

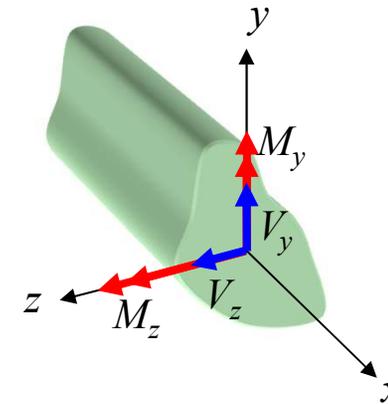
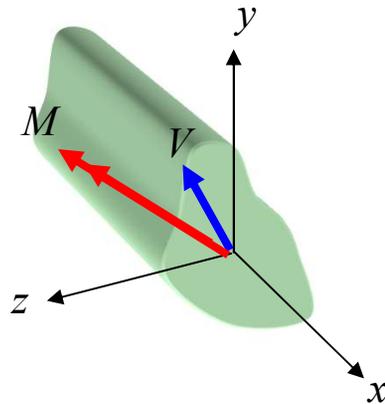


Section 2 : Flexion gauche

Contenu :

- Comprendre le développement mathématique pour le calcul de la contrainte uniaxiale en flexion gauche
- Calculer le premier moment d'inertie (I_{yz}) de poutre à section simple
- Déterminer l'orientation du plan neutre lors de flexion gauche
- Déterminer le point le plus critique sur la section de poutre (où σ_x est maximum)

Efforts internes associés à la flexion gauche

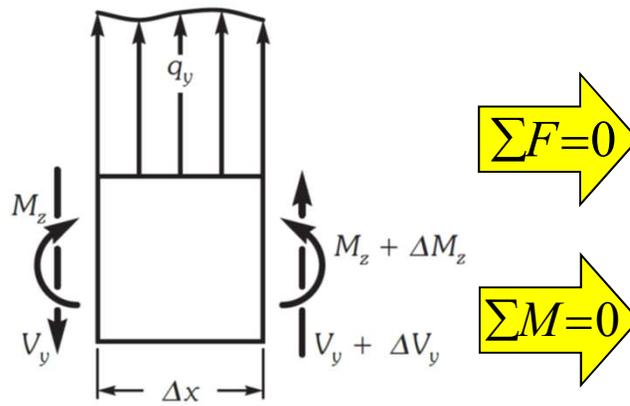
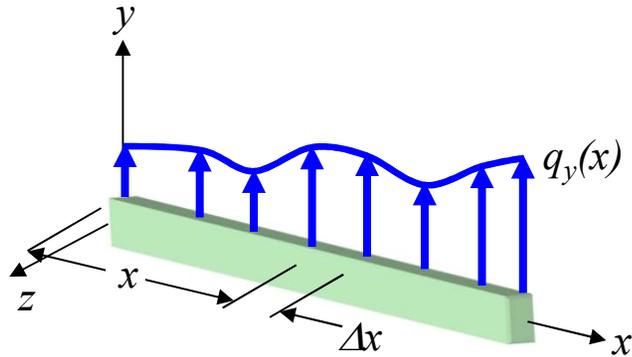


Poutre de section quelconque soumise à un effort tranchant (V) et à un moment fléchissant (M)

Décomposition de V et M selon les directions y et z

Note: - l'axe x est dans la direction longitudinale de la poutre
 - l'origine du système d'axe $(0,0,0)$ est au centroïde de la section

Équations différentielles d'équilibre



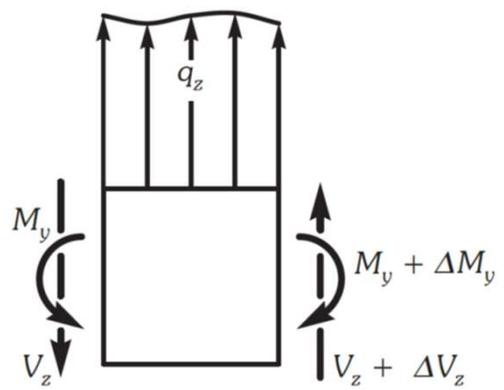
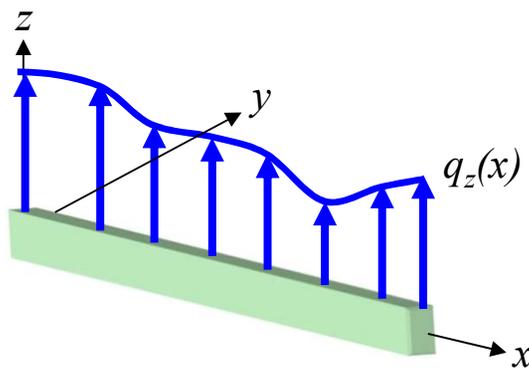
$\Sigma F = 0$

$\Sigma M = 0$

Flexion autour de z

$$\frac{dV_y}{dx} = -q_y$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -V_y$$



Flexion autour de y

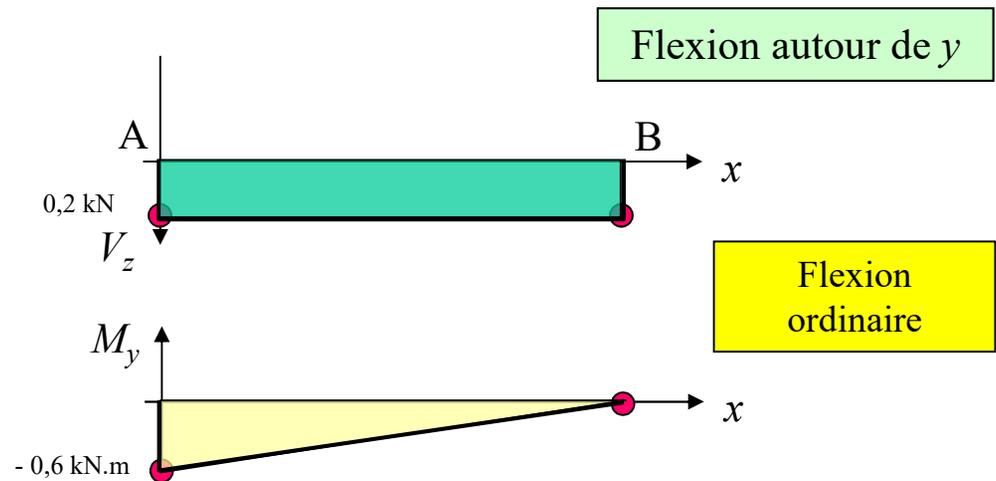
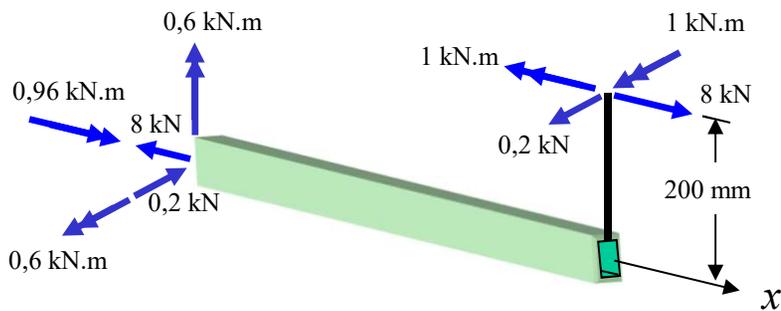
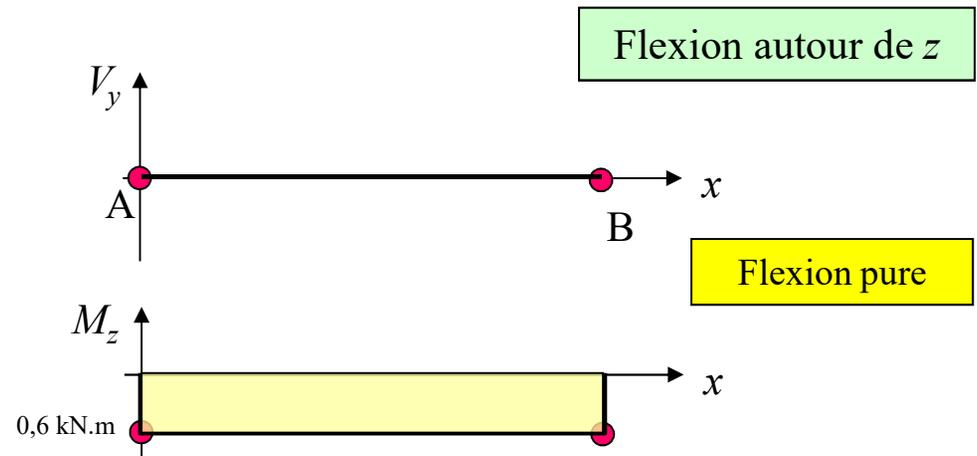
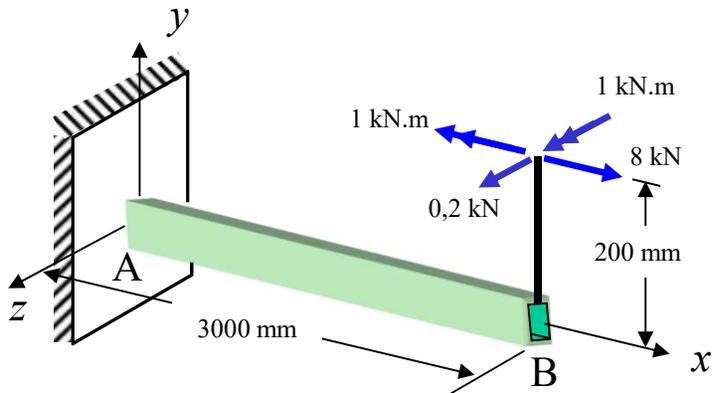
$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z$$

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z$$



Note : moment change de sens

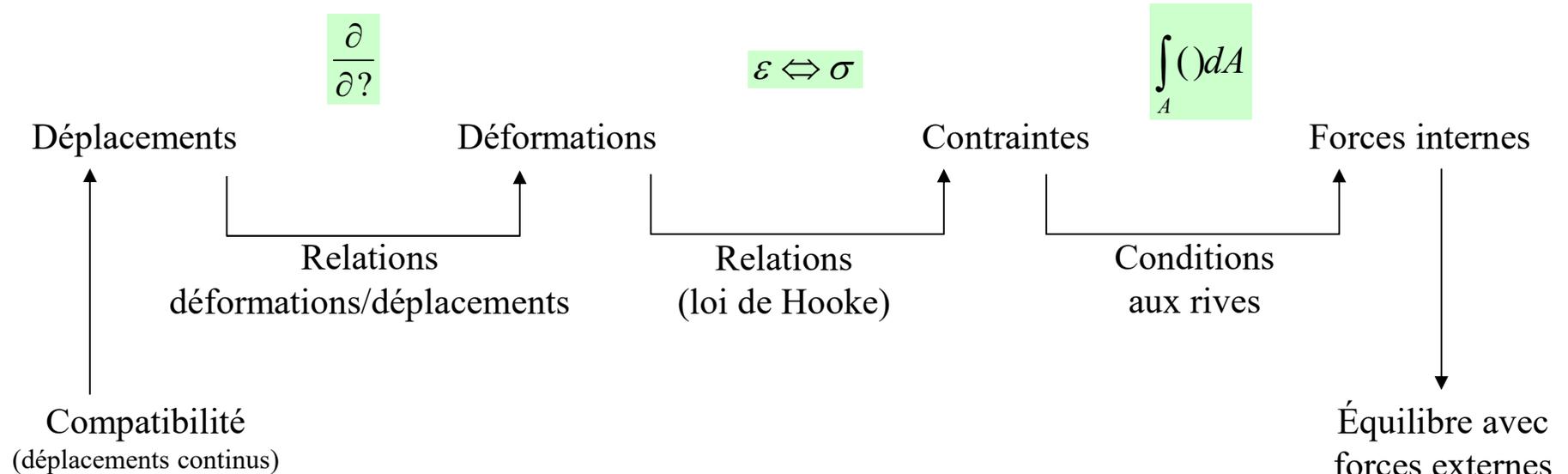
Exemple : Voir problème synthèse



Analyse des contraintes associées à la flexion gauche

- **Approche**

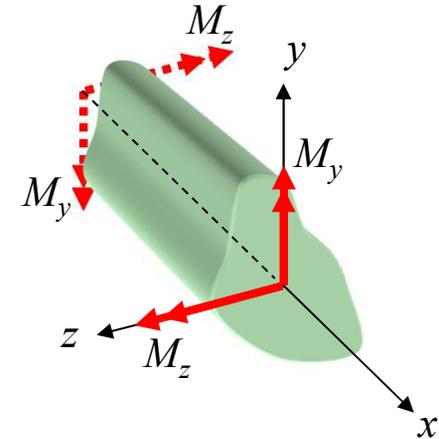
- Étude des déplacements et de la compatibilité géométrique
- Application des relations contraintes-déformations (loi de Hooke)
- Étude des conditions d'équilibre



Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

- **Conditions initiales**

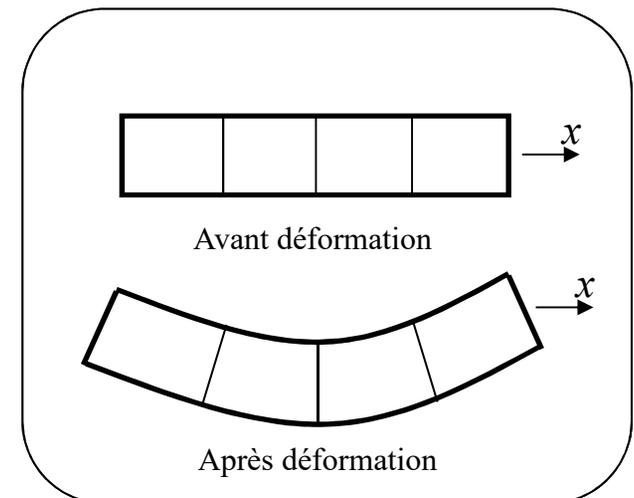
- Avant chargement, la poutre est droite
- Le matériau est homogène, isotrope, comportement élastique
- La section, quoique quelconque, est uniforme sur toute la longueur de la poutre



- **Hypothèses**

- Sections planes avant déformation demeurent planes et normales à l'axe longitudinal de la poutre après déformation

$$\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0$$



Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

• Hypothèses

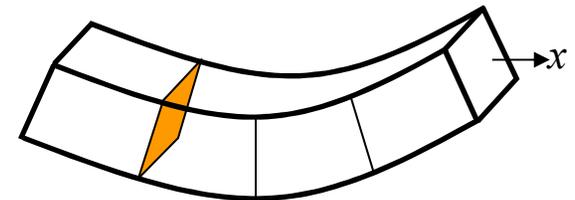
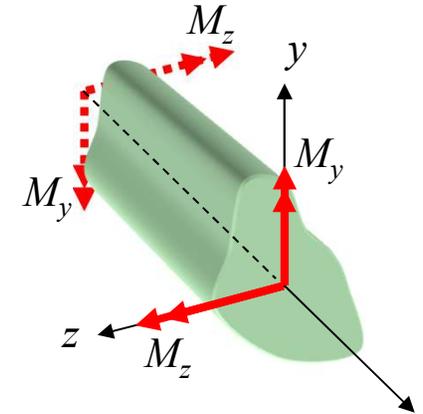
- La poutre étant mince, les composantes de contraintes qui sont nulles aux parois latérales sont également nulles en tout point

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

- Les sections planes (plan y - z) demeurent planes

$$u = a_0 + b_0 y + c_0 z$$

où a_0 , b_0 et c_0 sont dépendants de x



Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

Relations
déformations/déplacements

$$\gamma_{xy} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = b_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow b_0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

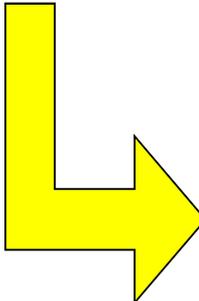
$$\gamma_{zx} = 0 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = c_0 + \frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow c_0 = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

Équation du plan

$$u = a_0 - \frac{\partial v}{\partial x} y - \frac{\partial w}{\partial x} z$$

Calculs de la déformation

ϵ_x



$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z$$

Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

Relations
contraintes/déformations

On sait que: $\sigma_y = \sigma_z = 0$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left[\frac{\partial a_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right]$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{zy}}{G} = 0; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0$$

Rappel:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

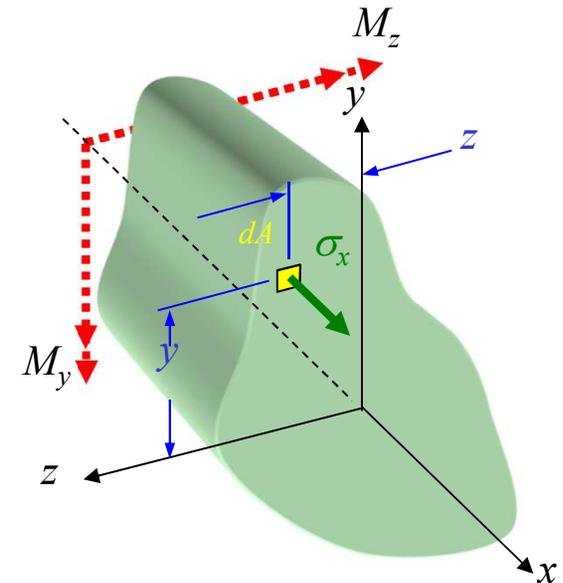
Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

Conditions d'équilibre aux rives

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0$$

$$\left(\sum M\right)_y = 0 \Rightarrow M_y = \int_A \sigma_x z dA$$

$$\left(\sum M\right)_z = 0 \Rightarrow M_z = - \int_A \sigma_x y dA$$



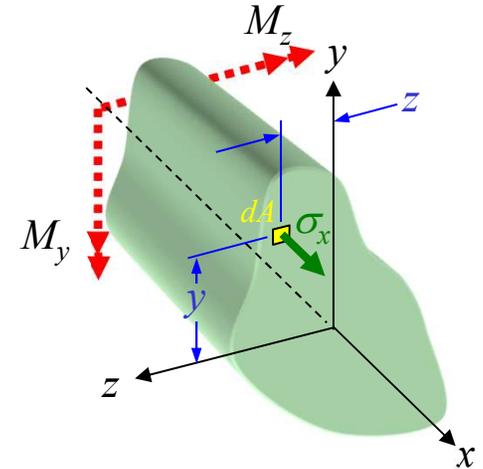
où $\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left[\frac{\partial a_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right]$

Notes: - L'axe x coïncide avec le centroïde
 - Le centroïde est défini par

$$\int_A y dA = \int_A z dA = 0$$

Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

- Solution et vérification
 - Tous les calculs sont effectués par rapport au centroïde



Par définition:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

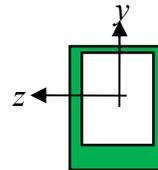
Seconds moments de la section

Moment produit de la section

Rappel : moment produit de la section

- Formule générale $I_{yz} = \int_A yz \, dA$

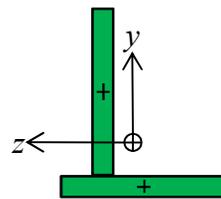
– $I_{yz} = 0$ si l'axe y **ou** z coïncide avec un plan de symétrie de la section



- Position du centroïde $\bar{y}_i = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$ $\bar{z}_i = \frac{\sum \bar{z}_i A_i}{\sum A_i}$

- Formule de translation

$$I_{yz} = \sum \left(I_{y_i z_i} + \bar{y}_i \bar{z}_i A \right)$$



Similaire au théorème des axes parallèles

- Formules de rotation

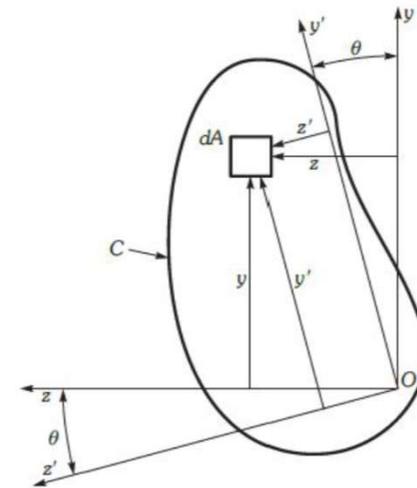


Figure A.4 Réaction du système d'axes. Le système d'axes y' et z' fait avec le système d'axes y et z un angle θ .

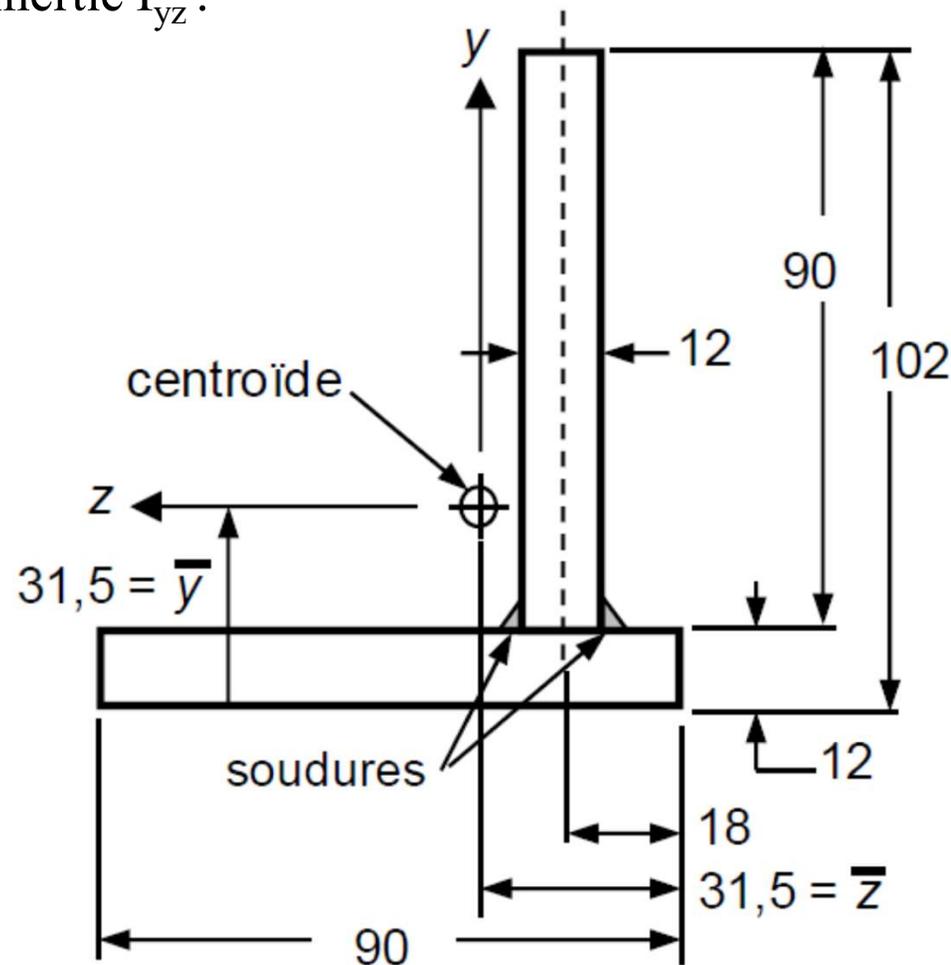
$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta - I_{yz} \sin 2\theta$$

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta + I_{yz} \sin 2\theta$$

! Attention à la convention de signe de θ

Rappel : moment produit de la section (exercice 1)

Pour la section de la poutre représentée sur la figure ci-dessous, déterminez la valeur de moment produit d'inertie I_{yz} .



Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

- Solution et vérification

$$(\sum F)_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 = E \left[\overset{= A}{\frac{\partial a_0}{\partial x} \int_A dA} - \overset{= 0}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_A y dA} - \overset{= 0}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A z dA} \right]$$

$$(\sum M)_y = 0; M_y = \int_A \sigma_x z dA = E \left[\overset{= 0}{\frac{\partial a_0}{\partial x} \int_A z dA} - \overset{= I_{yz}}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_A y z dA} - \overset{= I_y}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A z^2 dA} \right]$$

$$(\sum M)_z = 0; -M_z = \int_A \sigma_x y dA = E \left[\overset{= 0}{\frac{\partial a_0}{\partial x} \int_A y dA} - \overset{= I_z}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_A y^2 dA} - \overset{= I_{yz}}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A y z dA} \right]$$



Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

- Solution et vérification

$$(\sum F)_x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial a_0}{\partial x} A \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial a_0}{\partial x} = 0$$

$$(\sum M)_y = 0 \Rightarrow$$

$$M_y = E \left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} I_{yz} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} I_y \right]$$

$$(\sum M)_z = 0 \Rightarrow$$

$$-M_z = E \left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} I_z - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} I_{yz} \right]$$

Deux équations
Deux inconnues

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Selon le
chargement externe

Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

- Solution et vérification

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} [M_y I_{yz} + M_z I_y] \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{-1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} [M_z I_{yz} + M_y I_z] \end{array} \right.$$

Nous savons que

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left[\frac{\partial a_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right]$$

Donc,

$$\sigma_x = -\frac{1}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} [(M_y I_{yz} + M_z I_y) y - (M_z I_{yz} + M_y I_z) z]$$

Note: y et z sont les coordonnées du point où nous voulons calculer σ_x

Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

- Calcul de la contrainte uniaxiale σ_x

$$\sigma_x = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[(M_y I_{yz} + M_z I_y) y - (M_z I_{yz} + M_y I_z) z \right]$$

$$\sigma_x = -\left[\frac{M_y}{I_{yz}^*} + \frac{M_z}{I_z^*} \right] y + \left[\frac{M_z}{I_{yz}^*} + \frac{M_y}{I_y^*} \right] z$$

$$\text{où } I_y^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_z} \quad ; \quad I_z^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_y} \quad ; \quad I_{yz}^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_{yz}}$$

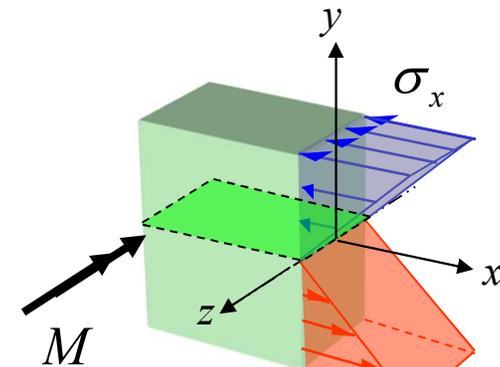
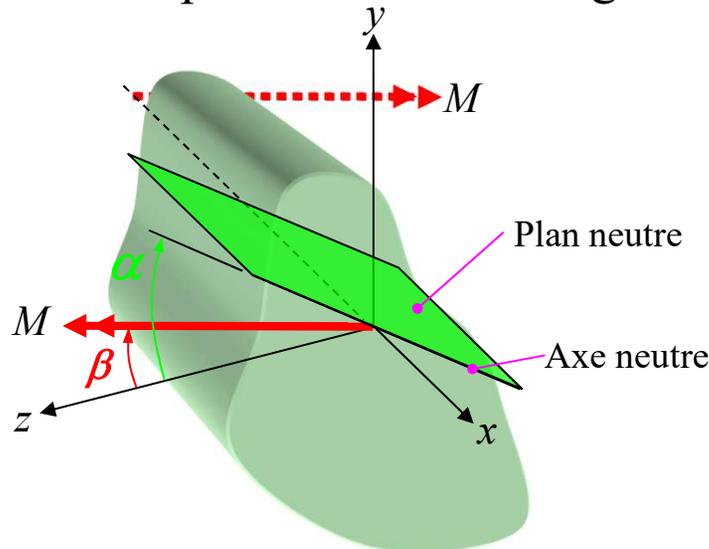
en regroupant les propriétés de section

Note: - y et z sont les coordonnées du point où nous voulons calculer σ_x
 - attention aux signes de y , z , M_y , M_z et I_{yz}

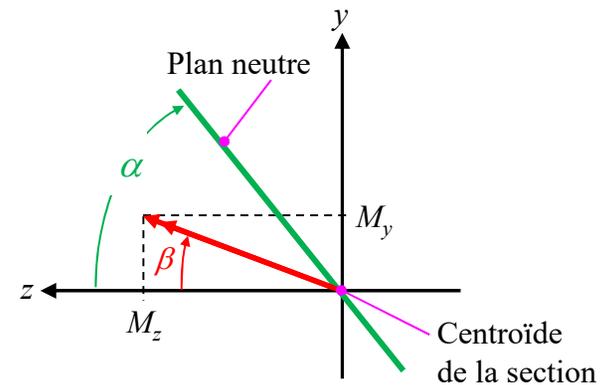
Contraintes dues à la flexion pure ($V = 0$)

Plan neutre ($\sigma_x = 0$)

- **Flexion ordinaire**
 - Normal au plan de chargement
 - Coïncide avec un axe principal
- **Flexion gauche**
 - Rotation du plan neutre d'un angle α



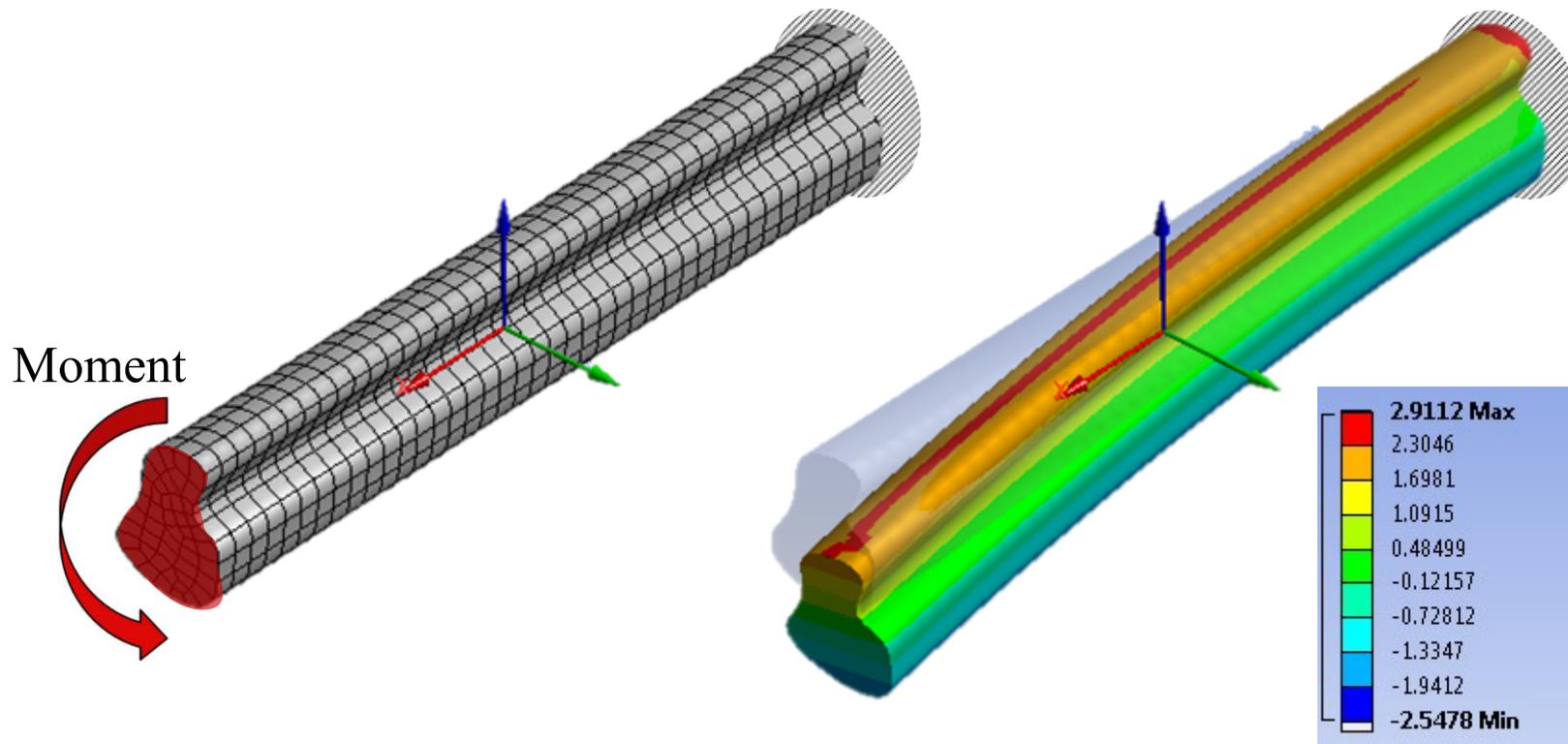
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_y}{M_z}$$



! Attention à la convention de signe de α et β

Section quelconque en flexion

- Contrainte normale σ_x



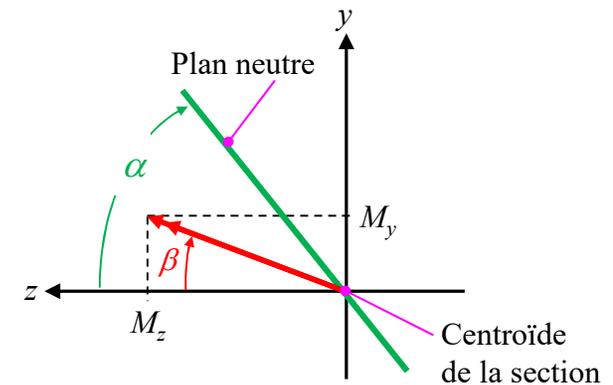
Plan neutre ($\sigma_x = 0$)

- Flexion gauche (continue)

- Orientation du plan neutre

$$tg \alpha = \frac{dy}{dz} = \frac{M_z I_{yz} + M_y I_z}{M_y I_{yz} + M_z I_y} \quad (17.37)$$

$$tg \alpha = \frac{I_{yz} + I_z tg \beta}{I_{yz} tg \beta + I_y} \quad (17.39)$$



En divisant pas M_z au numérateur et au dénominateur et en posant:

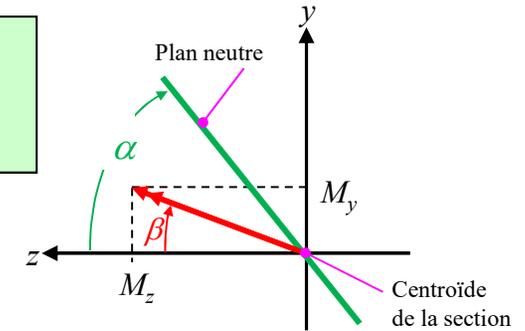
$$tg \beta = \frac{M_y}{M_z}$$

Note: - sens horaire est positif pour α et β
 - attention aux signes de M_y , M_z et I_{yz} dans les calculs

- La contrainte σ_x maximale sera au point de la section le plus éloigné du plan neutre

Plan neutre ($\sigma_x = 0$)

$$tg \alpha = \frac{I_{yz} + I_z tg \beta}{I_{yz} tg \beta + I_y}$$



Notes :

- Si $M_y = 0$
 - Si $I_{yz} = 0$
 - $\beta = 0$ et $tg \alpha = I_{yz} / I_y$
 - $\alpha = 0$ (comme au chapitre 4)

- Une poutre fléchit dans la direction normale au plan neutre

- Lorsque $I_{yz} = 0$

- $$\sigma_x = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[(M_y I_{yz} + M_z I_y) y - (M_z I_{yz} + M_y I_z) z \right]$$

$$\sigma_x = -\frac{1}{I_y I_z} \left[(+ M_z I_y) y - (+ M_y I_z) z \right]$$

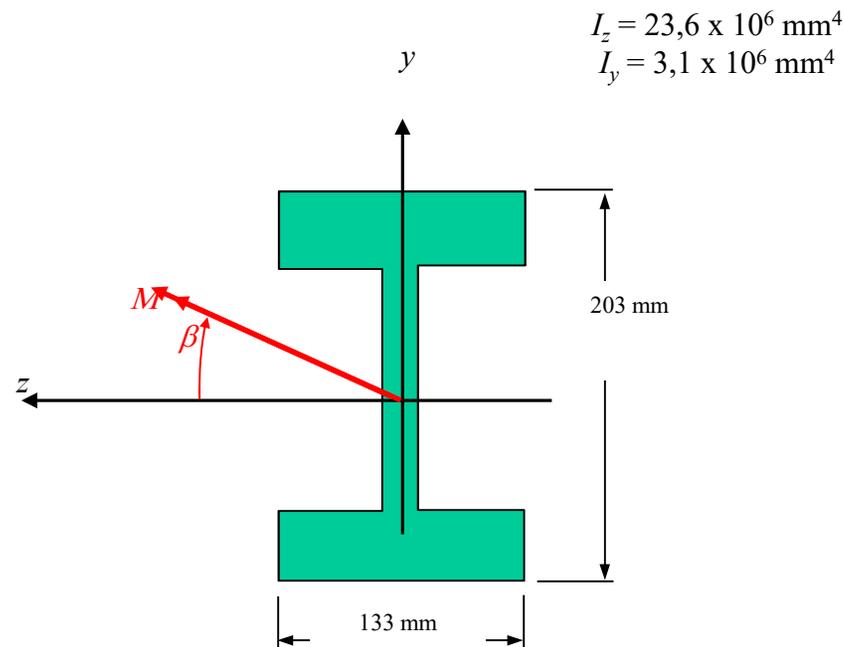
$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

(flexion 2 plans)

- Lorsque $I_{yz} = 0$
 - $tg \alpha = I_z tg \beta / I_y$
 - Si $I_y \ll I_z$
 - une faible valeur de β peut entraîner du **déversement latéral**

Exemple : Profilé en I soumis à un moment M_z

1. Influence d'une légère inclinaison β (plan de chargement)
 - Sur l'orientation du plane neutre (angle α)
2. Variation de σ_x en fonction de β ($M = 1000$ N.m)



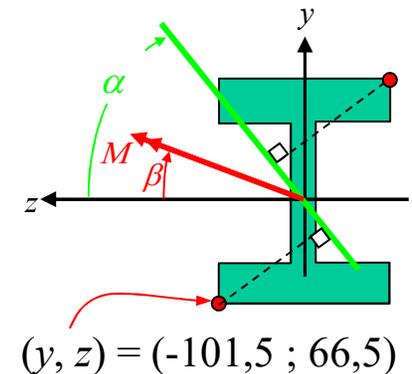
Exemple: Profilé en I soumis à un moment M_z

1. Influence d'une légère inclinaison β
 - Sur l'orientation du plane neutre (angle α)
2. Variation de σ_x en fonction de β ($M = 1000$ N.m)
 - $I_{yz} = 0$ puisque un des axes (y ou z) est un plan de symétrie de la section

$$\textcircled{1} \quad \text{tg } \alpha = \frac{I_z \text{tg } \beta}{I_y} = \frac{23,6 \times 10^6}{3,1 \times 10^6} \text{tg } \beta = 7,61 \text{tg } \beta$$

$$M_y = M \sin \beta \quad ; \quad M_z = M \cos \beta$$

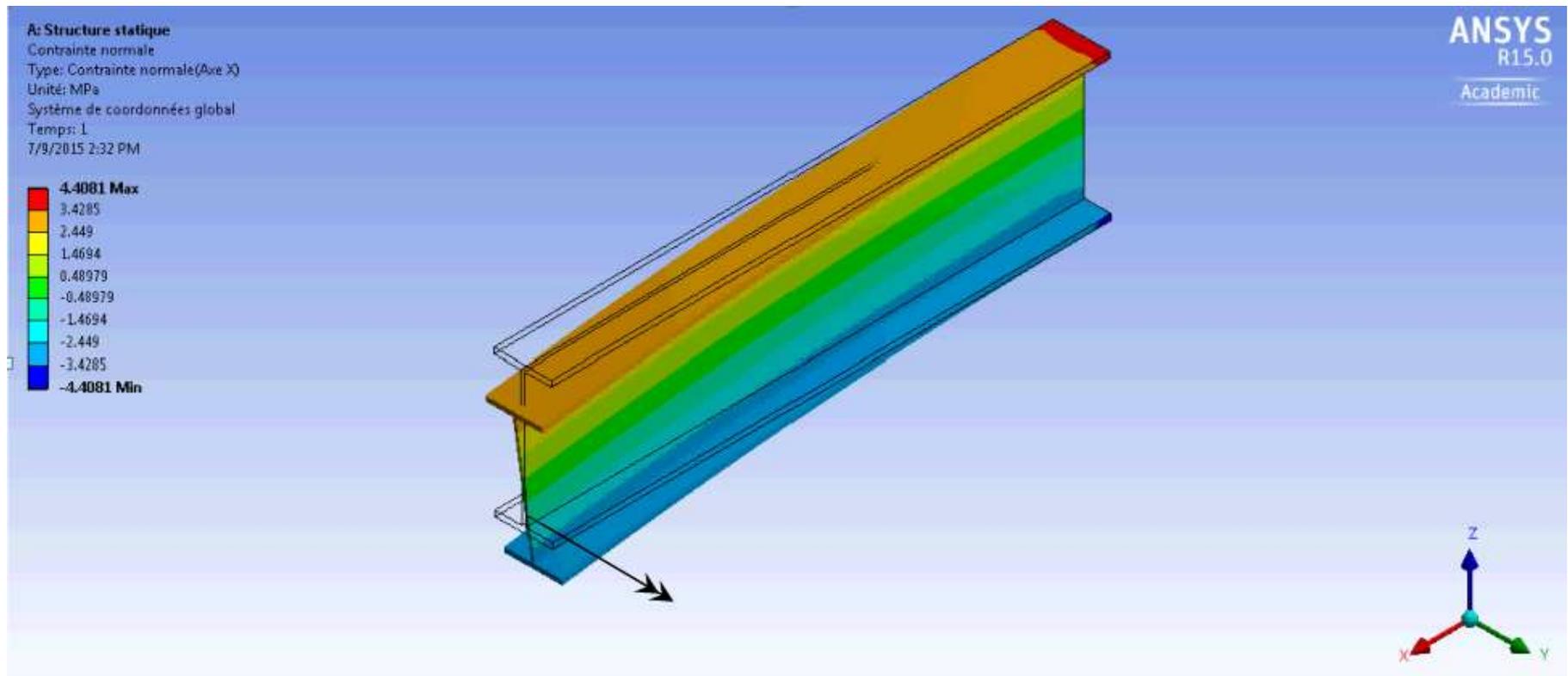
$$\textcircled{2} \quad \sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 4,3 \cos \beta + 21,4 \sin \beta$$



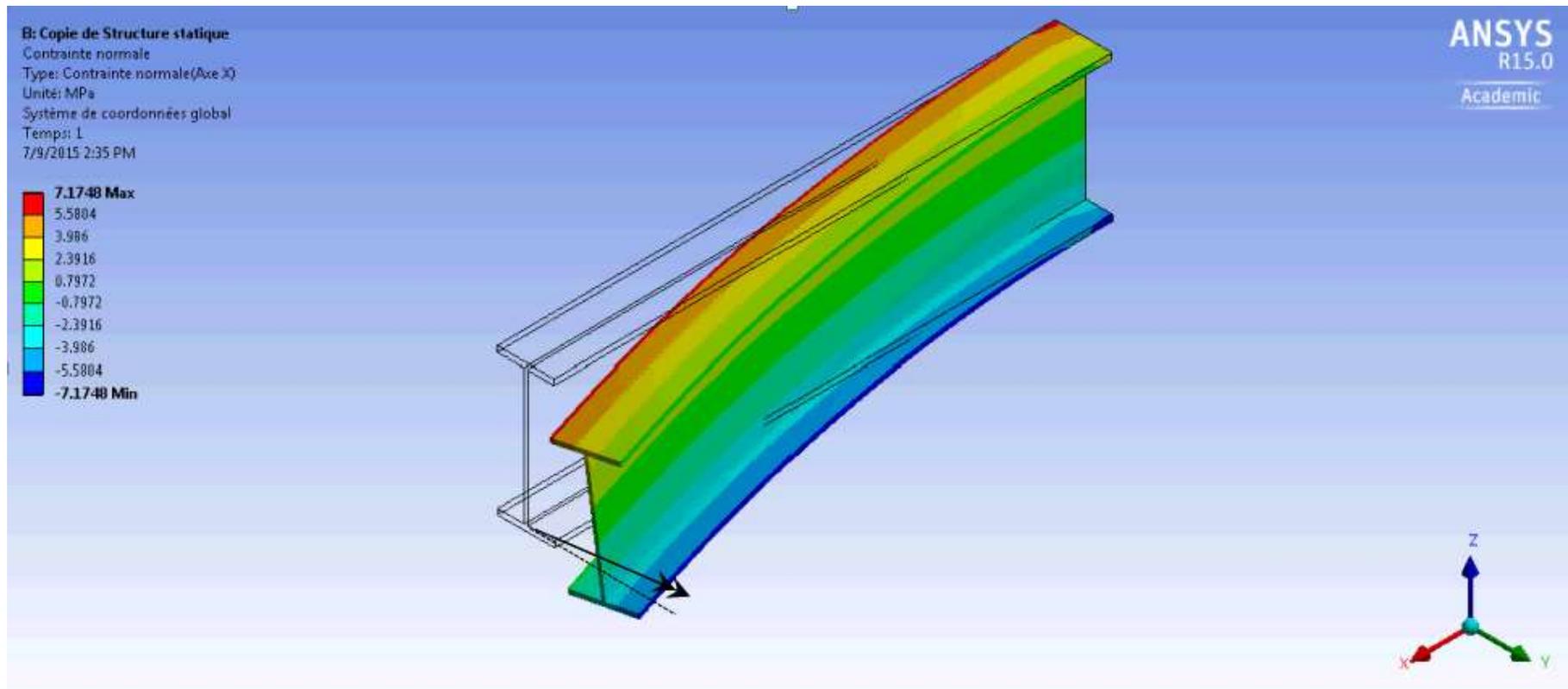
| β (°) | α (°) | $(\sigma_x)_{\max}$ pour $M = 1000$ N.m (MPa) |
|-------------|--------------|---|
| 0 | 0 | 4,2 |
| 1 | 7,6 | 4,7 |
| 5 | 33,7 | 6,1 |
| 10 | 53,3 | 8,0 |

Observation: Un petit changement de β mène à une grande inclinaison du plan neutre et une augmentation de la contrainte σ_x maximale

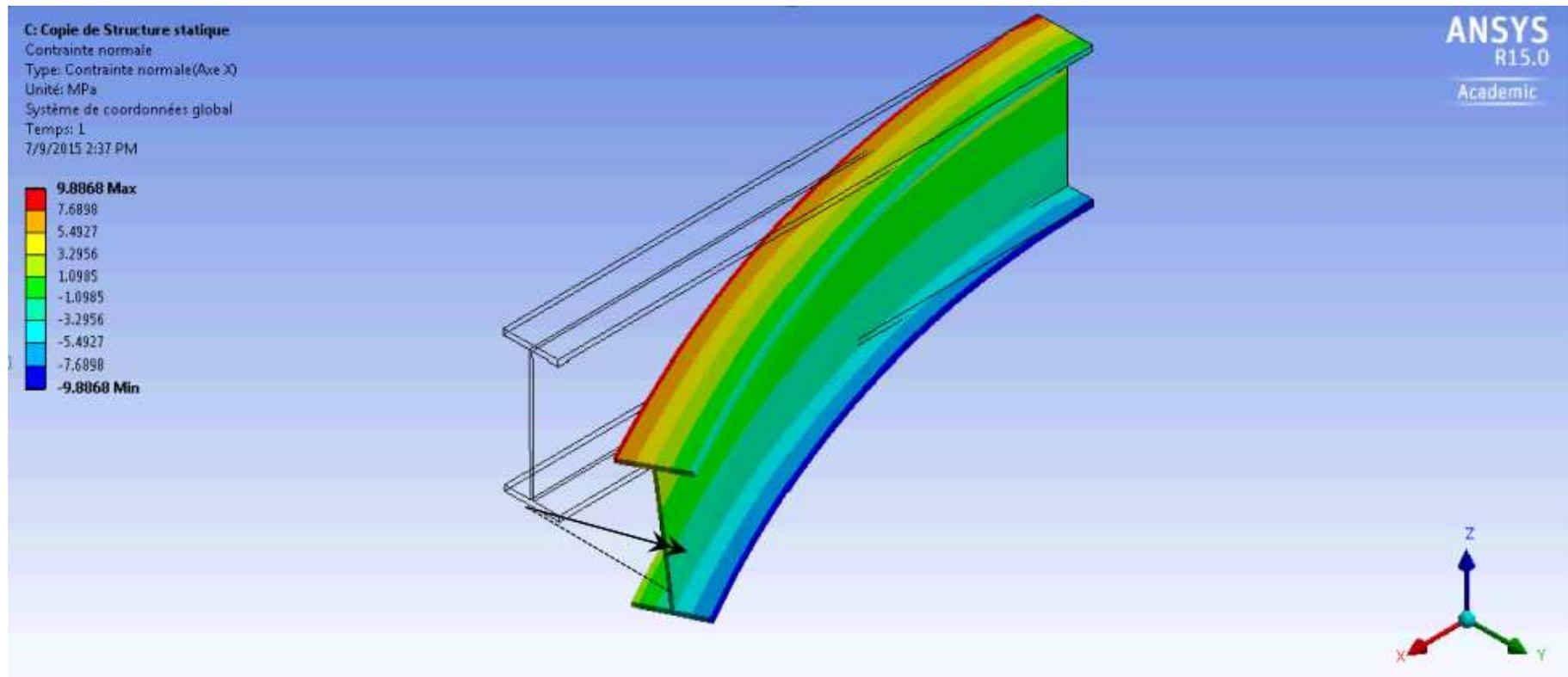
Animation pour $\beta=0$



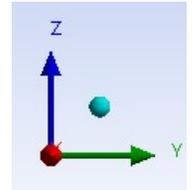
Animation pour $\beta = 5^\circ$



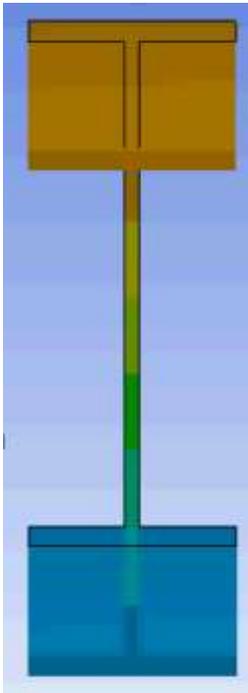
Animation pour $\beta = 10^\circ$



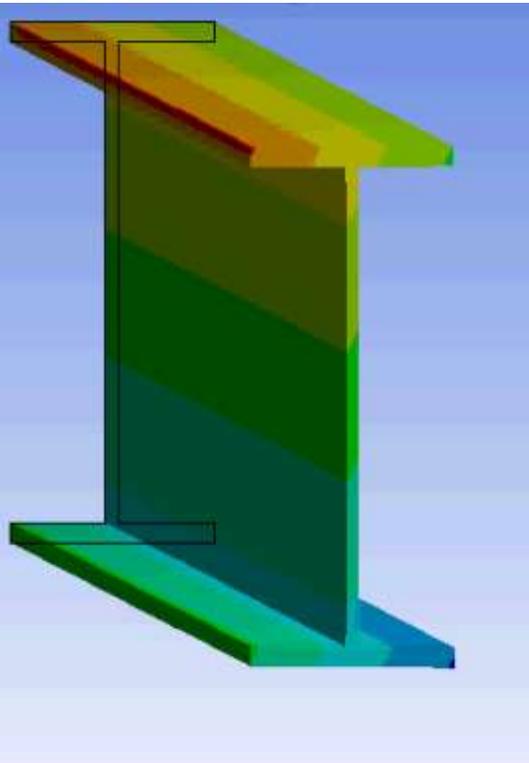
Vue de face



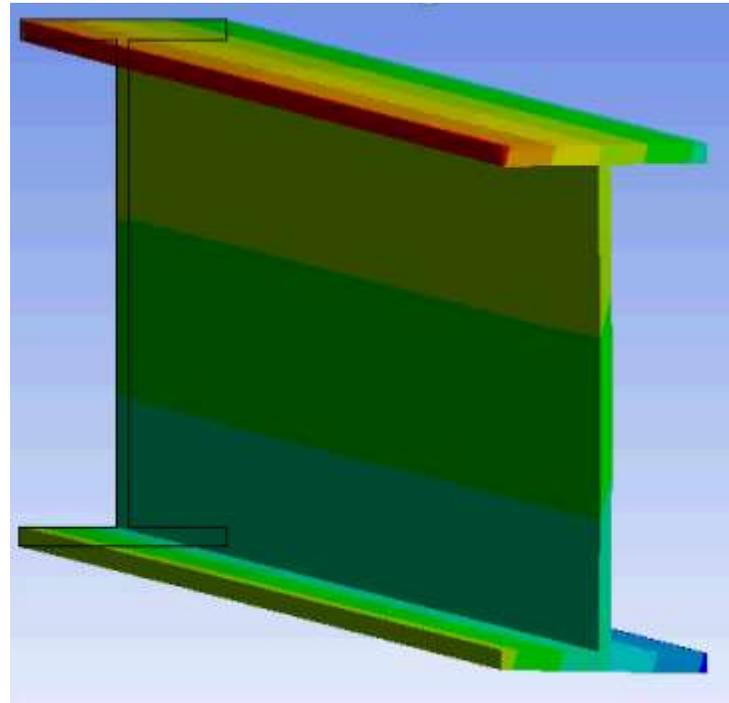
$\beta=0$



$\beta=5^\circ$



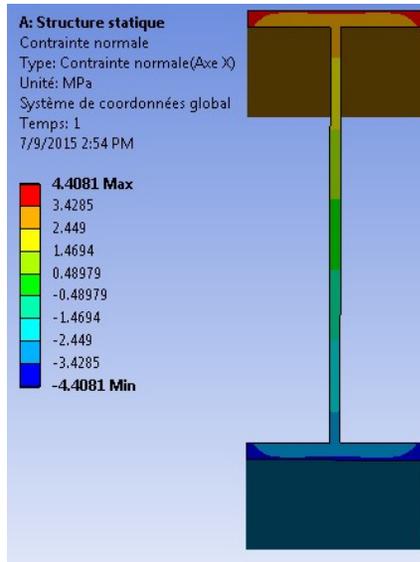
$\beta=10^\circ$



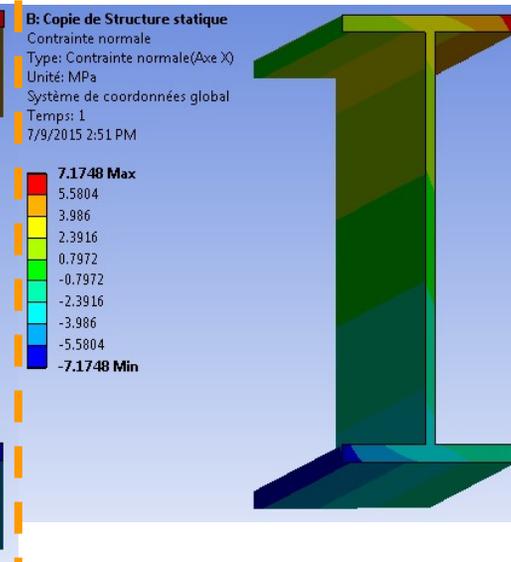
Amplification x1000

Contraintes au niveau de l'encastrement

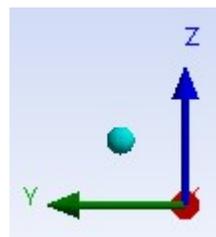
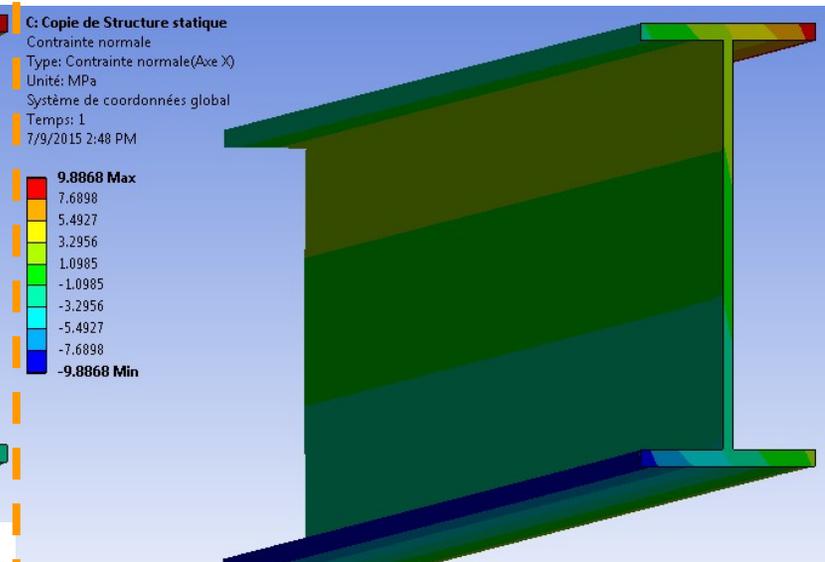
$\beta = 0$



$\beta = 5^\circ$



$\beta = 10^\circ$



Flexion gauche : Exercice 2

La poutre AB montrée à la figure a) est fabriquée en soudant, sur toute sa longueur, deux plaques rectangulaires de 90 mm × 12 mm (voir la fig. b). Le centre de la plaque verticale est situé à 18 mm du bord de la plaque horizontale. Cette poutre doit supporter un moment fléchissant M_z de 5 kN.m (selon le sens montré) et un moment de torsion T_{Bx} de 1,08 kN.m (selon le sens montré).

Le centroïde de la section est situé à 31,5 mm de la base et à 13,5 mm du centre de la plaque verticale. Les propriétés de la section sont :

$$I_z = 2,146 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_y = 1,136 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{yz} = \text{à déterminer.}$$

En considérant un facteur de sécurité de 1,5, déterminez la valeur minimale de la limite d'écoulement S_Y pour qu'il n'y ait pas écoulement dans cette membrure (en identifiant clairement la position du point le plus critique).

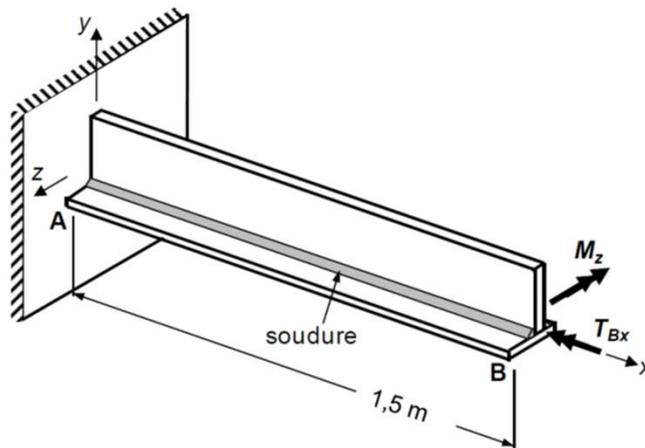


Fig. a) Poutre et son chargement

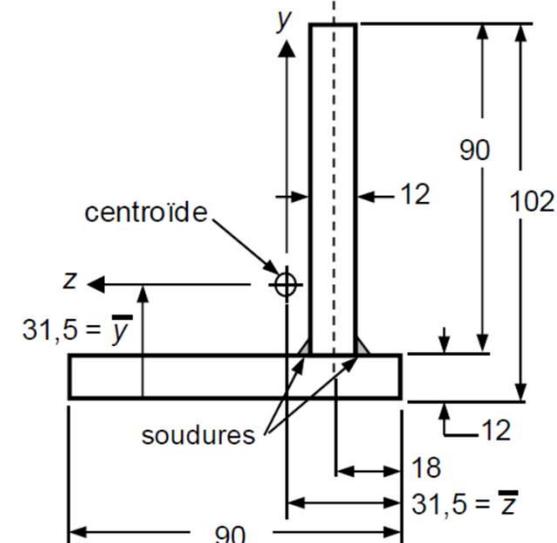


Fig. b) Section de la poutre (dimensions en mm)

Flexion gauche : Exercice 3

La poutre en acier AB montrée à la Fig. a) est encastree à son extrémité A et chargée à son extrémité B par un moment $M_{By} = 2,1 \text{ kN.m}$, selon le sens montré, et une force $F_{Bx} = 40 \text{ kN}$, selon le sens montré. Cette poutre est fabriquée en soudant sur toute la longueur AB une plaque ($100 \times 5 \text{ mm}$) à deux tubes carrés ($15 \times 15 \times 1,5 \text{ mm}$; aire de chaque tube = 81 mm^2). La section de la poutre est présentée à la Fig. b). La position du centroïde et les valeurs de I_z et I_y sont indiquées.

Indiquez le point le plus sollicité de la section sur la Fig. b) et déterminez l'état de contrainte à cet endroit.

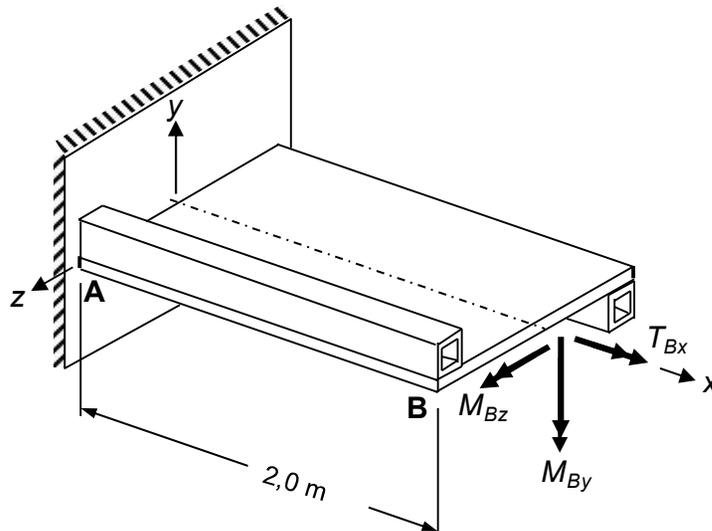


Fig. a) Structure et chargement (dessin pas à l'échelle)

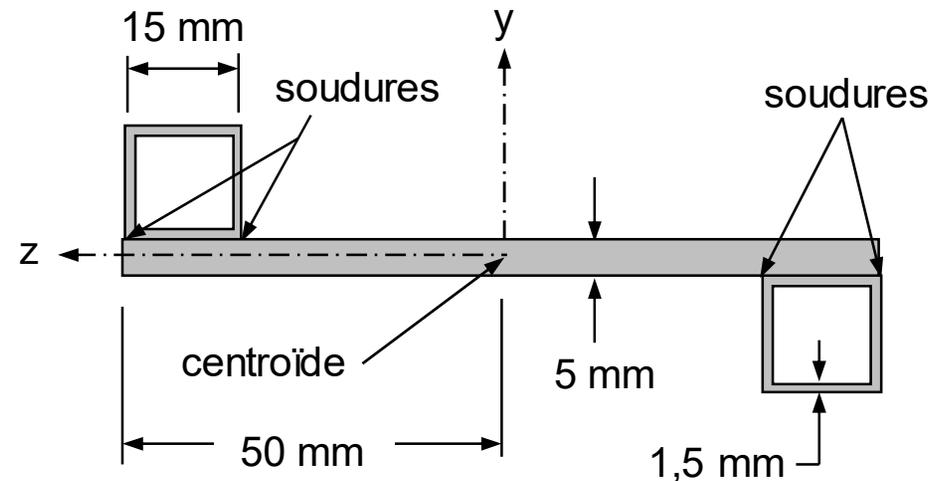


Fig. b) Section de la poutre AB (dessin à l'échelle)

$$I_z = 22,22 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 714,26 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = 68,85 \times 10^3 \text{ mm}^4$$



Flexion gauche : Résumé

APPROCHE :

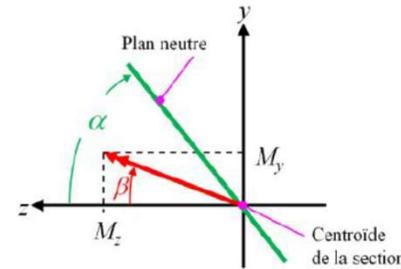
1. Localisation du centroïde
2. Calcul des seconds moments de surface
3. Calcul du moment produit
4. Calcul de l'inclinaison du plan neutre
5. Identifier les points le plus sollicités
6. Calcul de $\sigma_{x \max}$

Formulaire type à l'examen

$$\bar{y}_i = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \quad \tan \beta = \frac{M_y}{M_z} \quad \tan \alpha = \frac{M_z I_{yz} + M_y I_z}{M_y I_{yz} + M_z I_y} = \frac{I_{yz} + I_z \tan \beta}{I_y \tan \beta + I_y}$$

$$\sigma_x = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[(M_y I_{yz} + M_z I_y) y - (M_z I_{yz} + M_y I_z) z \right]$$

$$\sigma_x = -\left[\frac{M_y}{I_{yz}^*} + \frac{M_z}{I_z^*} \right] y + \left[\frac{M_z}{I_{yz}^*} + \frac{M_y}{I_y^*} \right] z$$



$$I_y^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_z} \quad ; \quad I_z^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_y} \quad ; \quad I_{yz}^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_{yz}}$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_i z_i} + \bar{y}_i \bar{z}_i A)$$

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta - I_{yz} \sin 2\theta$$

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta + I_{yz} \sin 2\theta$$

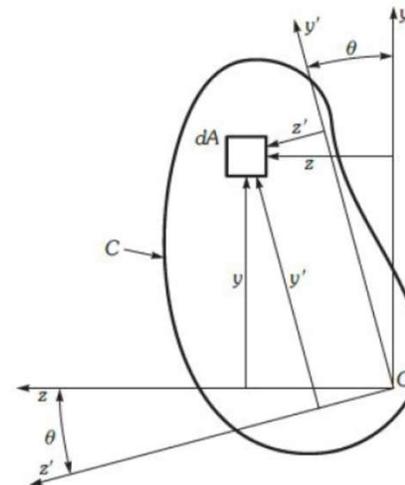


Figure A.4 Réaction du système d'axes. Le système d'axes y' et z' fait avec le système d'axes y et z un angle θ .