t > 10$, $k_1 = k_2 = 1,0$
 C'est le cas que nous étudierons

Constante de torsion $J \approx \frac{bt^3}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{t}{b} \operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2t} \right)$ (b)

La contrainte de cisaillement maximale, qui s'exerce aux points situés au milieu des plus grands côtés de la section (points A, fig. 16.9a), s'exprime ainsi :

$$(\tau_{xy})_{max} = \frac{Tt}{J} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \cosh K_n b} \right]$$
 (c)

Il est souvent utile d'exprimer les résultats déjà obtenus sous les formes suivantes :

$$J = k_1 \frac{bt^3}{3}$$
 (d)

$$\beta = \frac{1}{k_1} \frac{T}{\left(\frac{Gbt^3}{3} \right)}$$
 (e)

$$(\tau_{xy})_{max} = k_2 \frac{Tt}{J} = \frac{k_2}{k_1} \frac{Tt}{\left(\frac{bt^3}{3} \right)}$$
 (f)

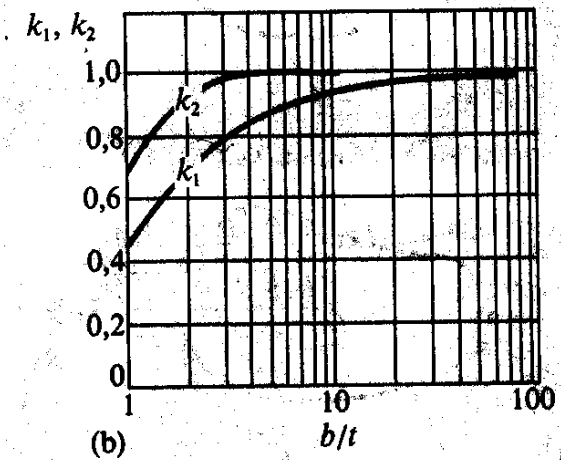
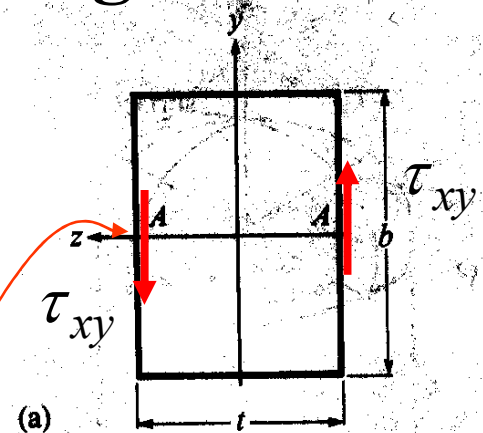


Figure 16.9 a) Section rectangulaire d'un barreau prismatique soumis à une torsion.

Section 16.4.4 du volume

Section ouverte (barreau rectangulaire)

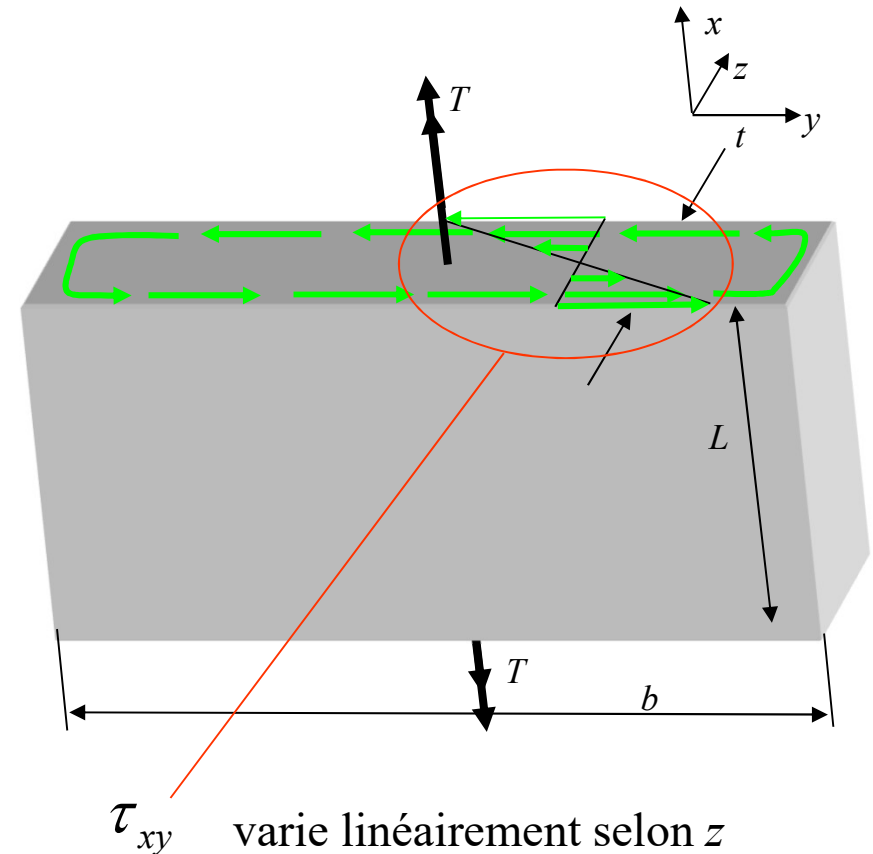
- Contrairement à une section fermée, le *flux* q , pour circuler, doit passer **deux fois** (aller retour) sur l'épaisseur t .
- Ceci fait que le cisaillement change de sens sur l'épaisseur t et la section est **beaucoup moins efficace** pour transmettre de la *torsion*
- Contraintes et constante de torsion

$$\tau_{xy} = \frac{Tt}{J}$$

$$J = \frac{1}{3}bt^3$$

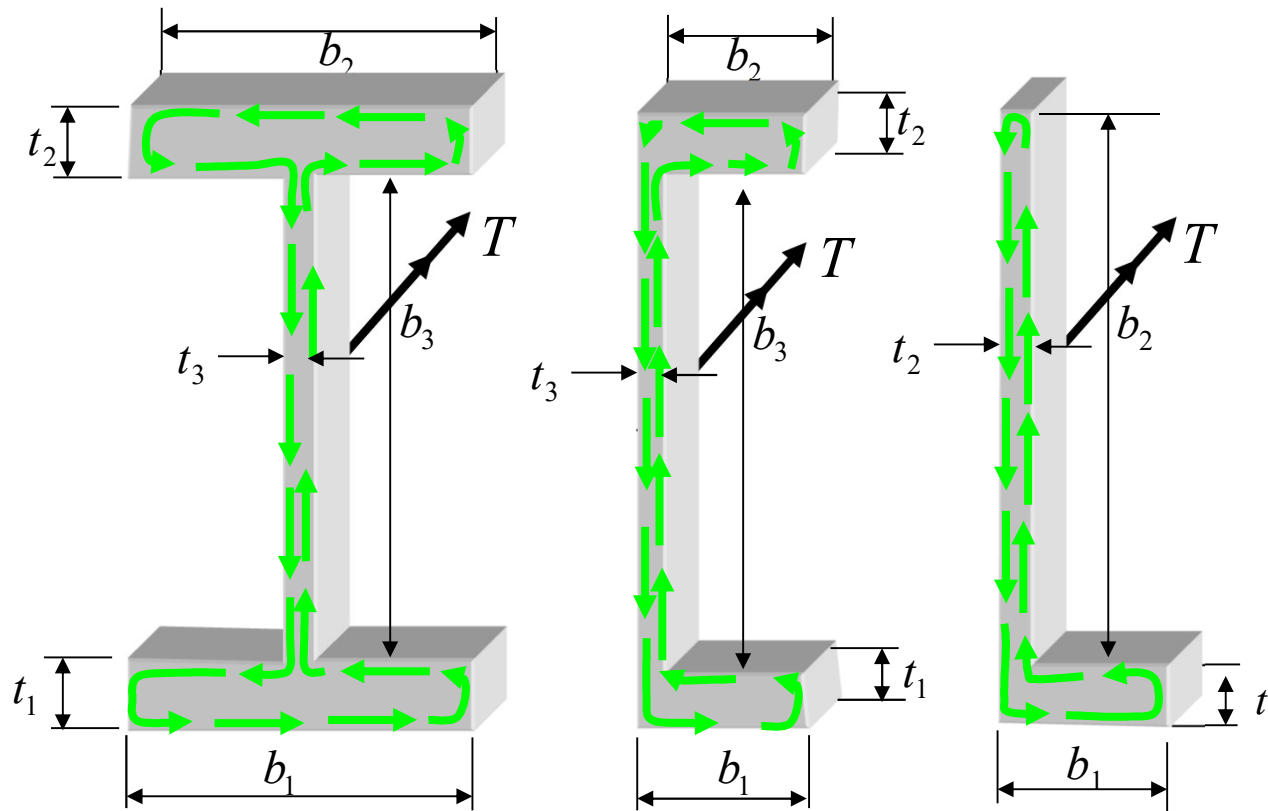
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{xz} \approx 0$$

$$\text{Donc } \sigma_z = \sigma_3 = 0 \text{ (contrainte principale)}$$



Section ouverte (barreau rectangulaire)

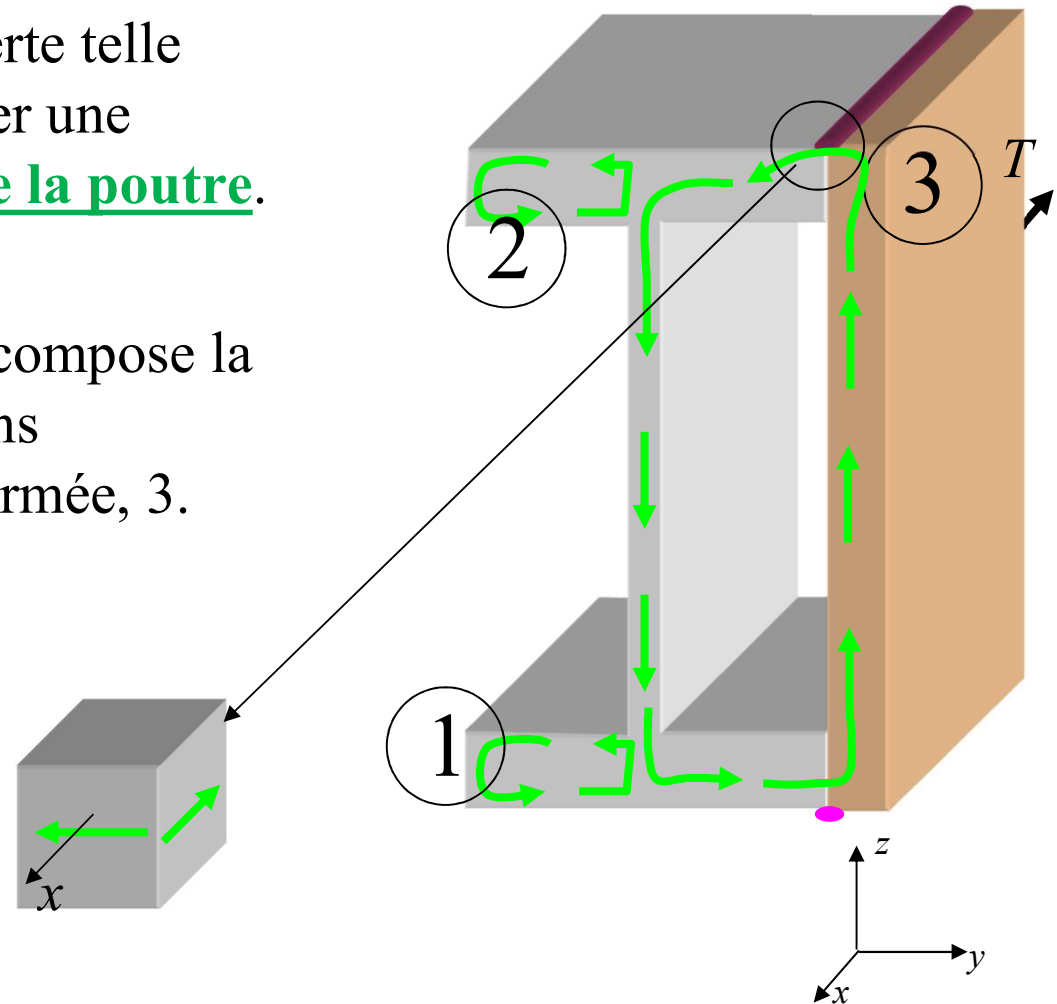
- Sections en I, en C ou en L (exemples de sections ouvertes)
 - Inefficaces pour transmettre un couple de torsion.



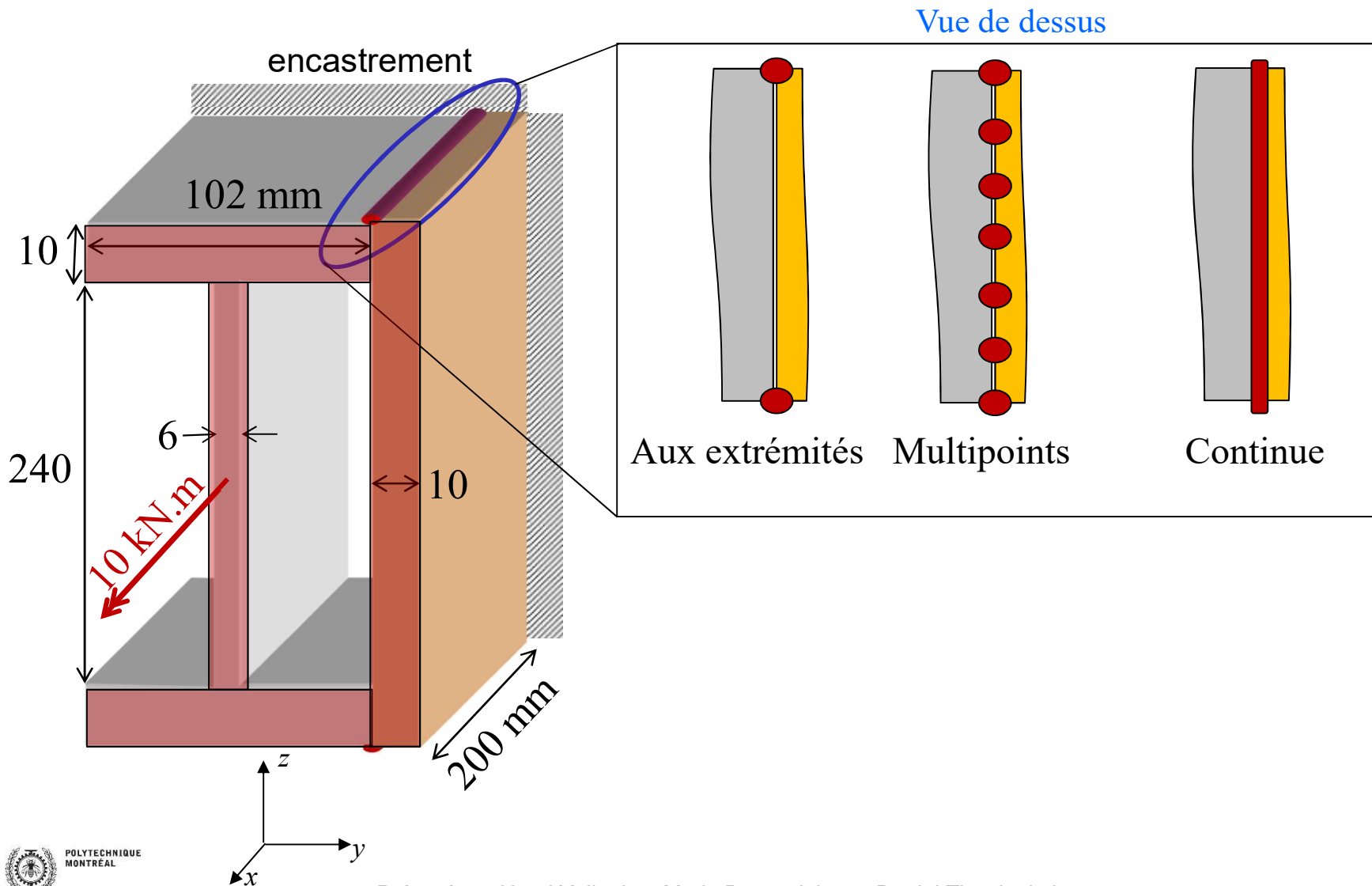
Notions avancées en torsion : Section composée

Pour améliorer une section ouverte telle qu'un profilé en I, on peut souder une plaque sur toute la longueur de la poutre.

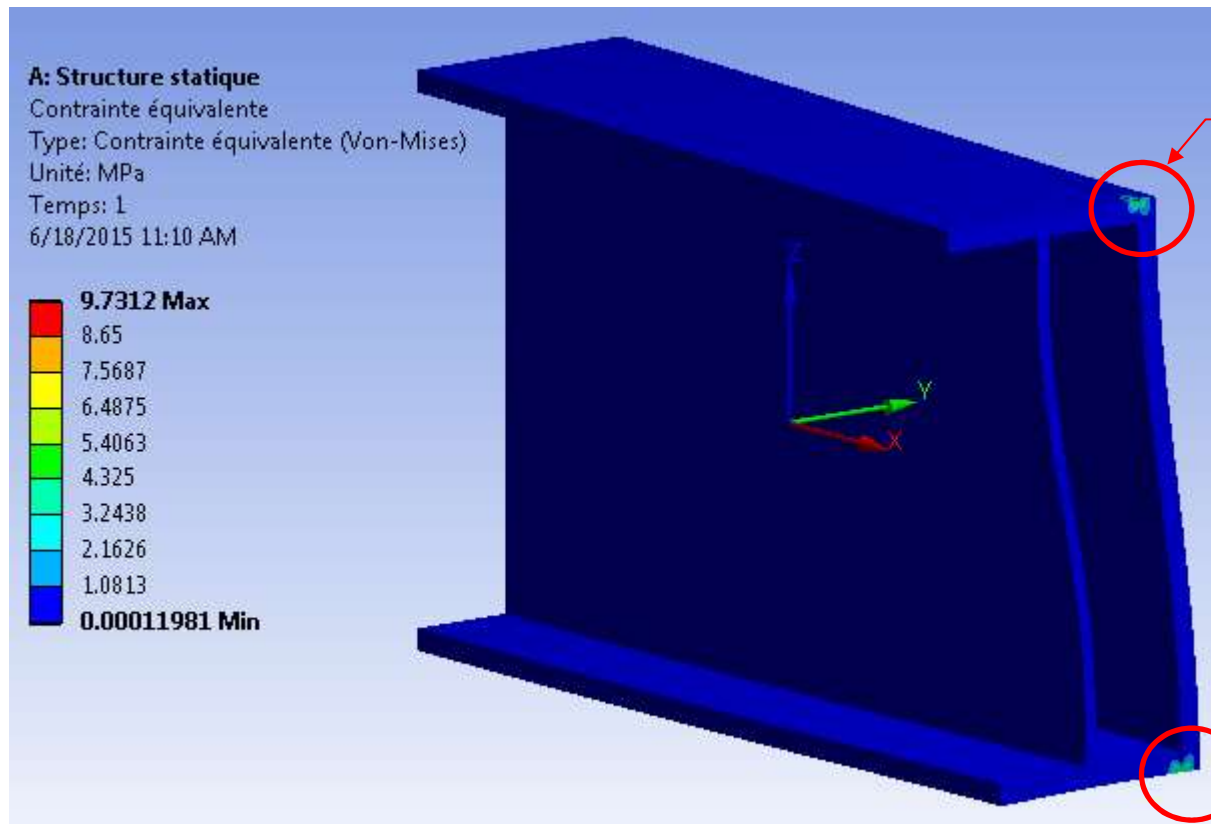
Pour l'analyse en torsion, on décompose la poutre combinée en deux sections ouvertes, 1 et 2, et une section fermée, 3.



Simulation ÉF de la section composée avec 3 types de soudure

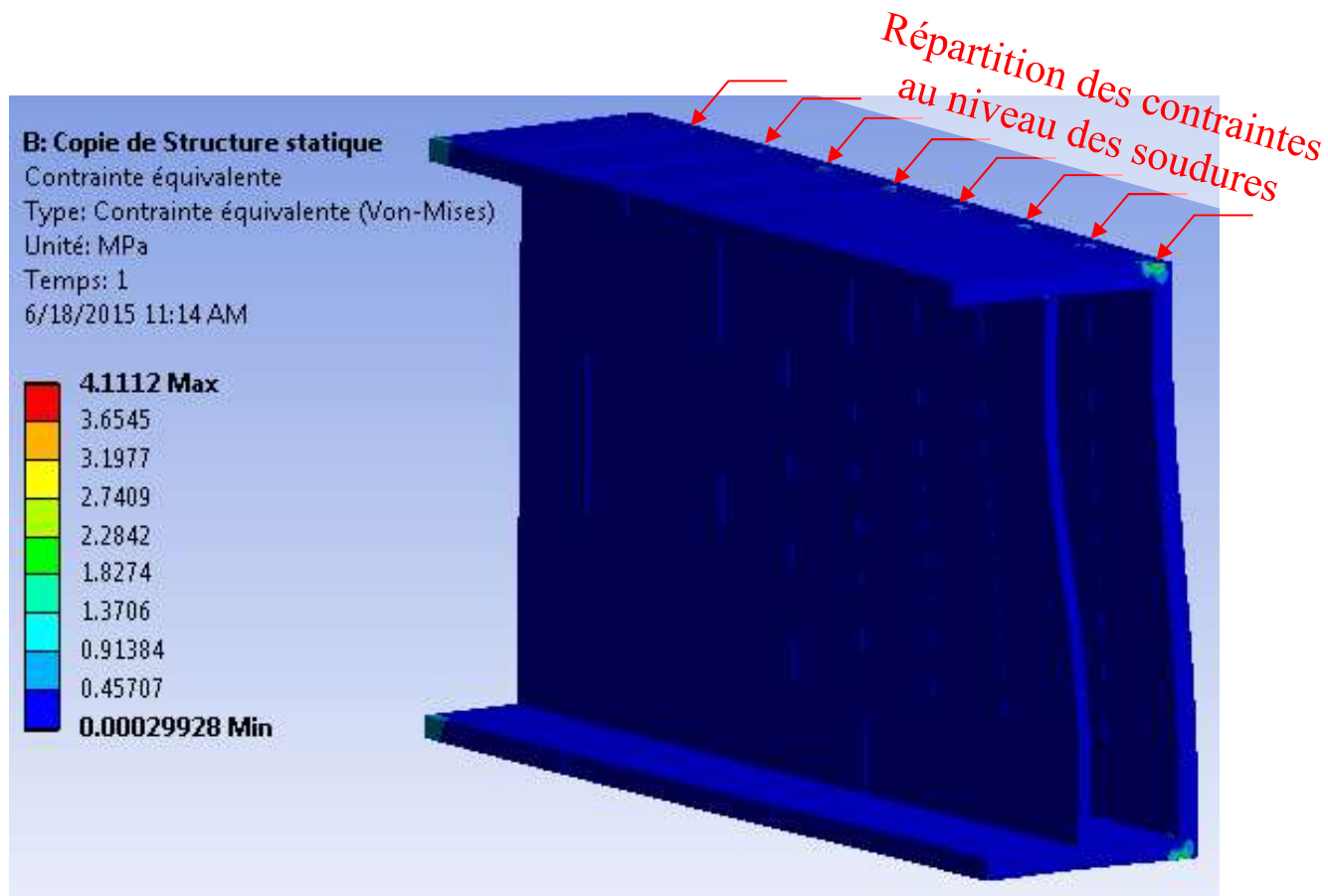


Section composée connectée par des soudures aux extrémités

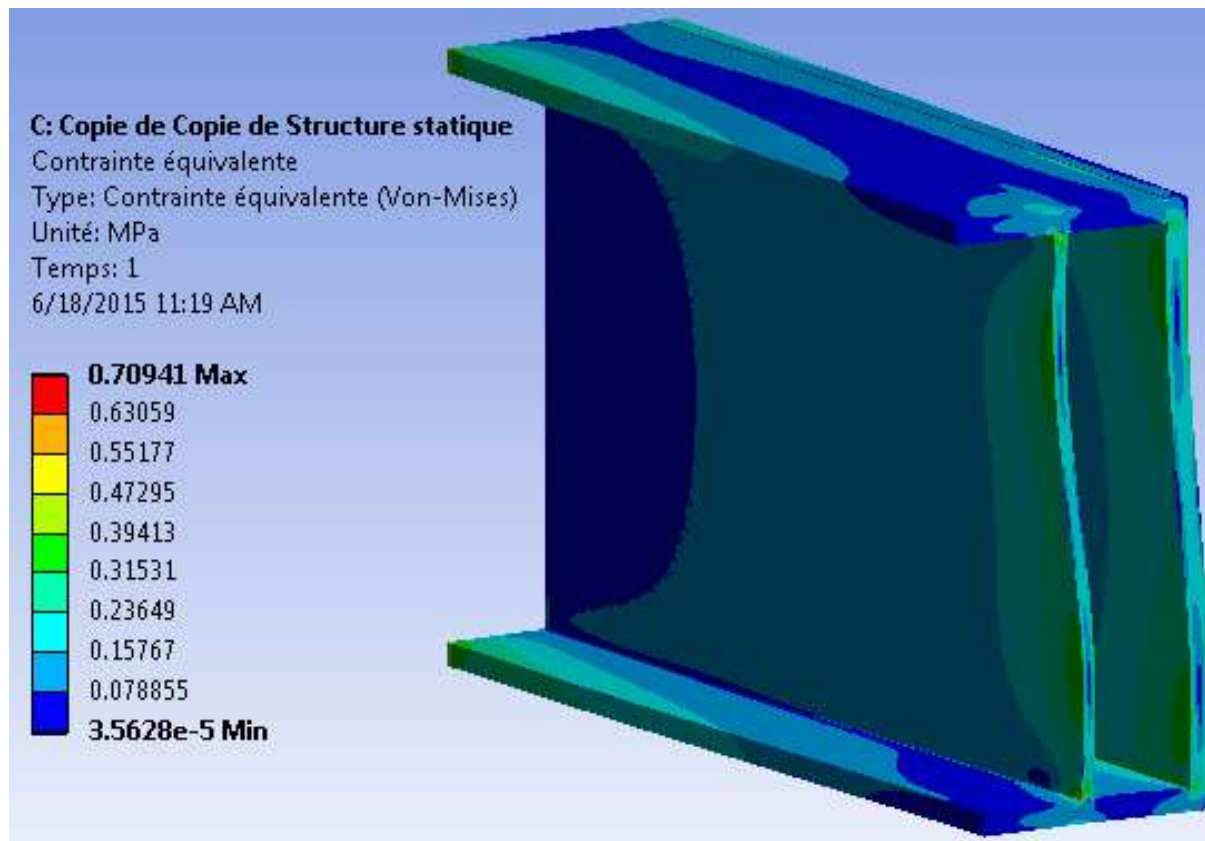


Concentration de contraintes au niveau des soudures

Section composée connectée par des soudures multiples

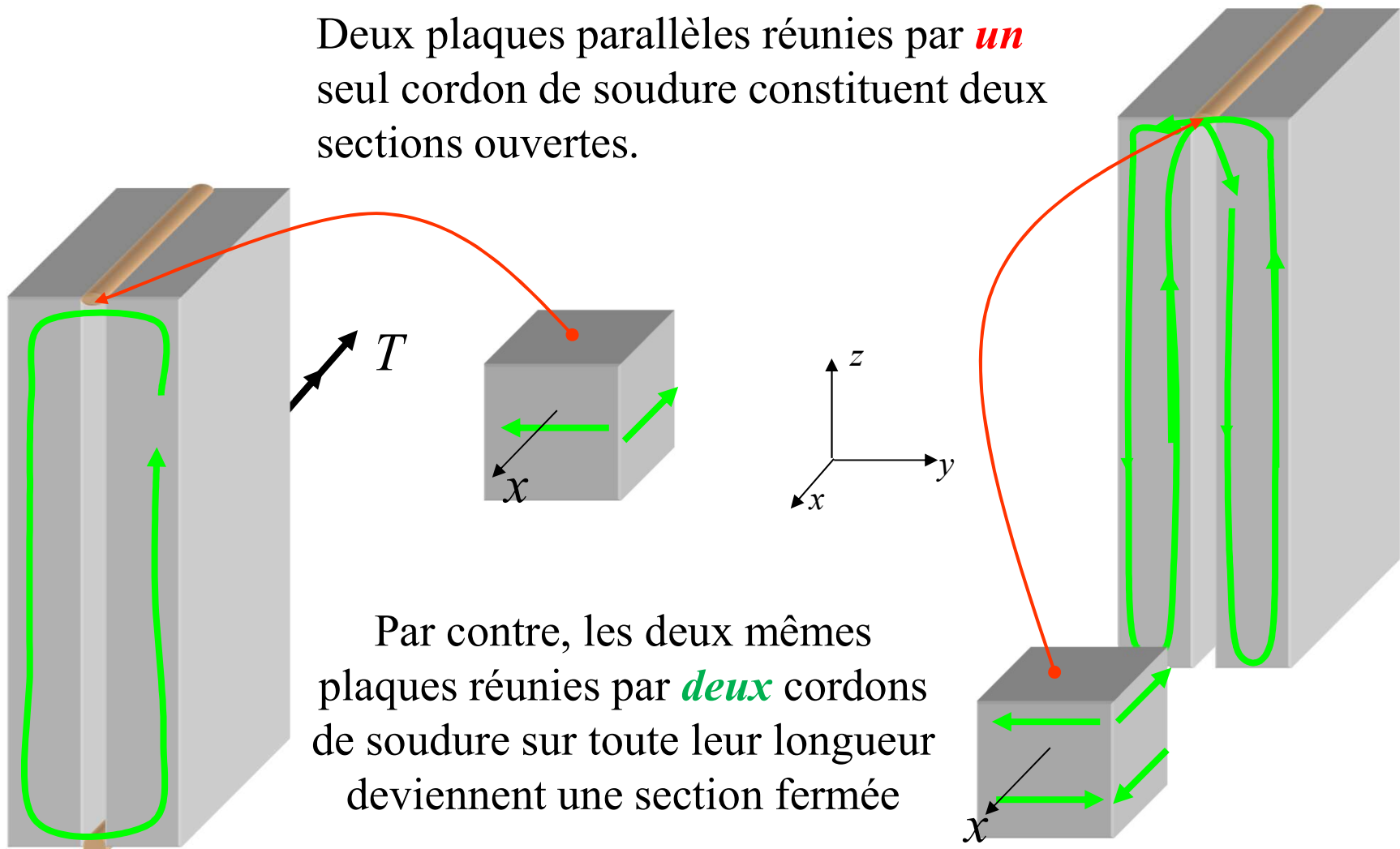


Section composée connectée par des soudures continues



Notions avancées en torsion : Section composée

Deux plaques parallèles réunies par *un* seul cordon de soudure constituent deux sections ouvertes.



Par contre, les deux mêmes plaques réunies par *deux* cordons de soudure sur toute leur longueur deviennent une section fermée

Notions avancées en torsion : Section composée

Exemple :

- Deux cordons de soudure sur toute la longueur du profilé

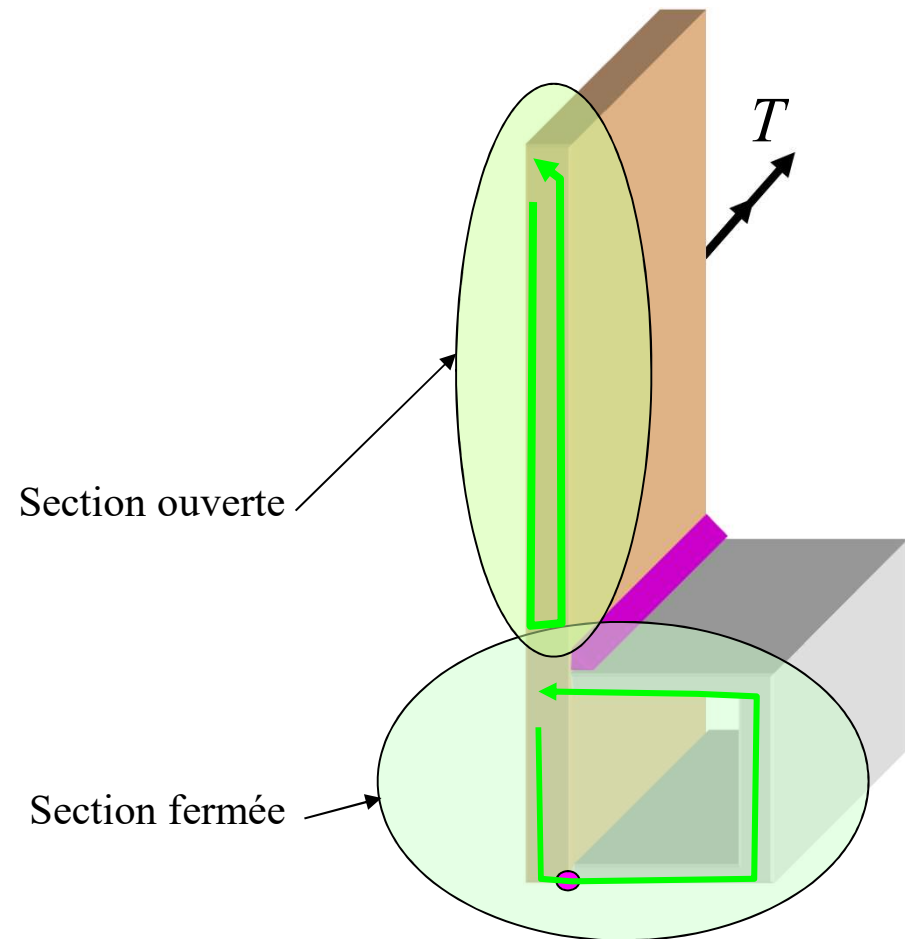


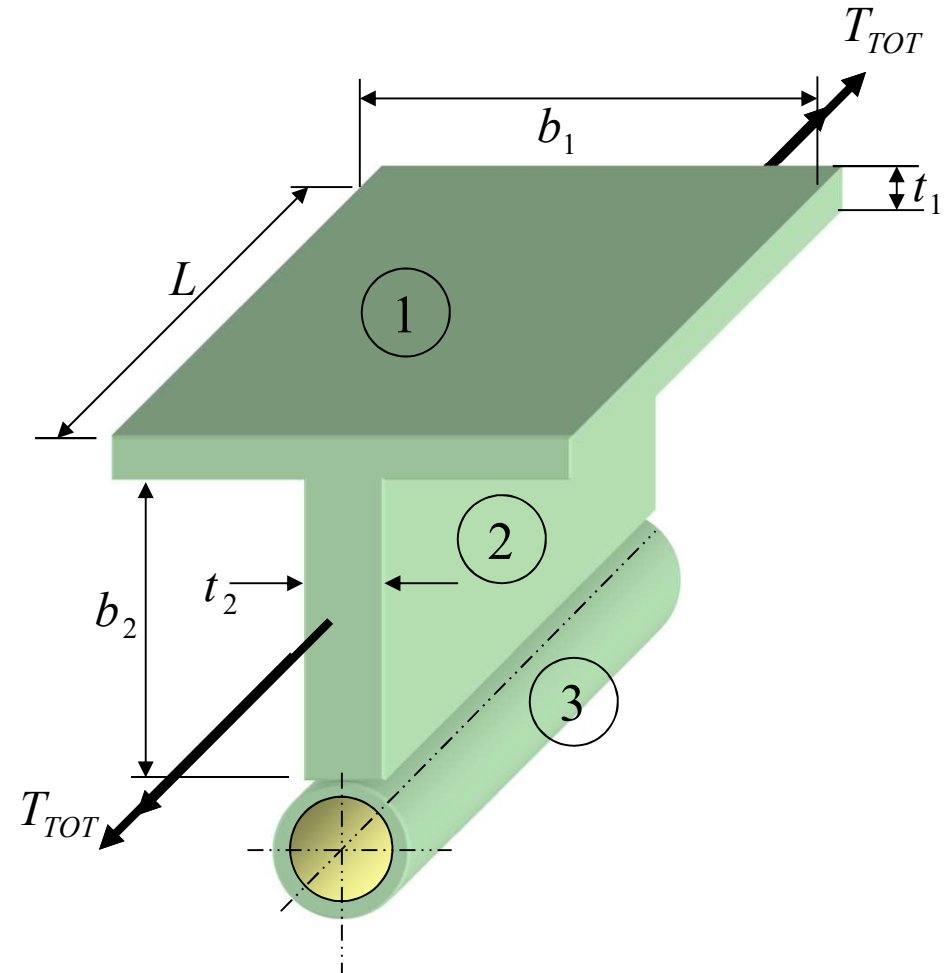
Illustration de la circulation du flux de cisaillement

Notions avancées en torsion : Section composée

Exemple :

On veut connaître T_{TOT} permis pour une valeur de S_Y connue.

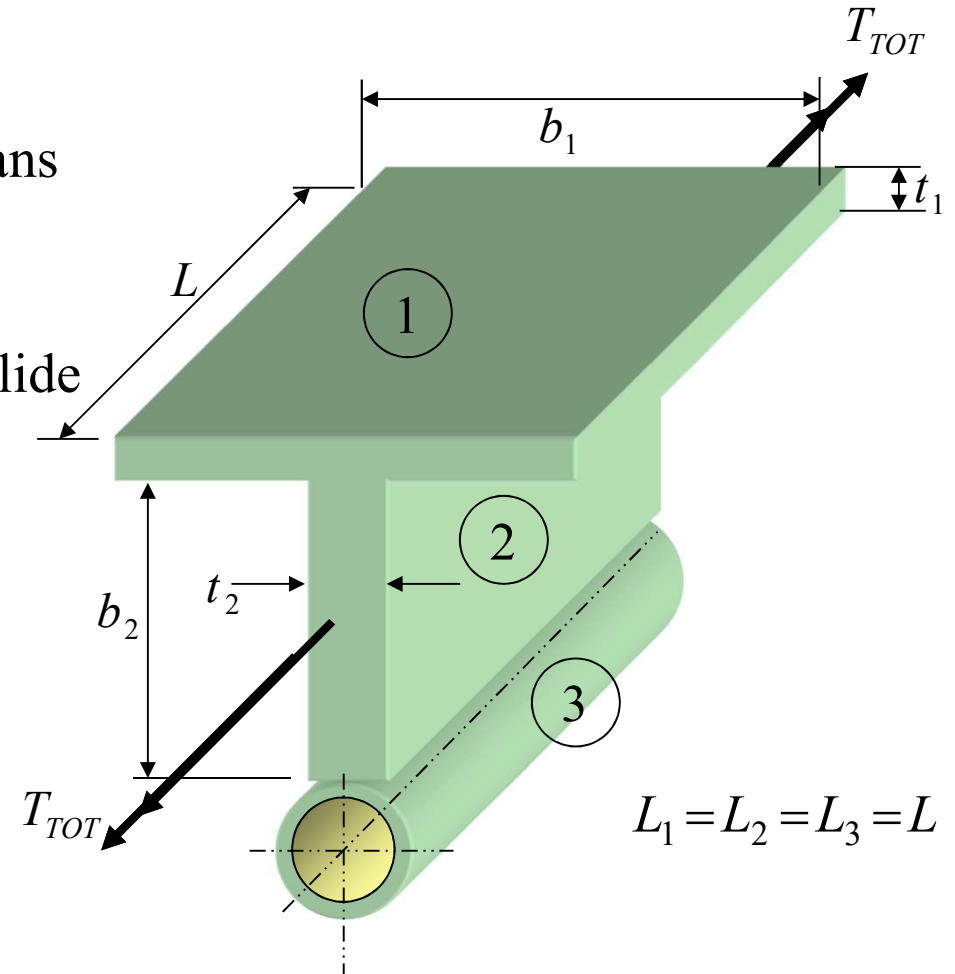
$$L_1 = L_2 = L_3 = L$$



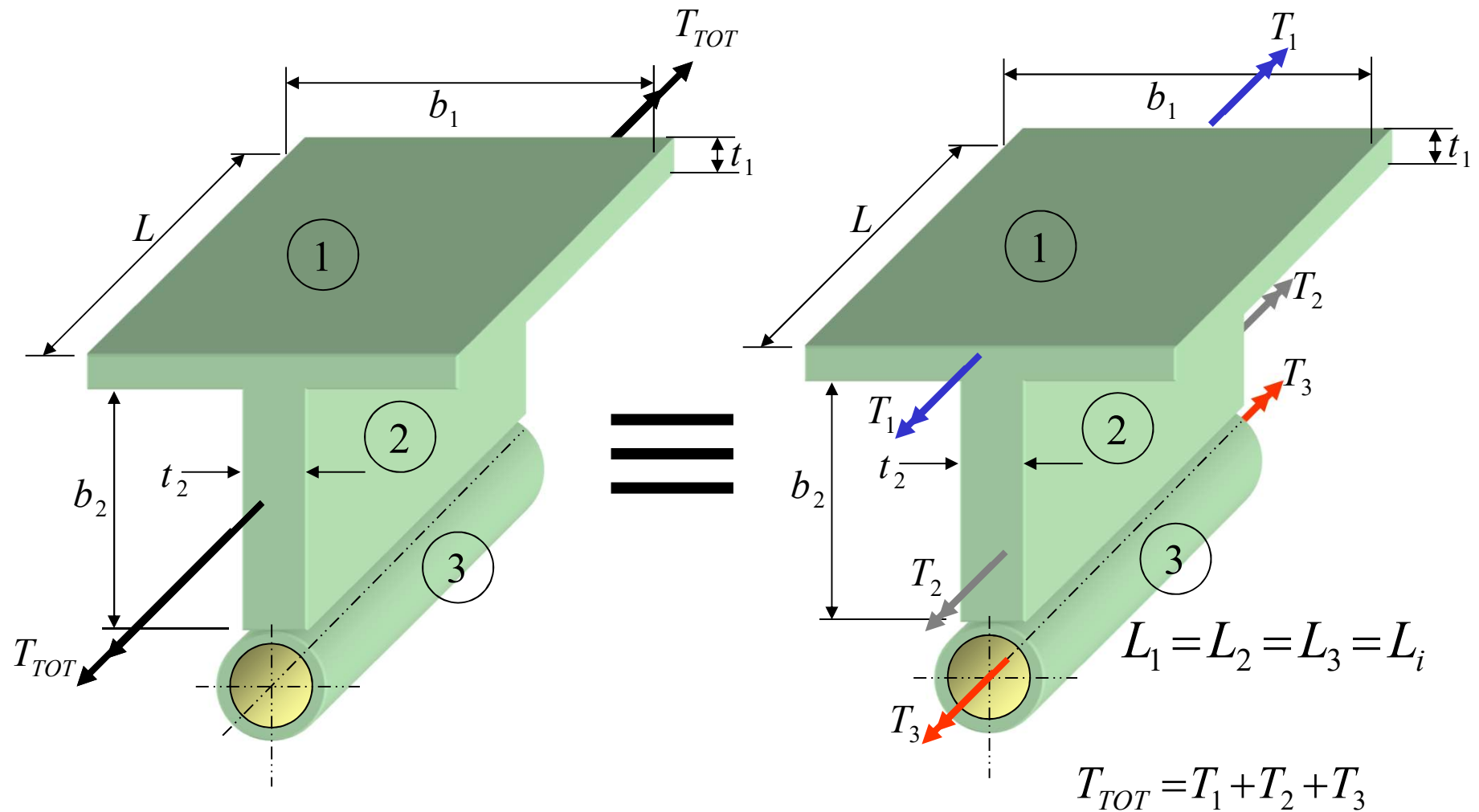
Notions avancées en torsion : Section composée

Procédure de solution :

- 1- Établir la répartition de T_{tot} dans ①, ② et ③ (équilibre)
- 2- Assurer la compatibilité de déformation comme un corps solide
- 3- Calculer les relations T - φ
- 4- Calculer les contraintes
- 5- Calculer T_{TOT} permis



Notions avancées en torsion : Section composée



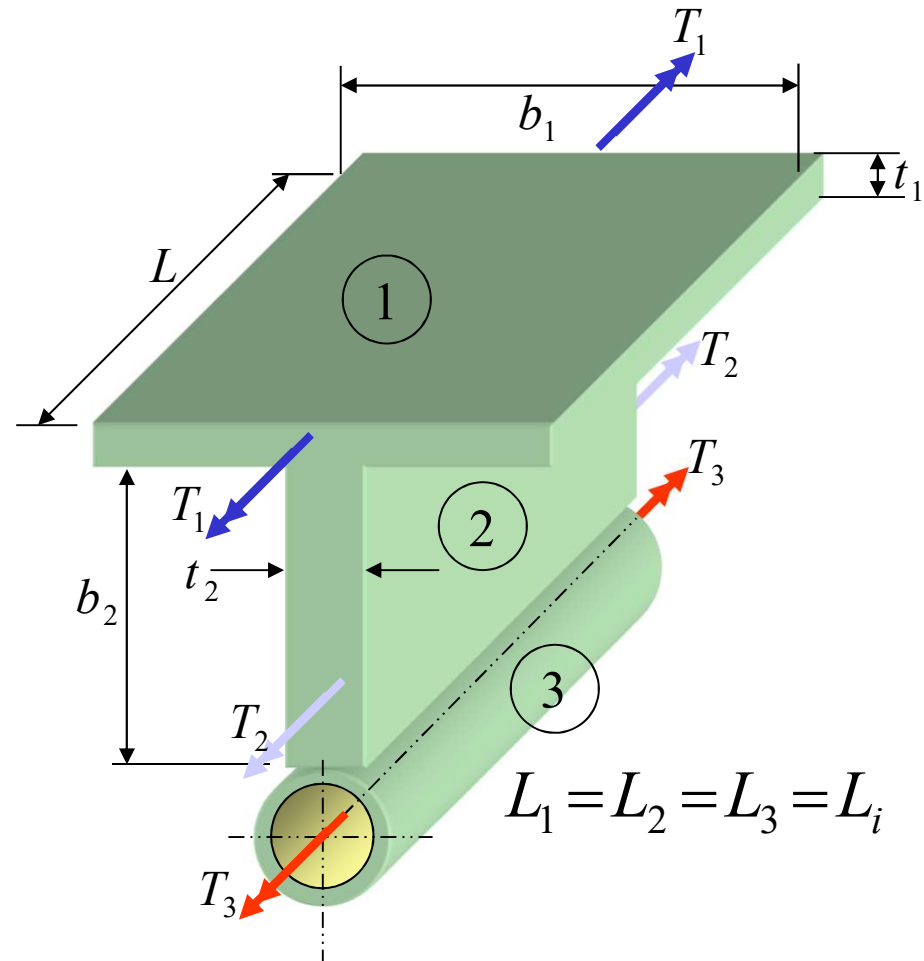
Notions avancées en torsion : Section composée

Solution :

1- Équilibre :

$$T_{TOT} = T_1 + T_2 + T_3$$

T_1 , T_2 et T_3 sont les parties du couple total T_{TOT} reprises respectivement par les sections 1, 2 et 3.



Notions avancées en torsion : Section composée

2- Compatibilité :

Les sections 1, 2 et 3 sont solidaires.

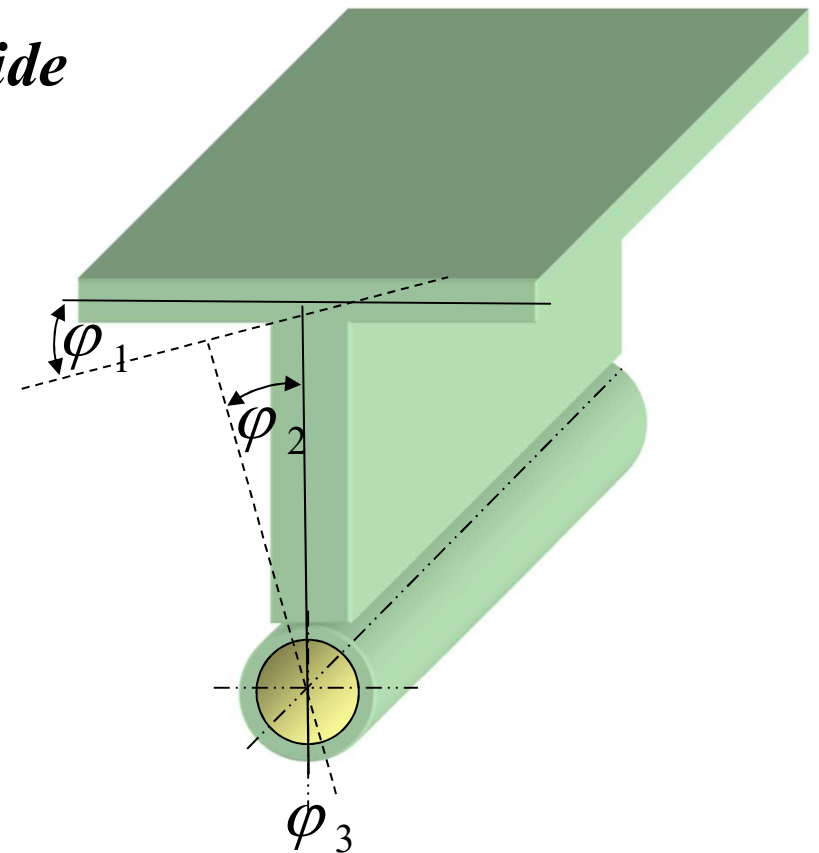
Elles se déforment comme un *corps solide*

sous l'action du couple T_{TOT} .

Donc, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_i$

Si on appelle $\beta = \varphi/L$, on a :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_i = \frac{\varphi_i}{L}$$



Notions avancées en torsion : Section composée

2- Compatibilité :

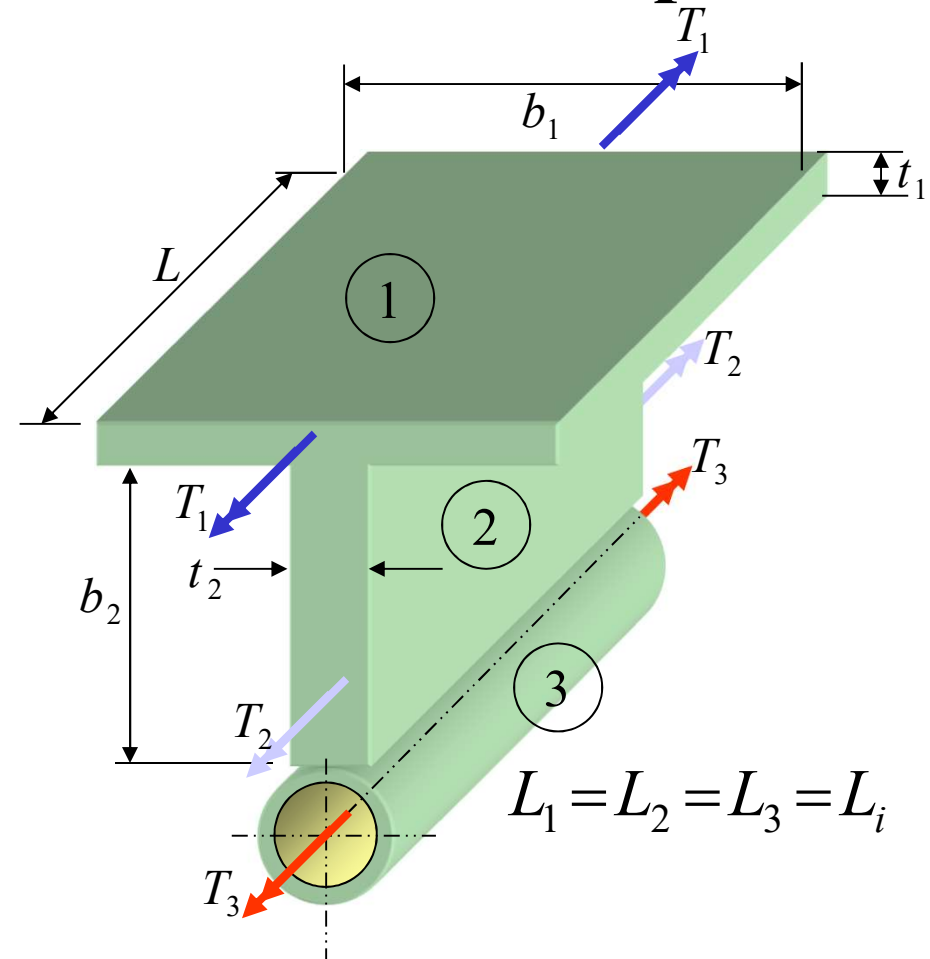
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_i = \frac{\phi_i}{L}$$

3- Relations $T - \phi$:

$$\phi_i = \frac{T_i L}{J_i G_i} \Rightarrow \beta_i = \frac{T_i}{J_i G_i}$$

ou que

$$\frac{T_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2}{J_2 G_2} = \frac{T_3}{J_3 G_3}$$



Notions avancées en torsion : Section composée

2- Compatibilité :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_i = \frac{\phi_i}{L_i}$$

3- Relations $T - \phi$:

$$\phi_i = \frac{T_i L}{J_i G_i} \quad \beta_i = \frac{T_i}{J_i G_i}$$

Rappel:

Formule trigonométrique

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Si les valeurs de G_i sont identiques :

$$\frac{T_1}{J_1 G} = \frac{T_2}{J_2 G} = \frac{T_3}{J_3 G} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{(J_1 + J_2 + J_3) G} = \frac{T_{TOT}}{J_{TOT} G}$$

*Lorsque même matériau
dans sections 1, 2 et 3*

3- Relations $T - \varphi$:

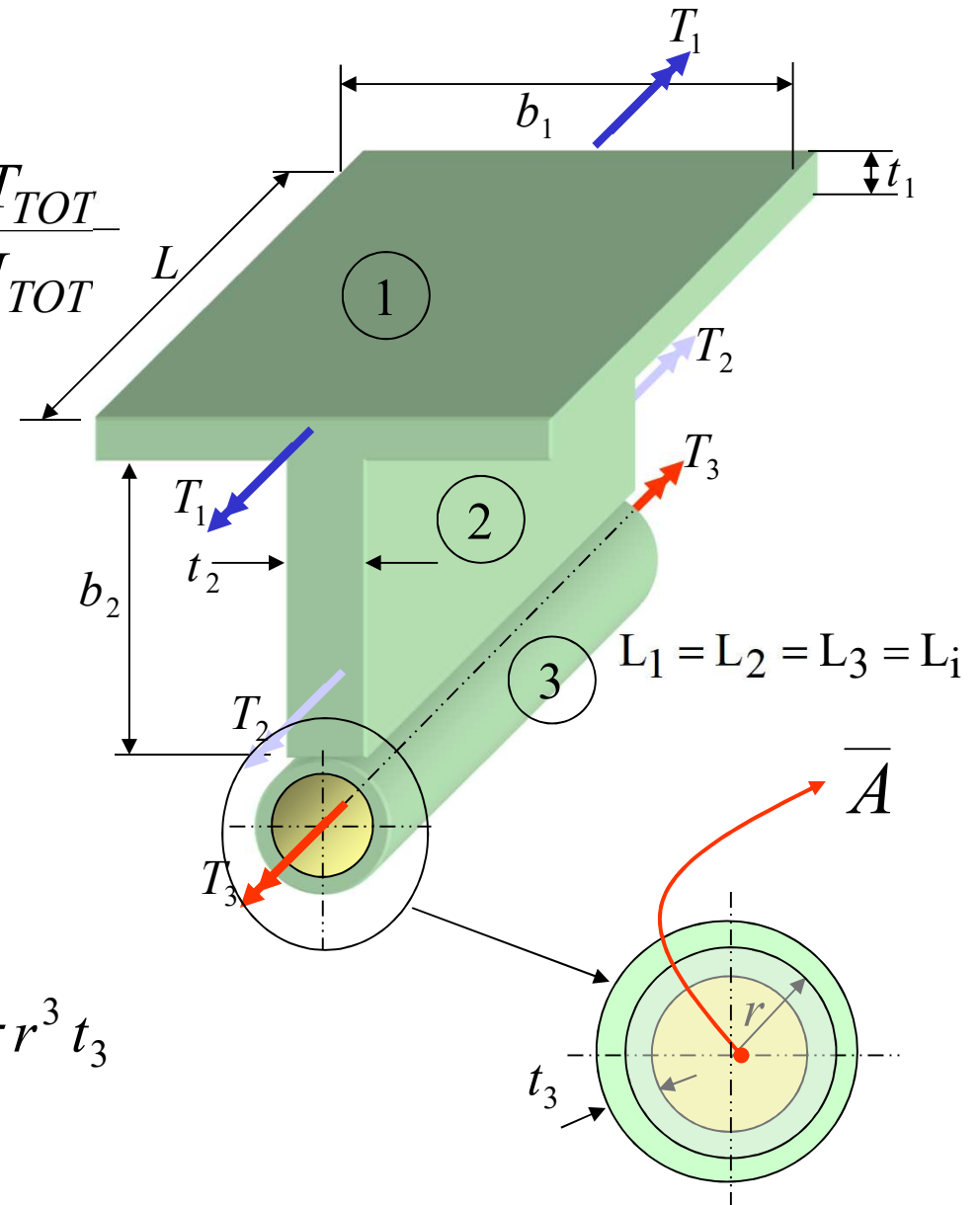
$$\frac{T_1}{J_1} = \frac{T_2}{J_2} = \frac{T_3}{J_3} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{(J_1 + J_2 + J_3)} = \frac{T_{TOT}}{J_{TOT}}$$

J_1 et J_2 : **constantes de torsion**
pour une section ouverte

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{3}(b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3)$$

J_3 : **constante de torsion**
pour une section fermée circulaire:

$$J_3 = \frac{4 \bar{A}^2}{\int_{t_3} ds} = \frac{4 \bar{A}^2}{\text{périmètre}} = \frac{4 \bar{A}^2}{2 \pi r} = 2 \pi r^3 t_3$$



Notions avancées en torsion : Section composée

4- Calcul de τ :

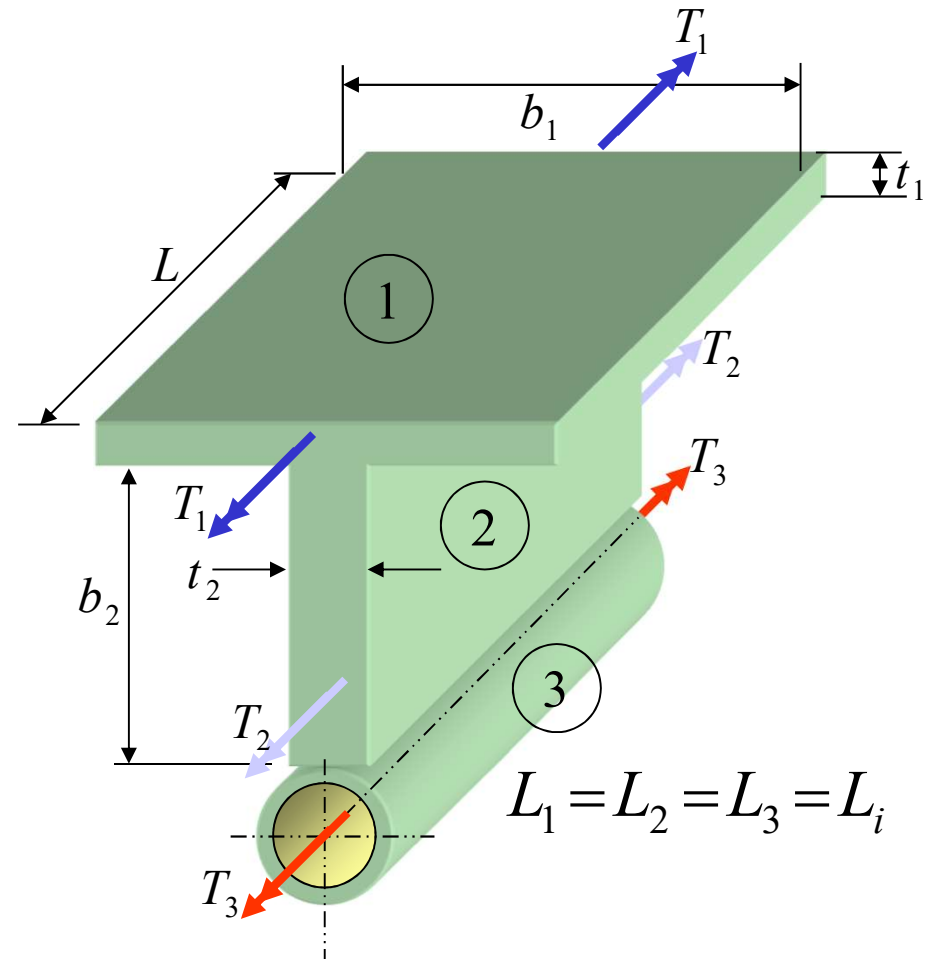
a) sections ouvertes (1)

$$(\tau_{xs})_1 = \frac{T_1 t_1}{J_1}$$

$$\frac{T_1}{J_1} = \frac{T_2}{J_2} = \frac{T_{TOT}}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs})_1 = \frac{T_1 t_1}{J_1} = \frac{T_{TOT} t_1}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs})_2 = \frac{T_2 t_2}{J_2} = \frac{T_{TOT} t_2}{J_{TOT}}$$



Même approche pour section (2)

Notions avancées en torsion : Section composée

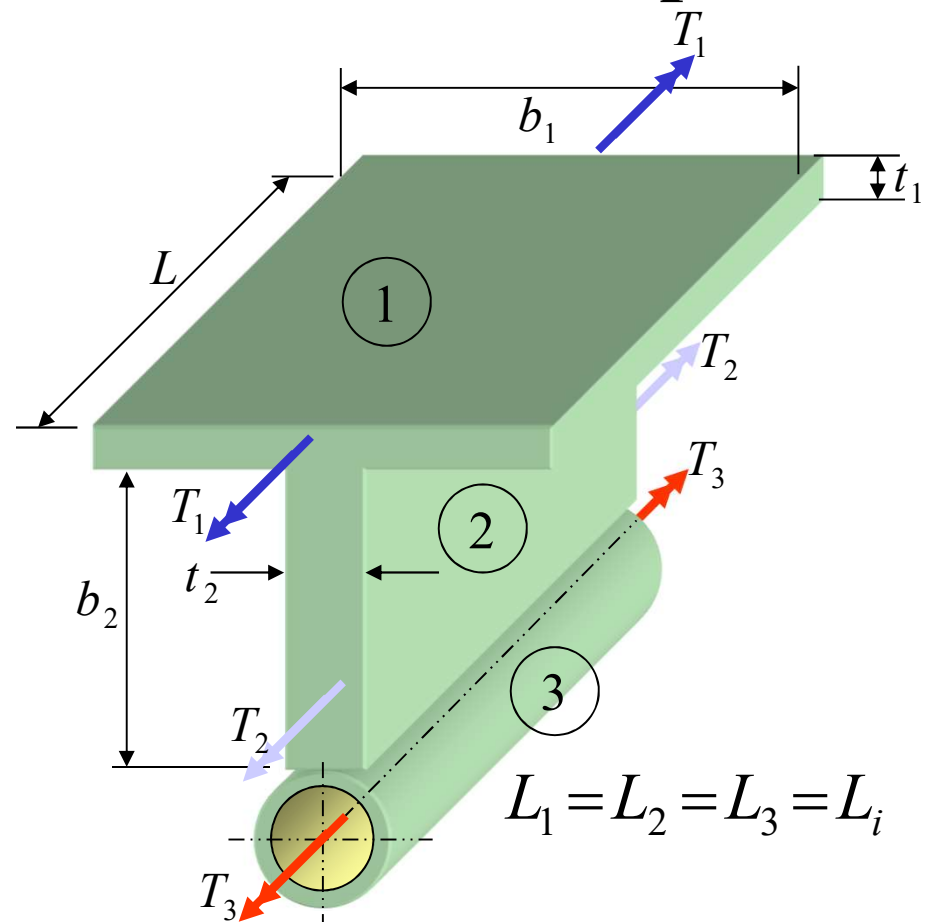
4- Calcul de τ :

a) sections ouvertes (1 et 2)

$$(\tau_{xs})_1 = \frac{T_{TOT} t_1}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs})_2 = \frac{T_{TOT} t_2}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs \max})_{ouvert} = \frac{T_{TOT} t_{\max \text{ de } 1 \text{ et } 2}}{J_{TOT}}$$



Utiliser la plus grande épaisseur pour calculer la contrainte maximale des sections ouvertes

Notions avancées en torsion : Section composée

4- Calcul de τ :

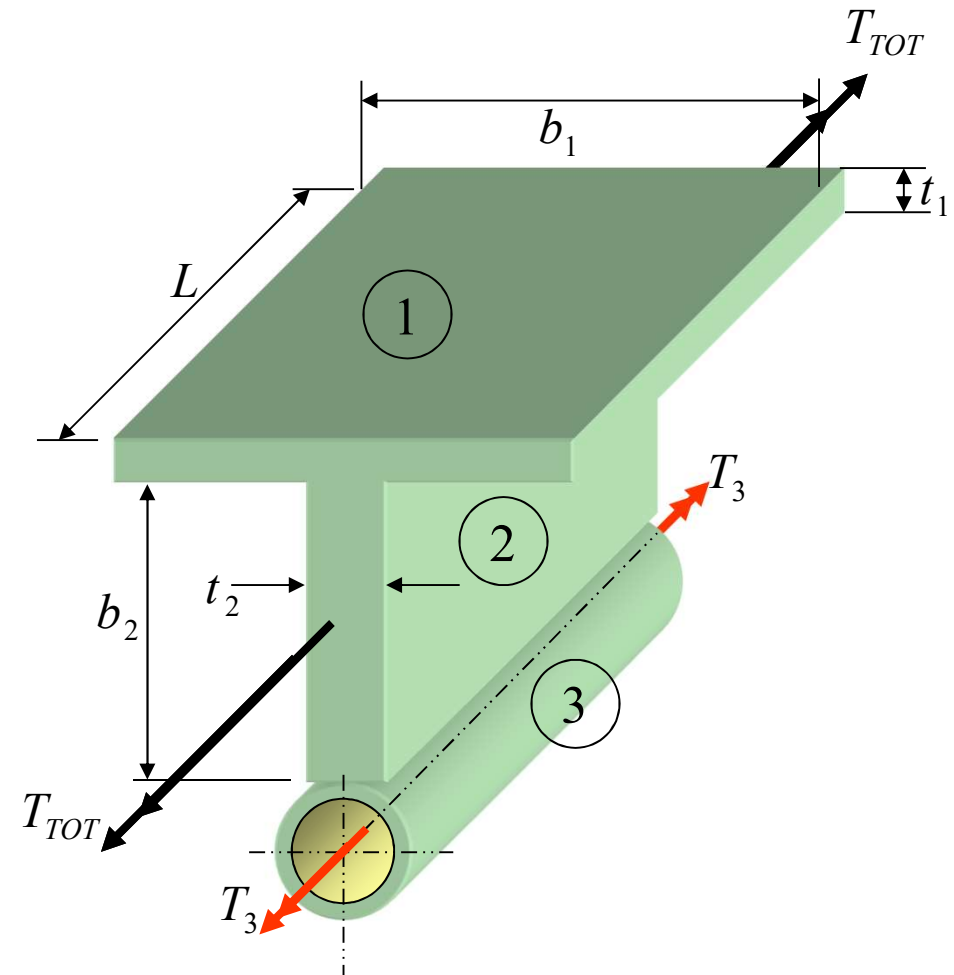
b) section fermée (3)

$$(\tau_{xs})_3 = \frac{T}{2At} = \frac{T_3}{2At_3}$$

$$\frac{T_3}{J_3} = \frac{T_{TOT}}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs})_3 = \frac{T_3}{2At_3} = \frac{T_{TOT} J_3}{J_{TOT}} \frac{1}{2At_3}$$

$$(\tau_{xs})_3 = \frac{T_{TOT} J_3}{J_{TOT}} \frac{1}{2At_3}$$



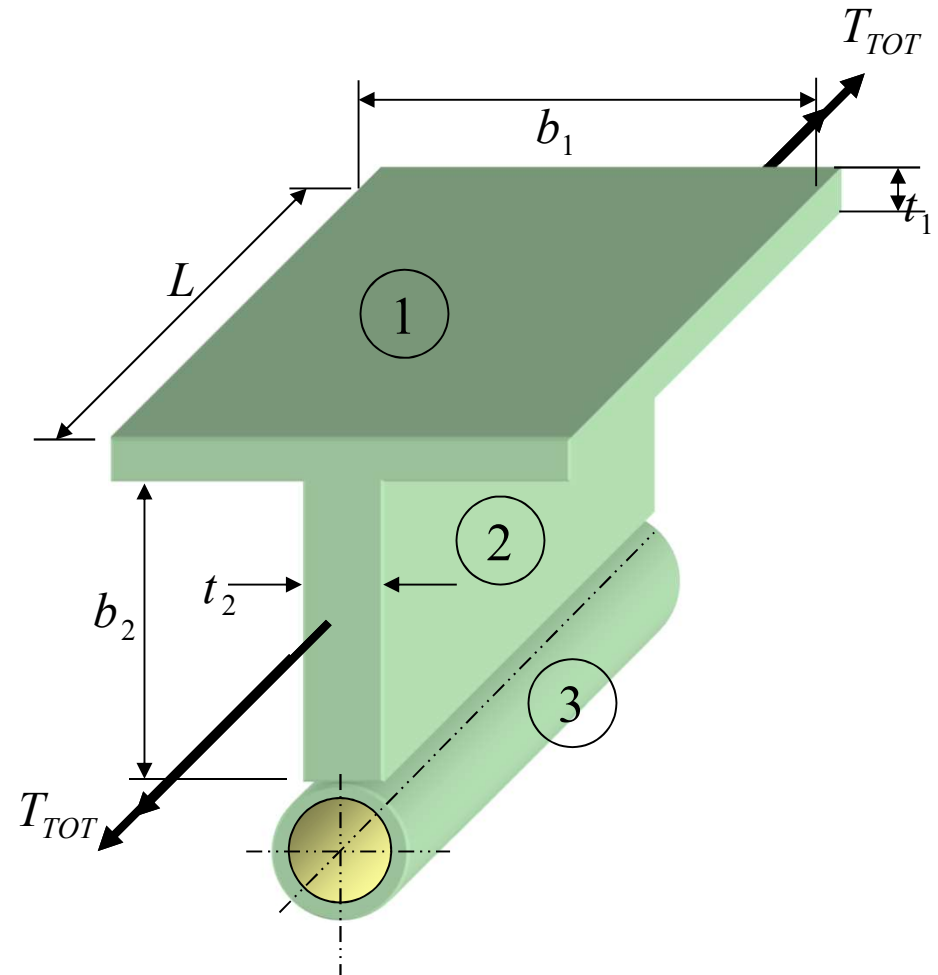
Notions avancées en torsion : Section composée

5- Calcul de T_{TOT} permis :

T_{TOT} permis est le plus petit des deux valeurs calculées .

$$(T_{TOT})_{ouvert} = \frac{S_Y}{2FS} \frac{J_{TOT}}{t_{\max de 1 et 2}}$$

$$(T_{TOT})_{fermé} = \frac{S_Y}{2FS} \frac{J_{TOT}}{J_3} 2 \overline{A} t_3$$



Notions avancées en torsion : Section composée

Calcul de FS lorsque la valeur de T est connue:

a) sections ouvertes (1 et 2)

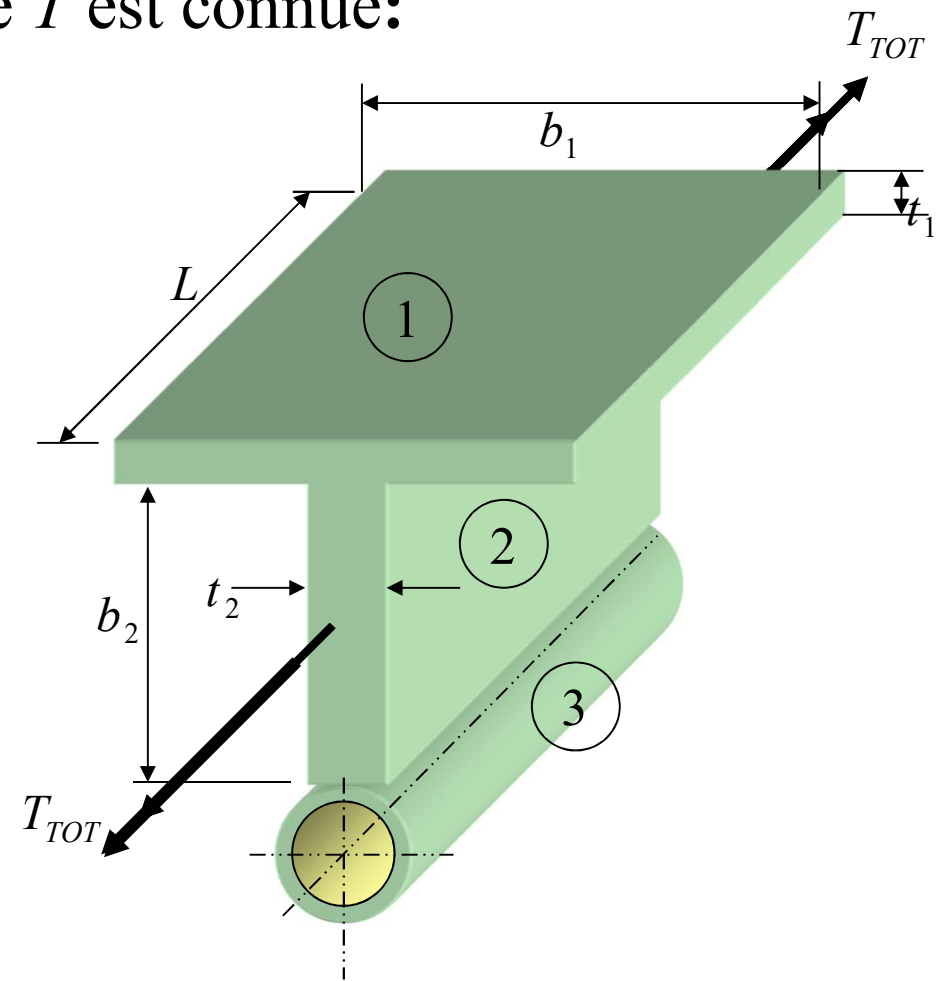
$$FS = \frac{S_Y}{2(\tau_{xs \max})_{ouvert}}$$

$$FS = \frac{S_Y J_{TOT}}{2 T_{TOT} t_{\max \text{ de 1 et 2}}}$$

b) Section fermée (3)

$$FS = \frac{S_Y}{2(\tau_{xs})_3}$$

$$FS = \frac{S_Y J_{TOT} 2 \bar{A} t_3}{2 T_{TOT} J_3}$$



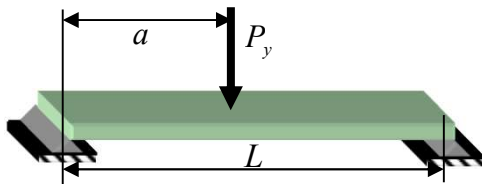
Notions de contrainte : Résumé



$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

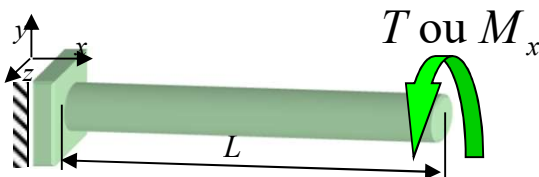
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$



$$\sigma_x = \frac{M_z}{S_z}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

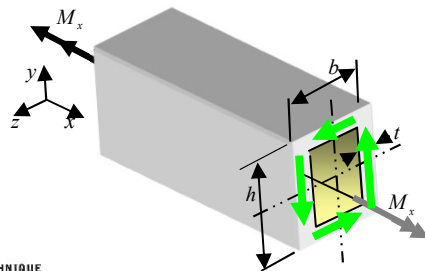
$$\tau_{xy} \text{ (ou } \tau_{xz}) = \frac{VQ}{I_z b}$$



$$|\tau_{x\theta}| = \left| \frac{T r}{J} \right|$$

$$\sigma_x = \sigma_r = \sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{xr} = \tau_{r\theta} = 0$$



$$\tau_{xs} = \frac{M_x}{2 \times A \times t}$$

$$\sigma_x = \sigma_n = \sigma_s = 0$$

$$\tau_{xn} = \tau_{ns} = 0$$

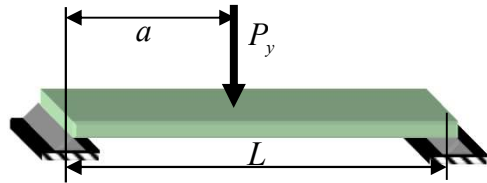
Notions de contrainte : Résumé

Exemples de section

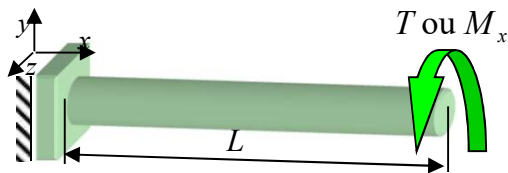


Axial → Toutes les sections constantes selon l'axe x

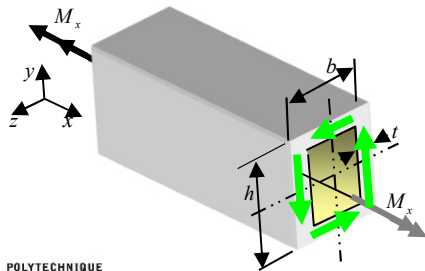
Pression → cyl. à paroi mince ○



Flexion → section simple



Torsion → section circulaire (x, r, θ)



Torsion → section fermée mince (x, s, n)



Nouveaux en RDM II

Changements de section
→ Concentration de contrainte

Section sans plan de symétrie
→ flexion gauche



Révision partie 4

Torsion → section ouverte mince



Torsion → section combinée

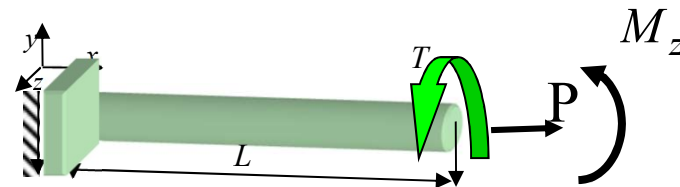




Notions de contrainte : Chargement combiné

Dans la grande majorité des cas, les équations que l'ingénieur utilise pour calculer la sollicitation se résument à :

- Chargement uni-axial
- Chargement de flexion
- Chargement de torsion
- Chargement combiné:
 - axial-flexion
 - axial-torsion
 - flexion-torsion
 - flexion-axial-torsion



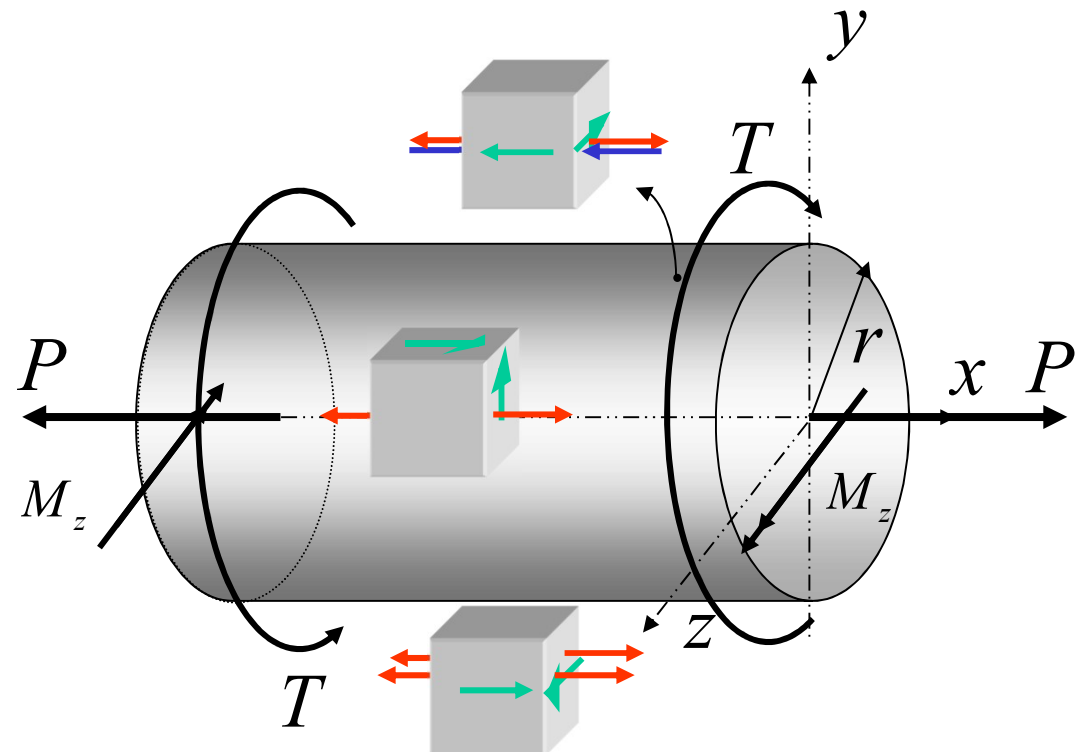
Notions de contrainte : Chargement combiné

Flexion-axial-torsion

$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$A = \pi r^2$$



Contraintes aux fibres
externes (r : rayon externe)

$$|\tau_{x\theta}| = \frac{T r}{J}$$

$$\sigma = \pm \frac{M_z c}{I} + \frac{P}{A}$$

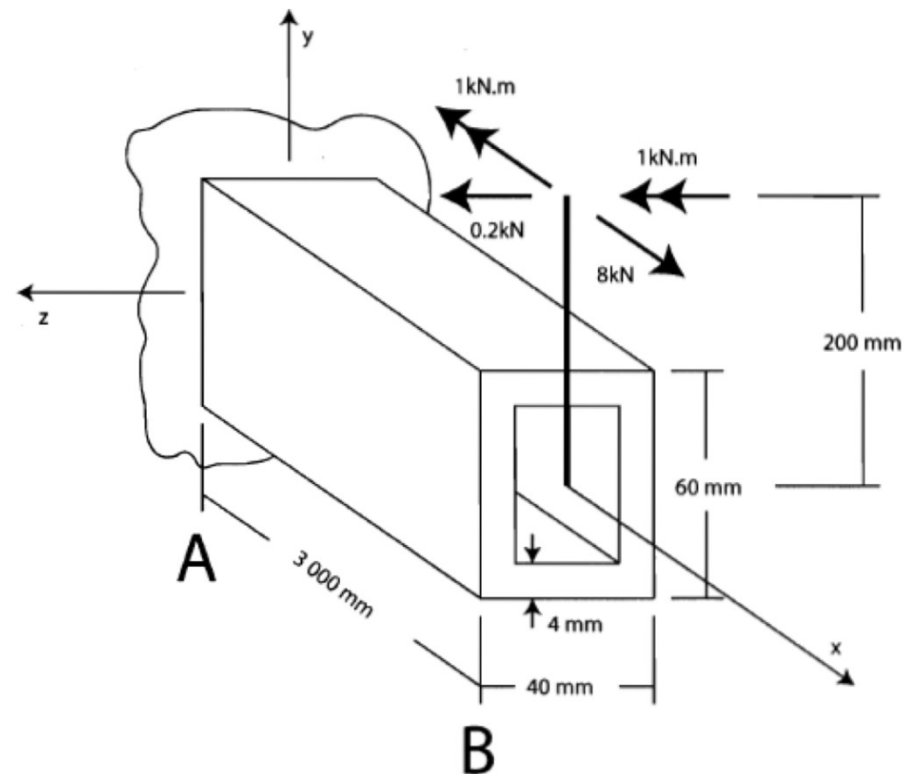
Exercice 4 (problème de synthèse)

Une poutre en acier est encadrée à son extrémité A et munie à son extrémité, d'un bras de levier rigide, tel que montrée à la figure 1. Elle est soumise au chargement qui est indiqué sur la figure.

Les propriétés mécaniques de la poutre sont les suivantes :

$$S_y = 300 \text{ MPa} ; E = 200 \text{ GPa} ; \nu = 0,3$$

- 1) Déterminez les efforts internes sur la section de la poutre qui sera la plus sollicitée.
- 2) Calculez les contraintes associées à chaque type d'efforts internes.
- 3) Appliquez le principe de superposition et identifiez le point le plus sollicité (plus critique).
- 4) Représentez au point le plus sollicité de la section, l'état de contrainte à l'aide d'un cube élémentaire infinitésimal.
- 5) Déterminez les contraintes principales et calculez le facteur de sécurité par le critère Tresca et Von Mises. Lequel est le plus conservateur ?





État de contrainte

- **Objectifs**

- Comprendre la définition d'un état plan de contrainte
- Calculer les contraintes selon une orientation arbitraire
- Calculer les contraintes principales et leur orientation
- Calculer la valeur du cisaillement maximal
- Évaluer la résistance d'un matériau ductile avec les critères d'écoulement (Tresca et von Mises)



Formulaire type à l'examen

Chapitre 7 Superpositions de contraintes (état plan de contrainte sur la surface z)

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan(2\theta_1) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$

Chapitre 10 Critères de défaillance

Tresca $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{S_Y}{2}$

$$FS = \frac{S_Y}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} = \frac{S_Y}{2\tau_{\max}}$$

$$S_{S_Y} = \frac{S_Y}{2}$$

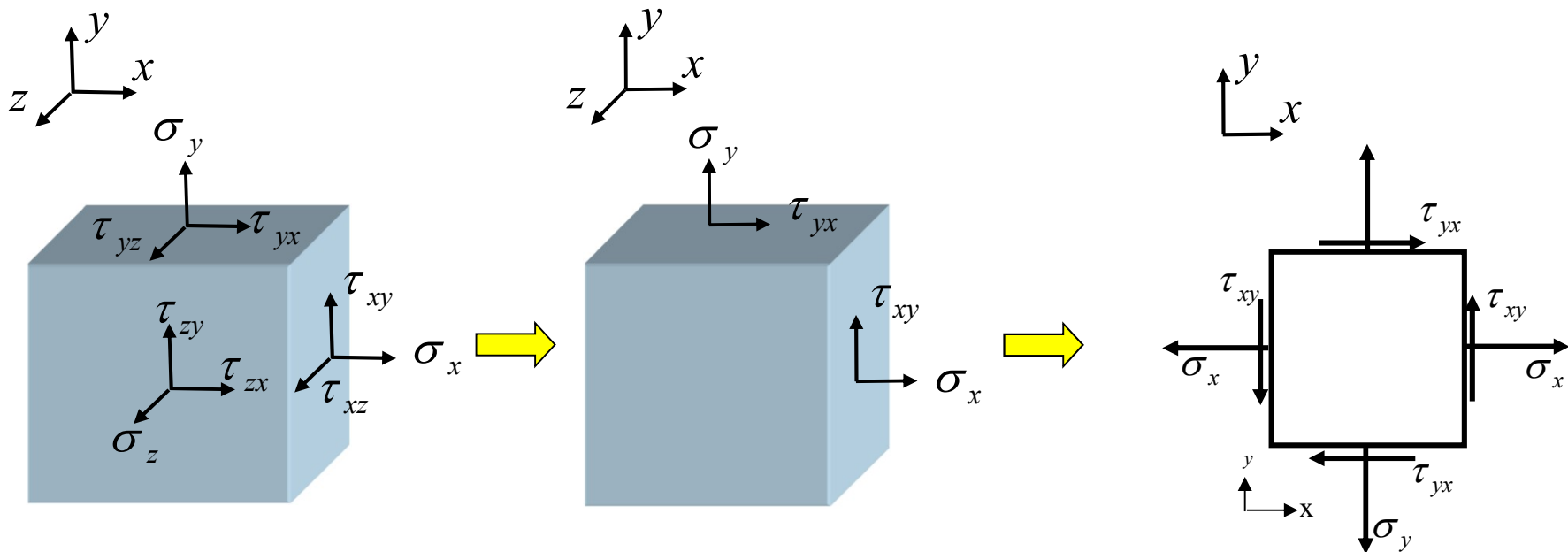
Von Mises $\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = S_Y$

$$S_{S_Y} = 0,577S_Y$$

État plan de contrainte

Toutes les contraintes agissant sur une des faces du cube unitaire sont **nulles** (ici, la face z) ainsi que toutes les contraintes agissant sur les autres faces, dans la direction z . ($\sigma_z = 0$ et $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$)

Très fréquent en ingénierie

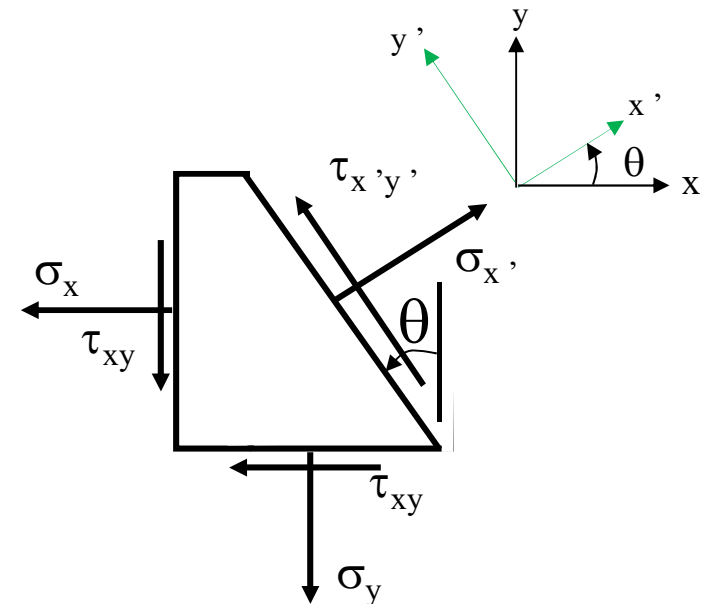



Simplification à un élément 2D

État plan de contrainte

Contraintes en un point selon une orientation arbitraire ($x'-y'$)

- On calcule les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} suivant les directions x et y choisies
- On définit un nouveau système d'axes x' et y' qui fait un angle θ avec le système x, y ; l'axe x positif est l'axe de référence
- En utilisant les équations d'équilibre dans le système $x'-y'$ ($\Sigma F_{x'} = 0; \Sigma F_{y'} = 0; \Sigma M_z = 0$), on établit les expressions pour le calcul des contraintes $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}$ et $\tau_{x',y'}$ dans le nouveau système



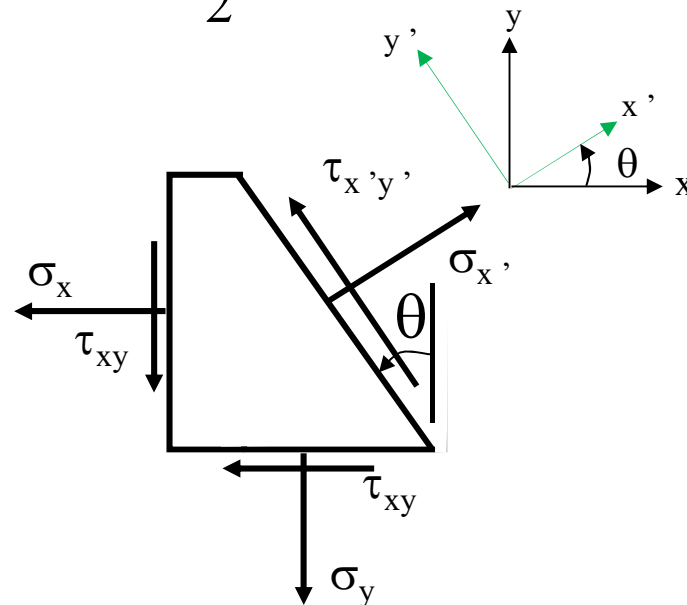
 Attention à la convention de signe de θ

État plan de contrainte

Pour transformer σ_x, σ_y et τ_{xy} en $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}$, et $\tau_{x'y'}$,

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \sin(2 \cdot \theta) \quad (7.14)$$

$$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cos(2 \cdot \theta) \quad (7.15)$$





État plan de contrainte

Contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 en un point

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (7.14)$$

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 = 2\tau_{x'y'} \quad (7.18) \text{ et } (7.19)$$

Contraintes
principales en
un point

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7.24)$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = 0 \text{ ou valeur connue}$$

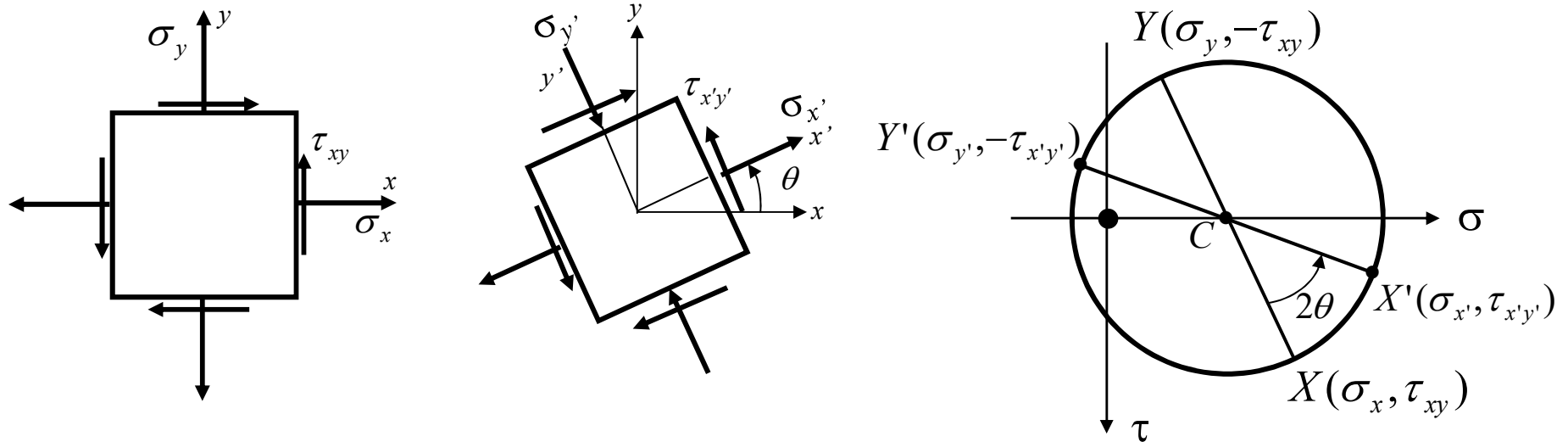
Sur les plans où se trouvent les contraintes principales,
les contraintes de cisaillement sont nulles.

État plan de contrainte

Cercle de Mohr

Pour tracer le cercle de *Mohr* d'un état plan de contrainte dans le plan x - y , on procède de la façon suivante :

- Placer les points $X (\sigma_x, \tau_{xy})$ et $Y (\sigma_y, -\tau_{xy})$ dans un système d'axes $\sigma - \tau$
- Joindre les deux points par une droite et déterminer le point d'intersection C avec l'axe σ ($\sigma_c = (\sigma_x + \sigma_y)/2$)



- Le cercle de *Mohr* est le cercle dont le centre est C et qui passe par les points X et Y .
- L'état de contrainte selon le système x' - y' est également représenté par le cercle

État plan de contrainte

Cercle de Mohr - Contraintes principales σ_1 et σ_2

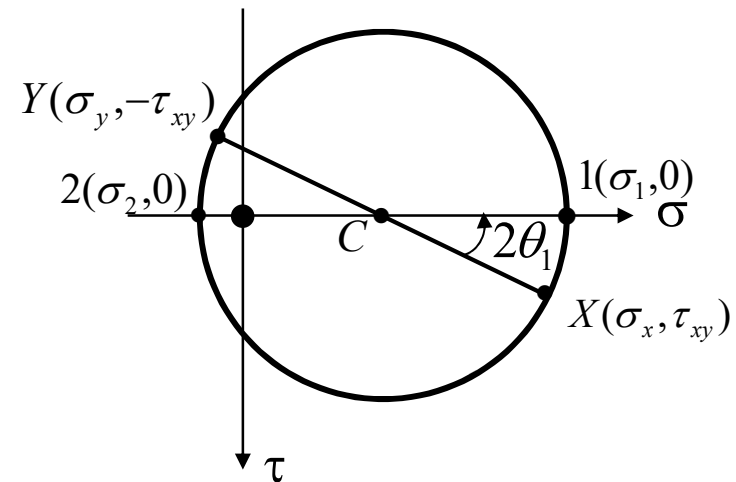
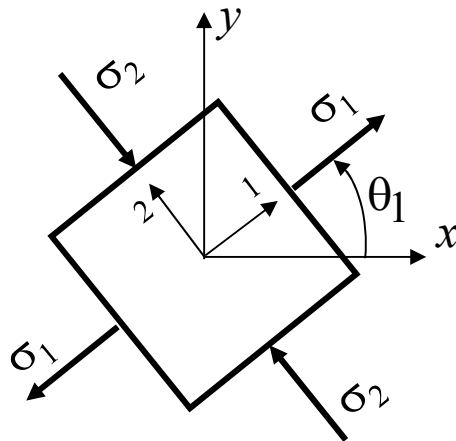
- L'axe 1 de la contrainte principale σ_1 fait un angle θ_1 avec l'axe x

$$\text{tg}(2 \cdot \theta_1) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Attention à la valeur calculée de θ_1

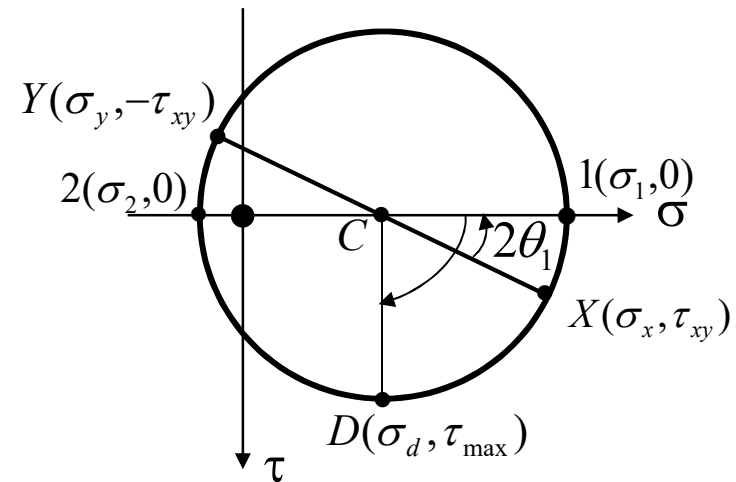
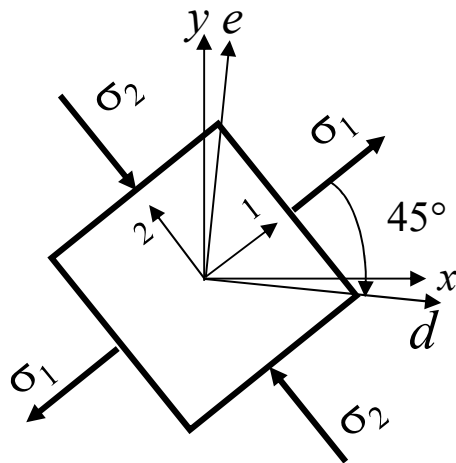
- Sur les plans des contraintes principales, les contraintes de cisaillement sont nulles.



État plan de contrainte

Cercle de Mohr - Cisaillement maximal τ_{max}

- En état plan de contrainte, la contrainte de cisaillement maximal se situe sur un plan dont la normale d est à 45° par rapport à l'axe 1 (sens trigonométrique négatif à partir de l'axe 1).

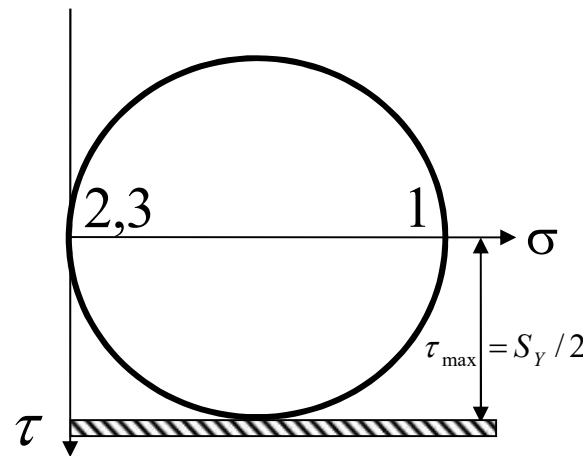
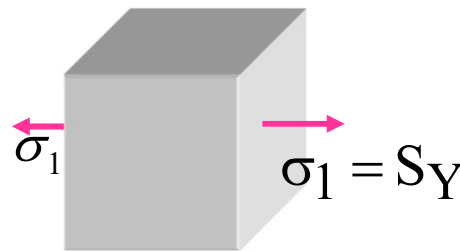


Critères d'écoulement : Tresca

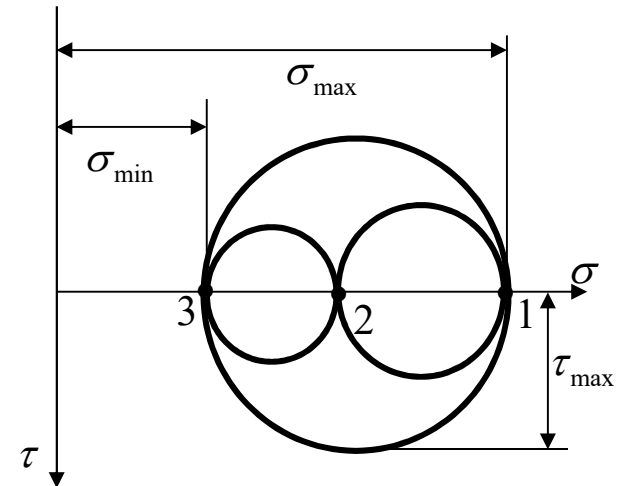
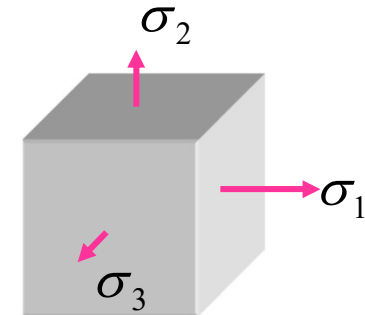
L'écoulement d'un matériau ductile se produit lorsque τ_{\max} atteint une valeur critique.

$$FS = \frac{S_Y}{2 \tau_{\max}} \cdot 1$$

Essai de traction



Pièce réelle



Cisaillement maximal $\tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2}$

Cas général 3D



Critères d'écoulement : Von Mises

L'écoulement d'un matériau ductile se produit lorsque **l'énergie de distorsion** atteint une valeur critique.

$$FS = \frac{S_Y}{\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}}$$

*Contrainte équivalente de von Mises
dans le système d'axes 1-2-3*



Déformations et contraintes

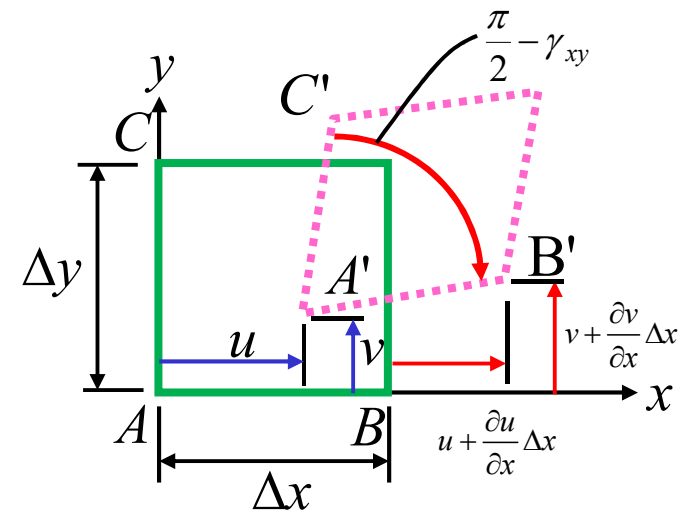
- **Objectifs :**
 - Connaître la définition d'un état plan de déformation
 - Savoir définir les déformations à partir des déplacements
 - Savoir calculer les déformations normales et de cisaillement selon une orientation quelconque; application des lectures de jauges
 - Appliquer les relations contraintes-déformations (Loi de Hooke)
 - Solutionner le cas particulier de la séance de laboratoire no. 2
 - Étude des déformations dans un panneau de cisaillement

Déformation

Les forces extérieures sur un solide causent :

- un déplacement de l'ensemble des points constituant le solide
- un mouvement **relatif** entre les points du solide → **déformation** du solide
- Comme pour le cas des contraintes, l'étude des déformations dans un solide est réalisée pour un état plan. Ici, c'est **l'état plan de déformation**, qui est différent de l'état plan de contraintes.

- Les côtés CAB d'un élément unitaire de longueurs Δx et Δy avant l'application d'une force extérieure se retrouvent en C'A'B' après chargement.
- Ce faisant, le point A s'est déplacé de la distance u selon l'axe x et de v selon l'axe y .



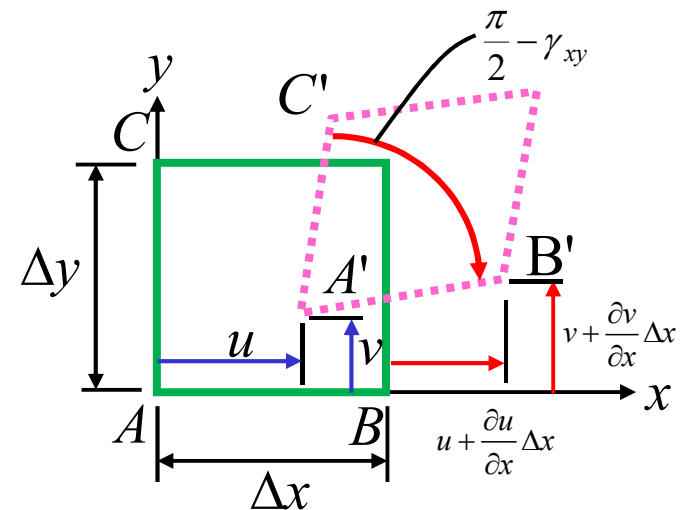
Déformation

Les déformations normales ε_x et ε_y et de cisaillement γ_{xy} sont définies de la façon suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \angle BAC - \angle B'A'C' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$



- **Déformations** : c'est ce qui existe physiquement.
- **Contraintes** : c'est un concept commode pour faire des calculs



Déformation

- La méthode expérimentale la plus répandue et la plus utile en ingénierie pour l'analyse des contraintes est basée sur la mesure des déformations à l'aide des **jauges de déformation**
- Connaissant les **déformations**, les **contraintes** peuvent être calculées à l'aide de la loi de Hooke
- Ce sont les **contraintes** qui permettent d'évaluer **le facteur de sécurité** (FS) d'une pièce soumise à des forces extérieures connues

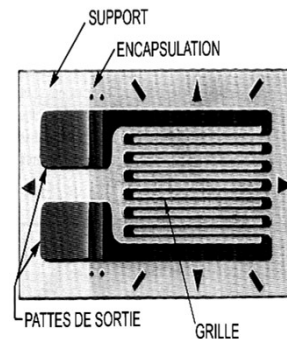
Une jauge mesure une déformation normale et elle est toujours dans un état *plan de contrainte* parce qu'elle est collée sur une surface libre. Donc, $\sigma_3 = 0$.

Jauges de déformation

Fil dont la résistance électrique R varie avec son allongement. Elle mesure une déformation exclusivement dans l'axe de son fil.

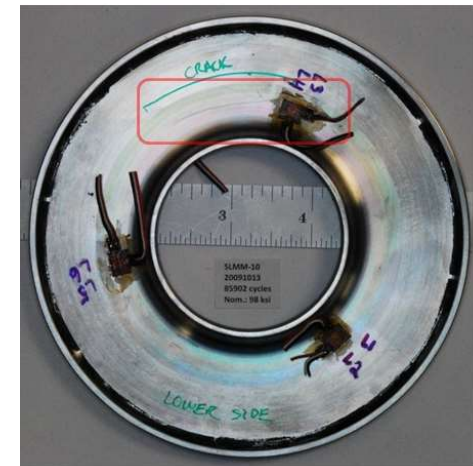
- On colle solidement la jauge sur la surface de la pièce. Lorsqu'une force agit sur la pièce, celle-ci se déforme.
- La jauge subit alors la même déformation et sa résistance électrique varie en conséquence:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \varepsilon$$



- On enregistre le changement de résistance.
- Après une calibration adéquate, on déduit la déformation.

- Il n'existe aucune méthode simple qui permette de mesurer une déformation de cisaillement γ .



*Échantillon « disque »
instrumentée de 3 rosettes*



Jauges de déformation

On sait que :

$$FS \propto \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad \text{où } \sigma_3 \text{ en général est connue}$$

On sait aussi que :

$$\sigma_1, \sigma_2 \propto \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \quad (\text{pour état plan de contrainte en } z)$$

et que :

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \propto \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \quad (\text{loi de Hooke})$$

- Une jauge ne mesure qu'une déformation normale(ε)
- Elle ne peut pas mesurer une déformation de **cisaillement** (γ)

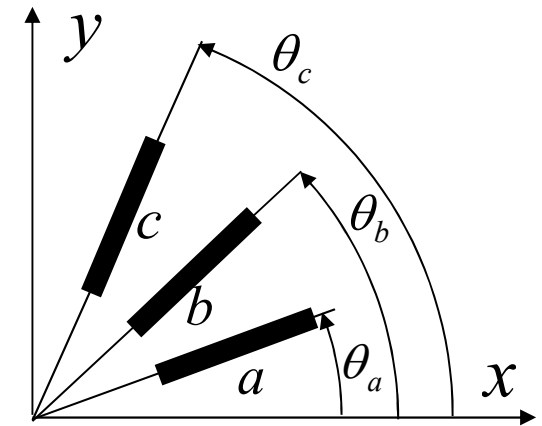
Jauges de déformation

À partir de **trois** valeurs de déformation **normale** ($\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$) mesurées suivant des orientations quelconques mais **connues**, ($\theta_a, \theta_b, \theta_c$) on peut déterminer $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et γ_{xy} de la façon suivante :

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \cdot \theta_a) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \cdot \theta_a)$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \cdot \theta_b) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \cdot \theta_b)$$


$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \cdot \theta_c) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \cdot \theta_c)$$



Ceci constitue un système de trois équations à trois inconnues $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

Dans ce système, l'axe x est l'axe de **référence**. Les angles θ_i sont mesurés à partir de cet axe ; ils sont positifs dans le sens anti-horaire.

Ensemble de jauges : une **rosette**

 Attention à la convention de signe de θ

Relations contraintes-déformations (Loi de Hooke)

Axes x, y et z

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Axes $1, 2$ et 3

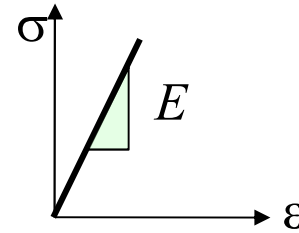
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

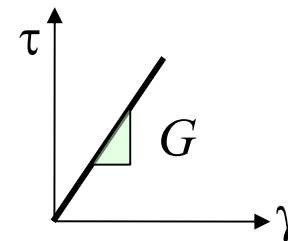
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Rappel : Propriétés mécaniques

- Module d'Young (E)

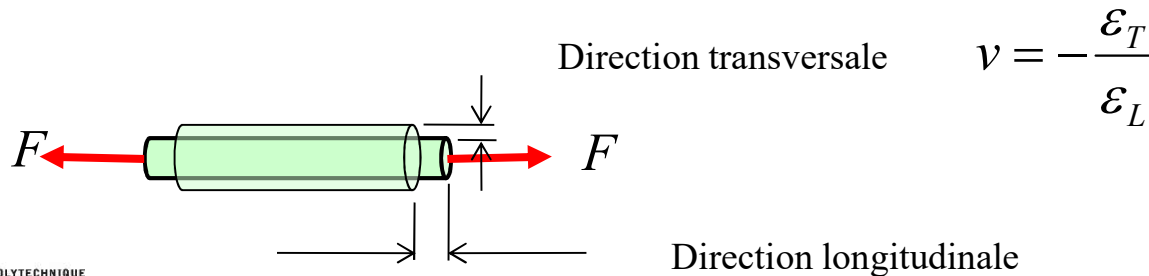


- Module de cisaillement (G)



$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Coefficient de Poisson (ν)





Exercice 5 (problème de synthèse)

La figure a) illustre en isométrie une structure ABCD composée d'un profilé en U (30 mm × 20 mm × 30 mm; épaisseur = 2 mm) soudé sur toute la longueur ABC à une plaque de 120 mm × 5 mm. La connexion en C et la membrure CD sont rigides. Le centroïde de la section (Fig. b) est situé à 28,4 mm de la base de la section et les propriétés de la section sont les suivantes:

$$A = 752 \text{ mm}^2 \quad ; \quad I_z = 65,92 \times 10^3 \text{ mm}^4 \quad ; \quad I_y = 730,4 \times 10^3 \text{ mm}^4.$$

Le chargement externe est le suivant :

- Au point D, une force horizontale $F_{Dx} = 3\,760 \text{ N}$
- Au point C, un moment T_{Cx} autour de l'axe x (**valeur et sens inconnus**)
- Au point C, une force verticale $F_{Cy} = 375 \text{ N}$ (sens montré).

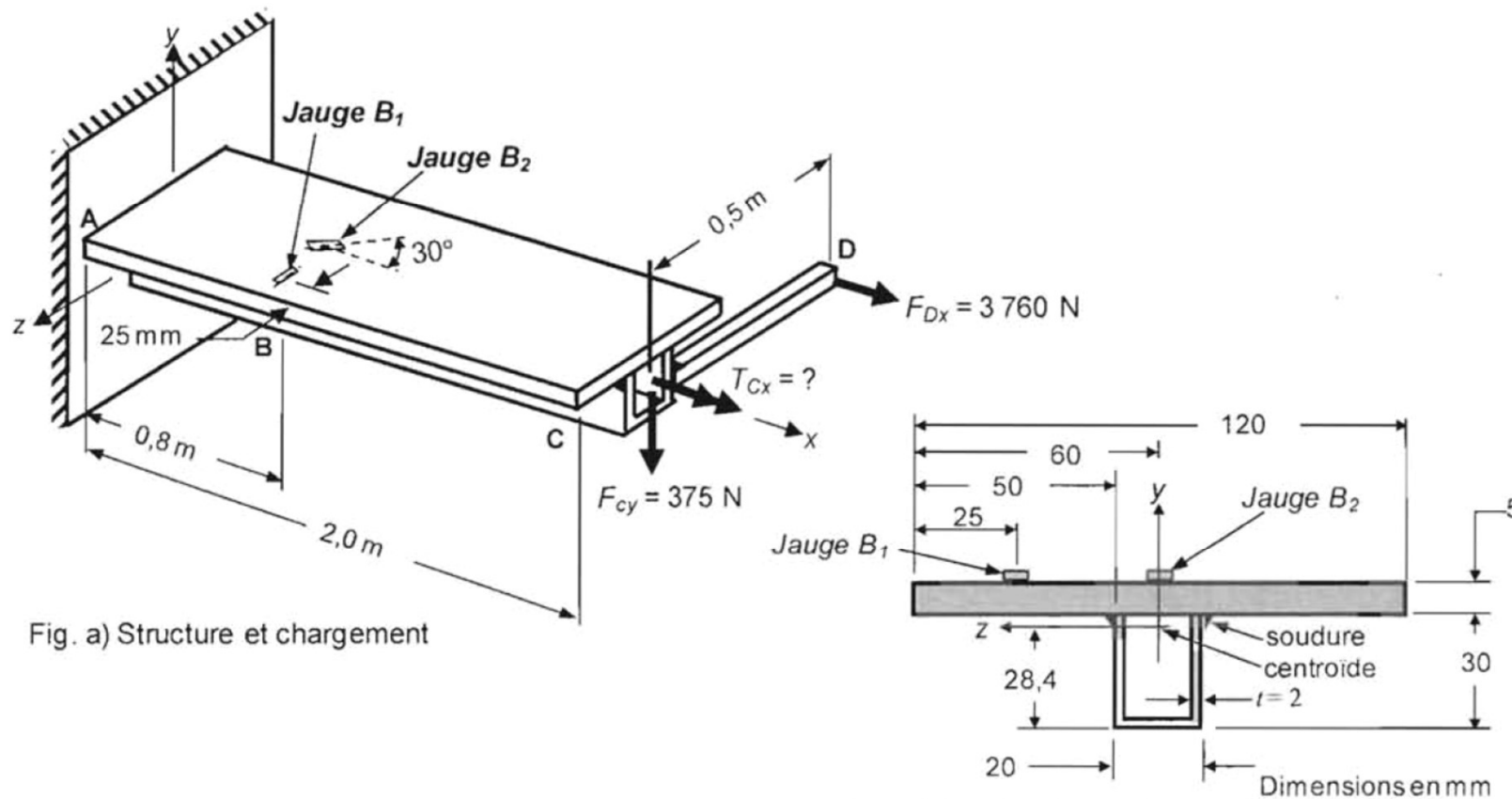
Deux jauges sont collées sur la plaque à une distance de 0,8 m du point A. La jauge B_1 est située à une distance de 25 mm de l'extrémité de la plaque et est orientée selon l'axe z . La jauge B_2 est située au plan de symétrie et est orientée à un angle de 30° par rapport à l'axe x . Lorsque la poutre est chargée, les lectures des jauges sont :

$$\varepsilon_{B1} = \text{inconnue} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{B2} = -394,2 \text{ } \mu\text{m/m}.$$

Les propriétés du matériau (acier) sont : $E = 200\,000 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$; $G = 76\,923 \text{ MPa}$.

Exercice 5_suite (problème de synthèse)

- Calculez le moment inconnu T_{Cx} et indiquez son sens (9 points).
- Déterminez la valeur de la lecture de la jauge B_1 sous l'effet de ce chargement en considérant que la membrure demeure dans le domaine élastique (3 points).





Formulaire type à l'examen

Déformations

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\theta)$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\theta)$$

$$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Relations contraintes / déformations / température

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha\Delta T$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] + \alpha\Delta T$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$