SOLUTIONNAIRE CP-A2012

NOM : ______________________________

SIGNATURE: ______________________ MATRICULE: ____________

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
SECTION MÉCANIQUE APPLIQUÉE

COURS MEC 2405
RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX II

Professeure: ☐ Gr. 01 - Magali Marcheschi

1	/ 5
2	/10
3	/5
Total	/20

Contrôle périodique

Mercredi 17 octobre 2012, de 15 h 45 à 17 h 30

NOTES IMPORTANTES:

- **Durée: 1h45.**
- **Répondre sur le questionnaire.**
- **Seules les calculatrices autorisées par un autocollant sont permises.**
- **Le questionnaire comporte 3 questions réparties sur 13 pages.**
- **LES DÉTAILS DES CALCULS DOIVENT APPARAÎTRE SUR LA COPIE.**
- **Un formulaire est annexé à ce questionnaire (pages 12 et 13).**
- **La présence de tout autre document sur l'aire de travail est frauduleuse.**

QUESTION 1 (5 points)

Pour la section illustrée à la figure 1, déterminez la position du centroïde $\overline{y}$ et les propriétés de section suivantes : I_y, I_z et $\cancel{I_{yx}}$.

I_{yz}.

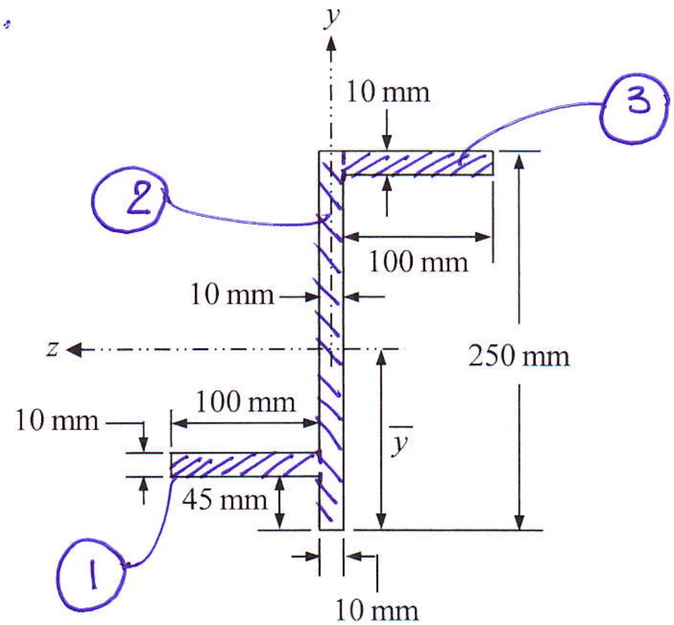


Figure 1

Rép. Question 1

Sous-Section	$\bar{y}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\bar{y}_i A_i$ (mm^3)
1	50	1000	50 000
2	125	2500	312 500
3	245	1000	245 000
Σ		4500	607500

• $\bar{y}$?

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{607\,500}{4\,500} = 135 \text{ mm}$$

$\bar{I}_{yi}$ (mm^4)	$\bar{I}_{zi}$ (mm^4)	$\bar{I}_{yizi}$ (mm^4)
$100 \times 10^3/12 = 8333,33$	$10 \times 100^3/12 = 833333,33$	0
$10 \times 250^3/12 = 13\,020\,833,33$	$250 \times 10^3/12 = 20\,833,33$	0
$100 \times 10^3/12 = 8333,33$	$10 \times 100^3/12 = 833333,33$	0
13 037 500	1 687 500	0

$\bar{Y}_i = \bar{y}_i - \bar{y}$ (mm)	$\bar{Z}_i = \bar{z}_i - \bar{z}$ (mm)	$\bar{Y}_i^2 A_i$ (mm^4)	$\bar{Z}_i^2 A_i$ (mm^4)
−85	55	7 225 000	3 025 000
−10	0	250 000	0
110	−55	12 100 000	3 025 000
		19 575 000	6 050 000

$\bar{Y}_i \bar{Z}_i A_i$ (mm^4)
−4 675 000
0
−4 675 000
−10 725 000

• $\bar{I}_y$: ?

$$\bar{I}_y = \Sigma \bar{I}_{yi} + \Sigma \bar{Y}_i^2 A_i = 13\,037\,500 + 19\,575\,000 = 32\,612\,500 \text{ mm}^4$$

• $\bar{I}_z$: ?

$$\bar{I}_z = \Sigma \bar{I}_{zi} + \Sigma \bar{Z}_i^2 A_i = 1\,687\,500 + 6\,050\,000 = 7\,737\,500 \text{ mm}^4$$

• $\bar{I}_{yz}$

$$\bar{I}_{yz} = \Sigma \bar{I}_{yizi} + \Sigma \bar{Y}_i \bar{Z}_i A_i = -10\,725\,000 \text{ mm}^4$$

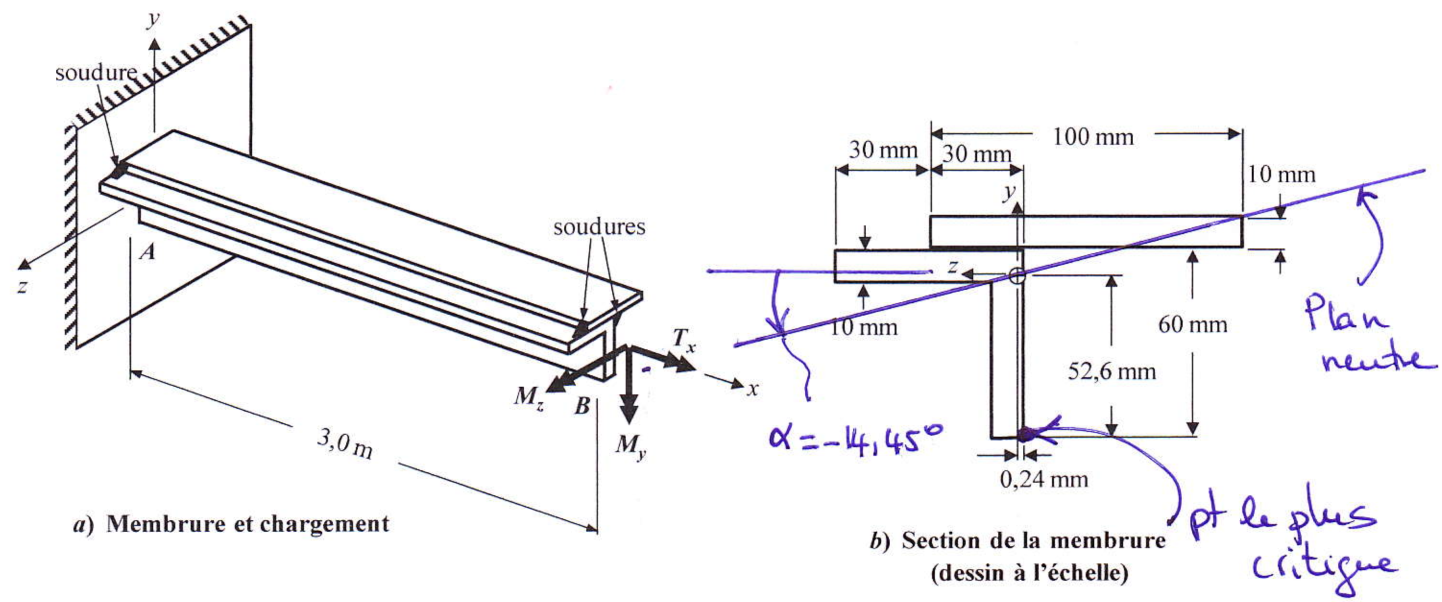
QUESTION 2 (10 points)

Une membrure structurale en acier AB de 3,0 m de longueur (figure 2*a*) est fabriquée en soudant, **aux extrémités *A* et *B* seulement**, une plaque mince de 100 mm × 10 mm à une cornière à paroi mince de 60 mm × 60 mm × 10 mm (voir la fig. 2*b*). La membrure est encastrée à son extrémité A et chargée à son autre extrémité B par deux moments de flexion M_y = 0,8 kN·m et M_z = 2,0 kN·m (sens montrés), et par un moment de torsion T_x de valeur inconnue. Les propriétés de l'acier sont les suivantes: E = 200 000 MPa, S_Y = 400 MPa et ν = 0,3.

Le centroïde de la section est situé à 52,6 mm de la base et à 0,24 mm de la paroi verticale de la cornière, tel que montré à la figure 2*b*. Les propriétés de la section sont les suivantes :

$$I_z = 0{,}655 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$I_y = 1{,}97 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$I_{yz} = -273{,}8 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Déterminez la valeur maximale de T_x pour éviter l'écoulement, en considérant un facteur de sécurité de 2.



a) **Membrure et chargement**

b) **Section de la membrure (dessin à l'échelle)**

Figure 2

Rép. Question 2

- Contraintes :

– Flexion gauche : $M_y = -0{,}8$ kN.m et $M_z = 2$ kN.m

$$\cdot\ tg\,\beta = \frac{M_y}{M_z} = \frac{-0{,}8}{2} = -0{,}4 \longrightarrow \beta = -21{,}80°$$ inclinaison du plan de chargement

$$\cdot\ tg\,\alpha = \frac{I_{yz} + I_z\, tg\,\beta}{I_{yz}\, tg\,\beta + I_y} = \frac{-273{,}8\times10^{3} + (0{,}655\times10^{6})(-0{,}4)}{(-273{,}8\times10^{3})(-0{,}4) + 1{,}97\times10^{6}} = -0{,}258 \longrightarrow \alpha = -14{,}45°$$

ou bien

$$tg\,\alpha = \frac{M_z I_{yz} + M_y I_z}{M_y I_{yz} + M_z I_y} = \frac{(2)(-273{,}8\times10^{3}) + (-0{,}8)(0{,}655\times10^{6})}{(-0{,}8)(-273{,}8\times10^{3}) + (2)(1{,}97\times10^{6})}$$

inclinaison du plan neutre (Voir figure 2b)

$$\cdot\ \sigma_x = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2}\left[(M_y I_{yz} + M_z I_y)\,y - (M_z I_{yz} + M_y I_z)\,z\right]$$

ou bien

$$\sigma_x = -\left[\frac{M_y}{I^*_{yz}} + \frac{M_z}{I^*_z}\right]y + \left[\frac{M_z}{I^*_{yz}} + \frac{M_y}{I^*_y}\right]z$$

$$I_y^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_z} = \frac{(1{,}97\times10^{6})(0{,}655\times10^{6}) - (-273{,}8\times10^{3})^2}{0{,}655\times10^{6}} = 1{,}8556\times10^{6}\ \text{mm}^4$$

$$I_z^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_y} = \frac{(1{,}97\times10^{6})(0{,}655\times10^{6}) - (-273{,}8\times10^{3})^2}{1{,}97\times10^{6}} = 0{,}6170\times10^{6}\ \text{mm}^4$$

$$I_{yz}^* = \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{I_{yz}} = \frac{(1{,}97\times10^{6})(0{,}655\times10^{6}) - (-273{,}8\times10^{3})^2}{-273{,}8\times10^{3}} = -4{,}4390\times10^{6}\ \text{mm}^4$$

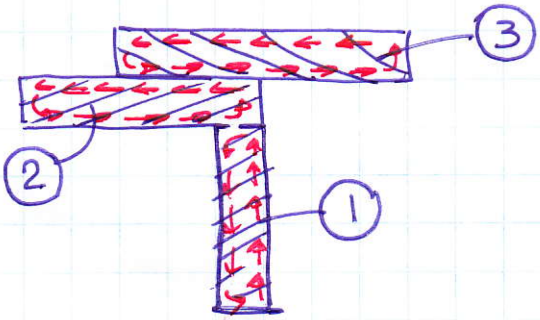
kN.m en N.mm

$$\longrightarrow \sigma_x = -\left[\frac{-0{,}8\times10^{6}}{-4{,}4390\times10^{6}} + \frac{2\times10^{6}}{0{,}617\times10^{6}}\right]y + \left[\frac{2\times10^{6}}{-4{,}4390\times10^{6}} + \frac{-0{,}8\times10^{6}}{1{,}8556\times10^{6}}\right]z$$

$$= -3{,}4217\,y - 0{,}8817\,z \quad \text{MPa}$$

- Torsion : T_x

→ Sections composées soudées aux extrémités → toutes les sections sont ouvertes ↳ éléments rectangulaires minces.



• Equilibre : $T_x = T_{tot} = T_1 + T_2 + T_3$

• $J_{tot} = \sum J_i = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 = \frac{1}{3} \left(50 \times 10^3 + 60 \times 10^3 + 100 \times 10^3 \right)$

$$= 70 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

• Compatibilité géo : $\dfrac{T_1}{J_1} = \dfrac{T_2}{J_2} = \dfrac{T_3}{J_3} = \dfrac{T_{tot}}{J_{tot}} \rightarrow T_i = T_{tot} \cdot \dfrac{J_i}{J_{tot}}$

→ plaque de section rectangulaire mince : $(\tau_i)_{max} = \dfrac{T_i t_i}{J_i}$

$$= \frac{T_{tot} t_i}{J_{tot}}$$

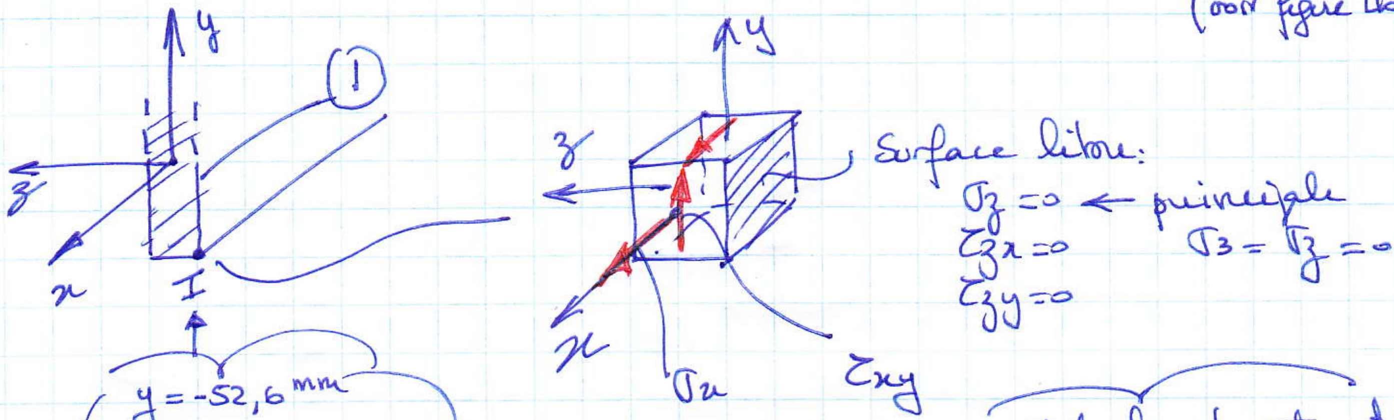
puisque l'épaisseur est uniforme ($t = 10mm$), τ est constant sur toute la section

$$(\tau_1)_{max} = (\tau_2)_{max} = (\tau_3)_{max} = \frac{T_x (10)}{70 \times 10^3} = 1{,}4286 \times 10^{-4} T_x$$

T_x en N.mm

Point critique :

Puisque τ est constant sur toute la section, le pt critique se situe là où σ_x a une valeur maximale → pt le plus éloigné du plan neutre → pt I (voir figure 2b)



$y = -52,6$ mm
$z = -0,24$ mm

Etat plan de contrainte xy

$\sigma_x = -3,4217(-52,6) - 0,8817(-0,24) = 180,2$ MPa
$\sigma_y = 0$
$\tau_{xy} = (\tau_1)_{max} = 1,4286 \times 10^{-4}\, T_x$
$\sigma_z = 0 = \sigma_3$
$\tau_{zx} = 0$
$\tau_{zy} = 0$

D'après Tresca : $\quad \sigma_{max} - \sigma_{min} \leq \dfrac{S_Y}{F.S}$

$$\begin{matrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{matrix} = \left[\sigma_1 ; \sigma_2 ; \sigma_3\right]^{max}_{min}$$

puisque $\sigma_z = \sigma_3 = 0$ → σ_1 et σ_2 ds le plan xy :

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{180,2}{2} + \sqrt{\left(\frac{180,2}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leftarrow \sigma_{max} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{180,2}{2} - \sqrt{\left(\frac{180,2}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leftarrow \sigma_{min}$$

$$\cancel{90,1} + \sqrt{(90,1)^2 + \tau_{xy}^2} - \left(\cancel{90,1} - \sqrt{(90,1)^2 + \tau_{xy}^2}\right) \leq \frac{400}{2} = 200$$

$$\cancel{2}\sqrt{(90,1)^2 + \tau_{xy}^2} \leq \cancel{2}00$$

$$\sqrt{(90,1)^2 + \tau_{xy}^2} \leq 100$$

$$(90,1)^2 + \tau_{xy}^2 \leq 10\,000$$

$$\tau_{xy} \leq \pm 43,38 \text{ MPa}$$

donc $1,4286 \times 10^{-4}\, T_x = 43,38$ MPa.

d'où $T_x = 303,67 \times 10^3$ N.mm $= 303,67$ N.m

QUESTION 3 (5 points)

La poutre *ABCDE* montrée à la figure 3 est encastrée à son extrémité *A*. Après l'application des charges $P = 10$ kN au point *B* et $Q = 3$ kN au point *C*, les déplacements aux points *B*, *C* et *D* sont respectivement $\delta_B = 1{,}25$ mm, $\delta_C = 5{,}0$ mm et $\delta_D = 10{,}25$ mm.

Lorsque la charge $R = 4$ kN, appliquée en *D*, est ajoutée à la poutre, les déplacements aux points *B*, *C* et *D* deviennent alors respectivement $\delta_B = 4$ mm, $\delta_C =$ inconnue et $\delta_D = 19{,}0$ mm

Déterminez le déplacement total en *C*.

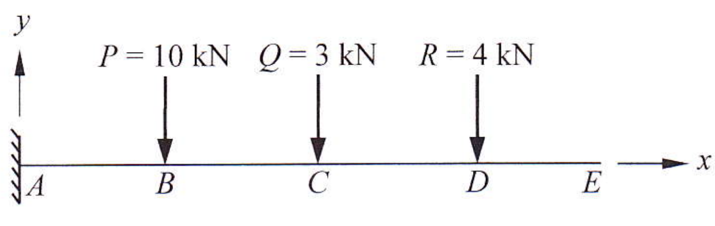


Figure 3

$(\delta_B)_{P+Q} = 1{,}25^{mm}$; $(\delta_C)_{P+Q} = 5^{mm}$; $(\delta_D)_{P+Q} = 10{,}25^{mm}$

$(\delta_B)_{P+Q+R} = 4^{mm}$; $(\delta_C)_{P+Q+R} = ?$; $(\delta_D)_{P+Q+R} = 19\ mm$.

Selon Maxwell-Betti : Système I : $P+Q$
Système II : R

$$\Longrightarrow \quad P(\delta_B)_R + Q(\delta_C)_R = R(\delta_D)_{P+Q}$$

$$(\delta_B)_R = (\delta_B)_{P+Q+R} - (\delta_B)_{P+Q} = 4 - 1{,}25 = 2{,}75^{mm}$$

$$(\delta_C)_R = (\delta_C)_{P+Q+R} - (\delta_C)_{P+Q} = (\delta_C)_{total} - 5$$

$$\Longrightarrow \quad (10)(2{,}75) + 3\left((\delta_C)_{total} - 5\right) = (4)(10{,}25)$$

d'où $(\delta_C)_{total} = 9{,}5^{mm}$