QUESTION 1 (4 points)

La figure a) illustre un arbre ABC en acier, encastré à son extrémité A et chargé à son extrémité C. Un changement de section avec arrondis (rayon = 3 mm) est présent au point B. Les propriétés de l'acier sont :

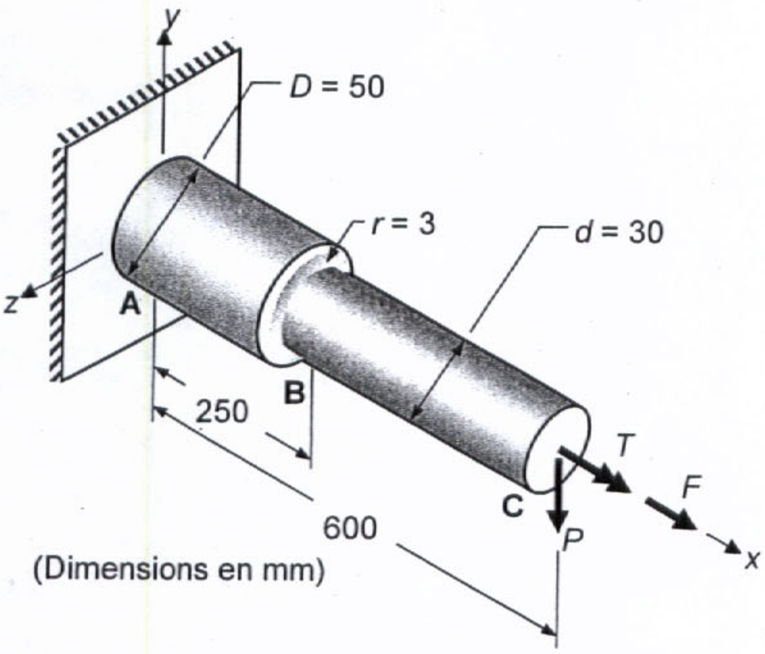
$$S_u = 700 \text{ MPa} \quad ; \; S_Y = 425 \text{ MPa} \;\; ; \quad S_e' = 350 \text{ MPa}.$$

Les chargements appliqués à l'extrémité C varient dans le temps:

- une force verticale P, appliquée dans le sens montré, varie de 113,6 N à 719,5 N;
- un moment de torsion T, appliqué dans le sens montré, varie de 0,239 kN.m à 0,479 kN.m;
- une force axiale F constante et égale à 53,0 kN.

La charge P et le moment de torsion T varient en phase.

$D/d = 1.66$ $r/d = 0.1$



$S_e = k_a . k_b . k_c . k_d . k_e . k_f . S_e'$

- Pièce usinée, $k_a = 0{,}75$
- Dimensions, $k_b = 0{,}85$
- Fiabilité de 95 %, $k_c = 0{,}868$
- Température ambiante, $k_d = 1$
- Concentration de contraintes, k_e : **à déterminer**
- Autres effets, $k_f = 1{,}0$

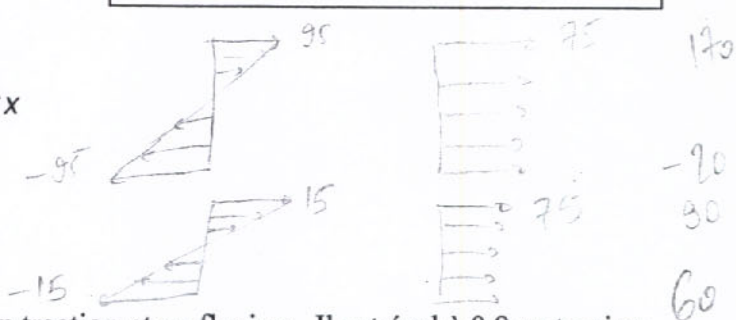


Fig. a) Structure et chargement

Le facteur de sensibilité à l'entaille q est égal à 0,85 en traction et en flexion. Il est égal à 0,9 en torsion.

En appliquant l'approche « Éléments de machine », calculez le nombre de cycles à la rupture à la section B de cet arbre si le facteur de sécurité en fatigue est égal à 1,5.

1. Calcul de k_e

On détermine K_t pour les différents chargements

TRACTION $\quad K_t = 1.90 \quad \rightarrow \quad k_e = \dfrac{1}{0.85(1.9-1)+1} = 0.56$

FLEXION $\quad K_t = 1.80 \quad \rightarrow \quad k_e = \dfrac{1}{0.85(1.8-1)+1} = 0.56$

TORSION $\quad k_t = 1.39 \quad \rightarrow \quad k_e = \dfrac{1}{0.9(1.39-1)+1} = 0.74$

donc $k_e = 0.56$ le plus défavorable

$$S_e = 0.75 \times 0.85 \times 0.868 \times 1 \times 0.56 \times 1 \times 350$$

$S_e = 108.45$ MPa. ✓

Calcul de σ_a, σ_m
$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_{max}\,C}{I} \qquad \sigma_{x\,min} = \frac{M_{min}\,C}{I}$$

$$\sigma_{y\,max} = \frac{719.5 \times 350 \times 15}{\pi (15)^4/4} + \frac{53 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi (30)^2} = 95 + 75 = 170 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{x\,min} = -95 + 75 = -20 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{x\,a} = \frac{\sigma_{x\,max} - \sigma_{x\,min}}{2} = \cancel{95}\ 46 \text{ MPa} \qquad \boxed{-0.5}$$

$$\sigma_{x\,m} = \frac{\sigma_{x\,max} + \sigma_{x\,min}}{2} = \cancel{75}\ 130 \text{ MPa.}$$

$$\tau_{x\,max} = \frac{T_{max}\, r}{J} = \frac{0.479 \cdot 10^6 \cdot 15}{\frac{\pi (15)^4}{2}} = 90 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x\,min} = \frac{T_{min}\, r}{J} = \frac{0.239 \cdot 10^6 \cdot 15}{\frac{\pi (15)^4}{2}} = 45 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xa} = \frac{\tau_{xmax} - \tau_{xmin}}{2} = 22.5 \text{ MPa} \checkmark$$

$$\tau_{xm} = \frac{\tau_{xmax} + \tau_{xmin}}{2} = 67.5 \text{ MPa} \checkmark$$

Contraintes équivalentes von MISES

$$\sigma_a' = \sqrt{\cancel{3}(\sigma_{xa})^2 + 3\tau_{xa}^2} = 118.5 \text{ MPa} \quad \boxed{-0.25}$$

$$\sigma_m' = \sqrt{\cancel{2}(\sigma_{xm})^2 + 3\tau_{xm}^2} = 148.7 \text{ MPa}$$

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a'}{S_f} + \frac{\sigma_m'}{S_u}} \qquad 1.5 = \frac{1}{\frac{118.5}{S_f} + \frac{148.7}{700}}$$

$$\frac{118.5}{S_f} + 0.2124 = 0.666 \qquad S_f = \frac{118.5}{0.4542} \text{ MPa}$$

$S_f = \cancel{260.89}$ MPa
134

Nombre de cycle

$$N = 1000 \left(\frac{260.89}{0.9 \times 700} \right)^{\frac{3}{\log\left(\frac{108.45}{0.9 \times 700}\right)}}$$

$$= 1000 \left(0.414 \right)^{-3.926}$$

$N = \cancel{31\,890}$ cycles
$\sim 480\,000$

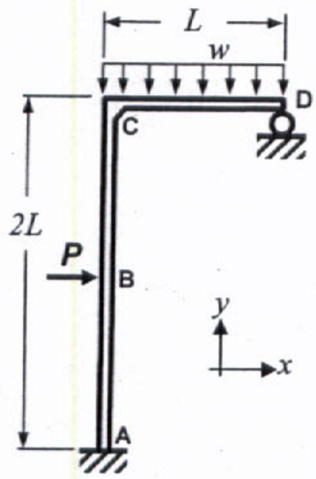
$\left(\frac{3.25}{4}\right)$

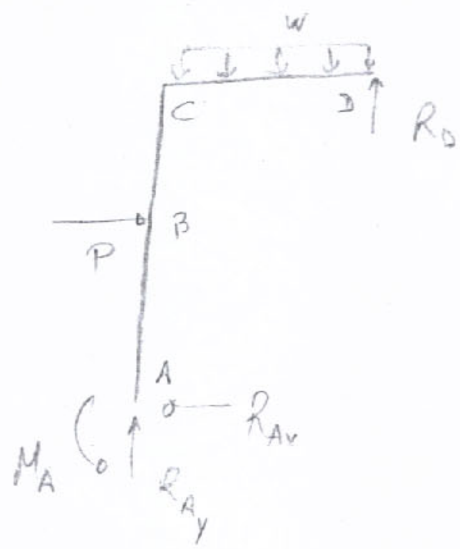
QUESTION 2 (4 points)

La figure illustre une structure ABCD, encastrée au point A et simplement supportée au point D (seul le déplacement en y est bloqué au point D). Le joint en C est rigide. Une charge verticale uniformément répartie w, est appliquée entre les points C et D. Une charge horizontale P est appliquée au point B, à mi-distance entre A et C. La structure a une rigidité en flexion égale à EI.

Déterminez les réactions aux points A et D en fonction des paramètres *P*, *L* et *w*.

Note : Négligez les effets de l'effort tranchant et de la charge axiale sur l'énergie de déformation.





$$\begin{cases} R_{Ay} + R_D = w \\ R_{Ax} = P \end{cases}$$

$\Sigma M_{/A} = 0$ $\quad R_D \cdot L - \frac{wL^2}{2} - PL + M_A = 0$

Problème hyperstatique → CASTIGLIANO

Calcul de R_D on a $\begin{cases} R_{Ay} = wL - R_D \\ M_A = \frac{wL^2}{2} + PL - R_D \cdot L \end{cases}$

$M_1 = R_{Ax}\,x - M_A = P \cdot x - \left(\frac{wL^2}{2} + PL - R_D \cdot L\right)$ entre A et B

$\frac{\partial M_1}{\partial R_D} = +L$

$$M_2 = R_{Ax} x - P\cdot(x-L) - M_A$$ entre B et C

$$\frac{\partial M_2}{\partial R_D} = +L$$

$$M_3 = R_D \cdot x - \frac{w x^2}{2}$$ entre D et C

$$\frac{\partial M_3}{\partial R_D} = x$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_D} = \int_0^L \frac{M_1 \frac{\partial M_1}{\partial R_D}}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{M_2 \frac{\partial M_2}{\partial R_D}}{EI} dx + \int_0^L \frac{M_3 \frac{\partial M_3}{\partial R_D}}{EI} dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_D} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(PxL - \frac{wL^3}{2} + PL^2 - R_D L^2\right) dx + \frac{1}{EI}\int_L^{2L}\left(-\frac{wL^3}{2} + R_D \cdot L^2\right) dx$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_0^L \left(R_D x^2 - \frac{w x^3}{2}\right) dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_D} = \frac{1}{EI}\left[P\frac{x^2 L}{2} - \frac{wL^3}{2}x + PL^2 x - R_D L^2 x\right]_0^L + \frac{1}{EI}\left[-\frac{wL^3}{2}x + R_D L^2 x\right]_L^{2L}$$

$$+ \frac{1}{EI}\left[R_D \frac{x^3}{3} - \frac{w x^4}{8}\right]_0^L$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_D} = \frac{1}{EI}\left[\frac{PL^3}{2} - \frac{wL^4}{2} + PL^3 - R_D L^3\right]$$

$$+ \frac{1}{EI}\left\{\left[-wL^4 + 2R_D L^3\right] - \left[-\frac{wL^4}{2} + R_D L^3\right]\right\}$$

$$+ \frac{1}{EI}\left[R_D\frac{L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_D} = \frac{1}{EI}\left\{\left(\frac{PL^3}{2} + \frac{2PL^3}{2}\right) + \left(-\frac{4wL^4}{8} - \frac{8wL^4}{8} + \frac{4wL^4}{2} - \frac{wL^4}{8}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{-3R_D L^3}{3} + \frac{6R_D L^3}{3} + \frac{3R_D L^3}{3} + \frac{R_D L^3}{3}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{3PL^3}{2} - \frac{9wL^4}{8} + \frac{7R_D L^3}{3}\right) = 0$$

$$\frac{7R_D}{3} = \frac{9wL}{8} - \frac{3P}{2} \qquad \boxed{R_D = \frac{27wL}{56} - \frac{9P}{14}}$$

$$R_{Av} = wL - R_D = \frac{29wL}{56} + \frac{9P}{14}$$

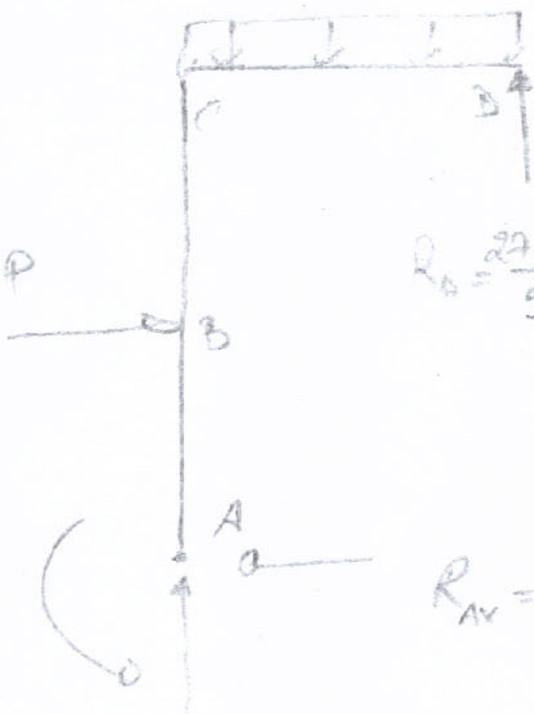
$$M_A = \frac{wL^2}{2} + PL - R_D L$$

$$= \frac{wL^2}{2} + PL - \frac{27wL^2}{56} - \frac{9PL}{14}$$

$$M_A = \frac{wL^2}{\cancel{28}\ 56} - \frac{15PL}{14}$$

Très proche

$$\left(\frac{3.75}{4}\right)$$



$$R_D = \frac{27wL}{56} + \frac{9P}{14}$$

$$R_{Ax} = 0$$

$$M_A = \frac{wL^2}{28} - \frac{5PL}{14}$$

$$R_{Ay} = \frac{29wL}{56} + \frac{9P}{14}$$

QUESTION 3 (6 points)

La figure a) illustre, dans les plans x-y et x-z, une structure composée de deux membrures ABC et CD, de section rectangulaire identique (100 mm × 50 mm). Les joints en A et D sont des pivots, le joint en C est une rotule dans les deux plans. Les deux membrures sont fabriquées d'un même acier (module de Young, E = 200 000 MPa; S_Y = 400 MPa) qui n'a pas été traité pour relâcher les contraintes résiduelles (n = 1,34).

Le chargement suivant est appliqué simultanément :

- au point C, une force F_{Cy} = 60 kN, selon la direction y;
- au point B, une force F_{Bz} = 16 kN, selon la direction z.

En vous référant à la norme ACNOR et en considérant un coefficient de tenue φ égal à 0,9 ainsi qu'un facteur de pondération de la charge égal à 1,5, vérifiez si la structure possède une résistance suffisante pour éviter le flambement.

NOTE : La solution d'une membrure encastrée-rotule est donnée à la figure b.)

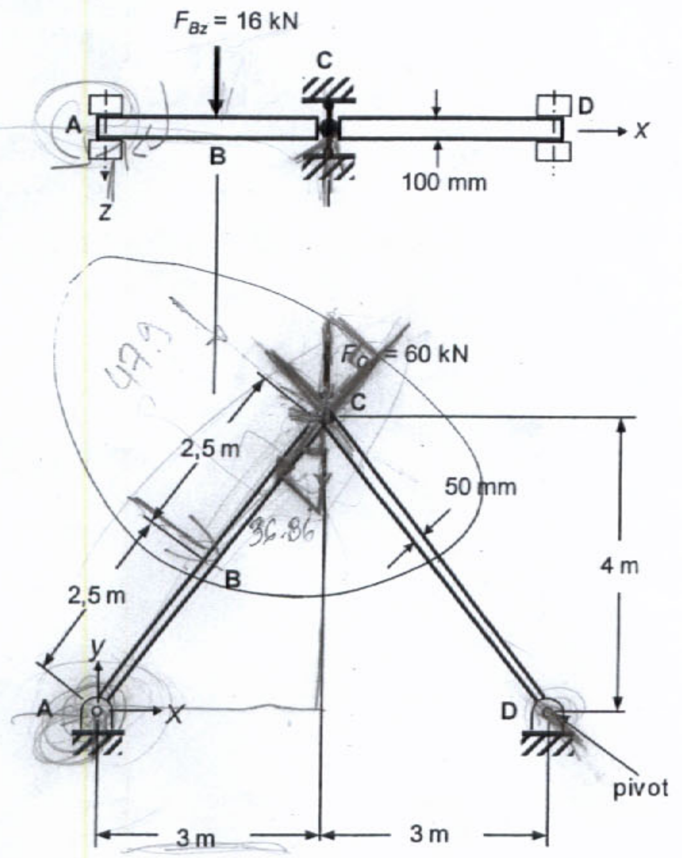
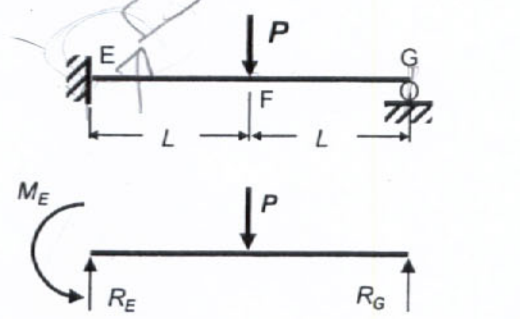
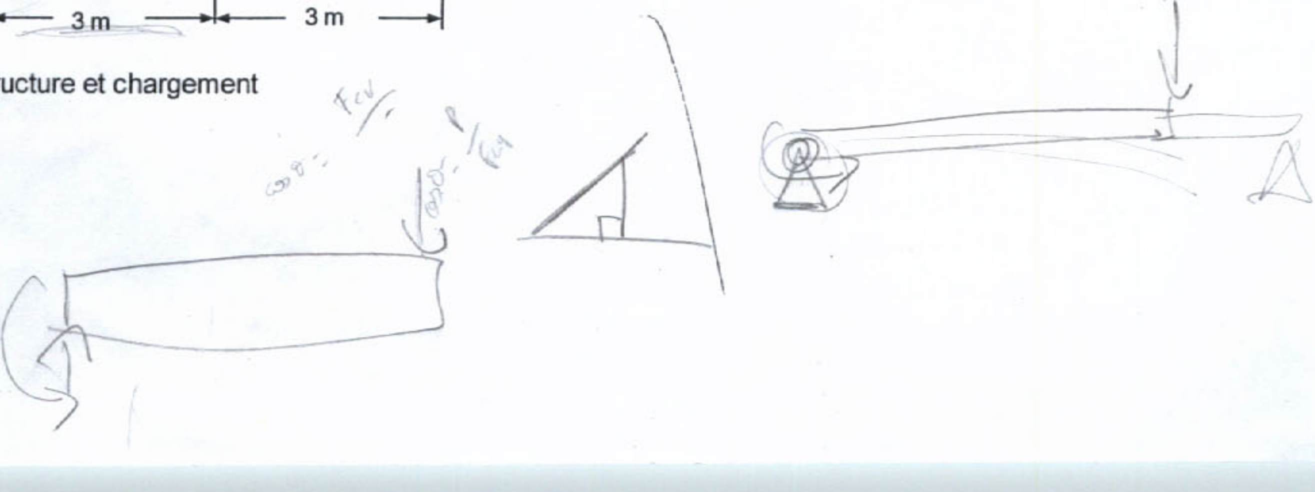


Fig.a) Structure et chargement



M_E = 3/8 PL ; R_E = 11/16 P ; R_G = 5/16 P

Fig. b) Réactions aux appuis d'une poutre encastrée-rotule



FLAMBEMENT ABC 0.25 0.5

$$C = \alpha \cdot P = 1.5 \times \boxed{F_{cy} \cdot \sin 36.86} = 53.98 \approx 54\,kN$$

$$C_r = \varphi \cdot A \cdot S_y \cdot (1+\lambda^{2n})^{-1/n} = 0.9 \times 5000 \times 400 \times (1 + 0.0049^{2 \cdot 1.34})^{-1/1.3}$$

$k = 1$ 0.5

$$\lambda = \frac{k \times 5000}{14.43} \sqrt{\frac{400}{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3}}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{A}}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{100 \times 50^3/12}{5000}} = 14.43$$

$\lambda = 0.0049 \times 1000$ 0.25

$C_r = 73.22\ kN$ 0.5

$$f_{amp} = \frac{1}{1 - \frac{C}{P_{cr}}}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{(KL)^2} \qquad k = 1$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3 \times 1.041 \cdot 10^6}{(5000)^2}$$

$$f_{amp} = \frac{1}{1 - \frac{54}{82.19}}$$

$P_{cr} = \cancel{82.19}\ kN$

inutile $M_z = 0$

$f_{amp} = \cancel{2.91}$

$$M_{rz} = \varphi \cdot S_z \cdot S_Y$$ Inutile

$$S_z = \frac{I_z}{y_z} = \frac{1.04 \cdot 10^6}{25}$$

$$S_z = 41640 \ mm^3$$

$$M_{rz} = 0.9 \cdot 41640 \cdot 400 = \cancel{14.99} \ kN \cdot m$$

$$M_{ry} = \varphi \cdot S_y \cdot S_Y \qquad S_y = \frac{I_y}{y} = 83\,333 \ mm^3$$

$$M_{ry} = 30 \ kN \cdot m$$ ✓ 0.5

$$f_{amp} = \frac{1}{1 - \frac{C}{P_{cr}}} \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 9.16 \cdot 10^6}{(0.7 \cdot 5000)^2}$$

$$P_{cr} = 670 \ kN$$ ✓ 0.5

0.5

$$f_{amp} = \frac{1}{1 - \frac{54}{670}} = 1.08$$ ✓ 0.5

Calcul de $M_{z\,max}$

$$\underline{M_{z\,max} = 0}$$ en effet!

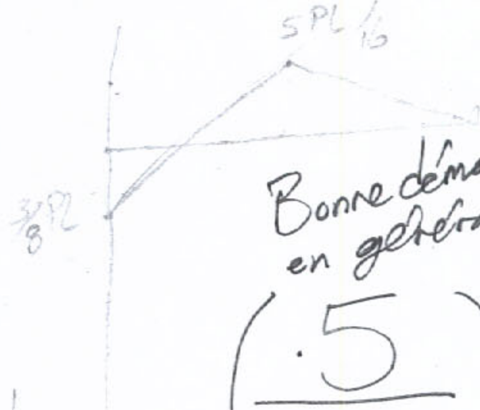
$M_{y\,max}$

$$M_{y\,max} = \frac{5PL}{16}$$

$$= \frac{5\times 16\times \overset{3}{2.5}}{16}$$

0.25

$$M_{y\,max} = \cancel{12.5}\ 15\ kN.m$$ X



X

finalement

α * 15 ⇐ 3/8 PL

22,5

$$\frac{54}{\cancel{73.22}} + \frac{\cancel{2.91\times 10}}{\cancel{14.99}} + \frac{1.08\ \cancel{15}}{30} \le 1$$

0.25

Cry ⇐ λ approprié

~~1.18~~ > 1 ABC ne resiste pas au flambement

erreur de calcul

Bonne démarche en général...

$$\left(\frac{.5}{6}\right)$$

$C_{ry} = ?$ XX

$\lambda_y = ?$ X

POUTRE CD

verification compression pure seulement

$$\frac{C}{C_r} = \frac{54}{73.22} = 0.73 < 1$$

0.25

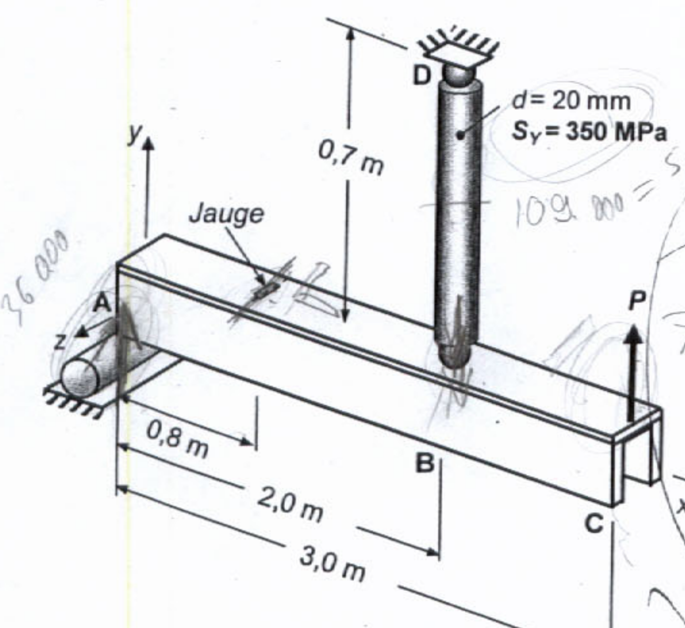
CD resiste au flambement

QUESTION 4 (6 points)

La figure a) illustre une poutre ABC qui est simplement supportée au point A et supportée au point B par une tige rotule-rotule BD (d = 20 mm) d'une longueur de 0,7 m. La poutre est chargée en C par une force P (selon le sens montré).

La poutre et la tige sont fabriquées d'un même acier (module de Young, E = **valeur inconnue**; coefficient de Poisson, ν = 0,3) dont le comportement est élastique-parfaitement plastique. La limite d'écoulement de la tige est de 350 MPa. La poutre est composée de deux plaques (voir fig. b) ayant également une limite d'écoulement de 350 MPa et d'une plaque (en gris) ayant été soumise à un traitement thermique pour élever sa limite d'écoulement à 525 MPa. Le second moment de surface de toute la section, I_z, est égal à 4,273 x 10^6 mm^4.

Une jauge est collée suivant la direction z, à 0,8 m de l'extrémité A (fig. a), au centre de la surface de la plaque (figures a et b). Au début de l'écoulement plastique de l'acier (c'est-à-dire lorsque $P = P_Y$), la lecture de la jauge est ε_a = 273,7 μm/m.



(Dessin pas à l'échelle)
Fig. a) Structure et chargement

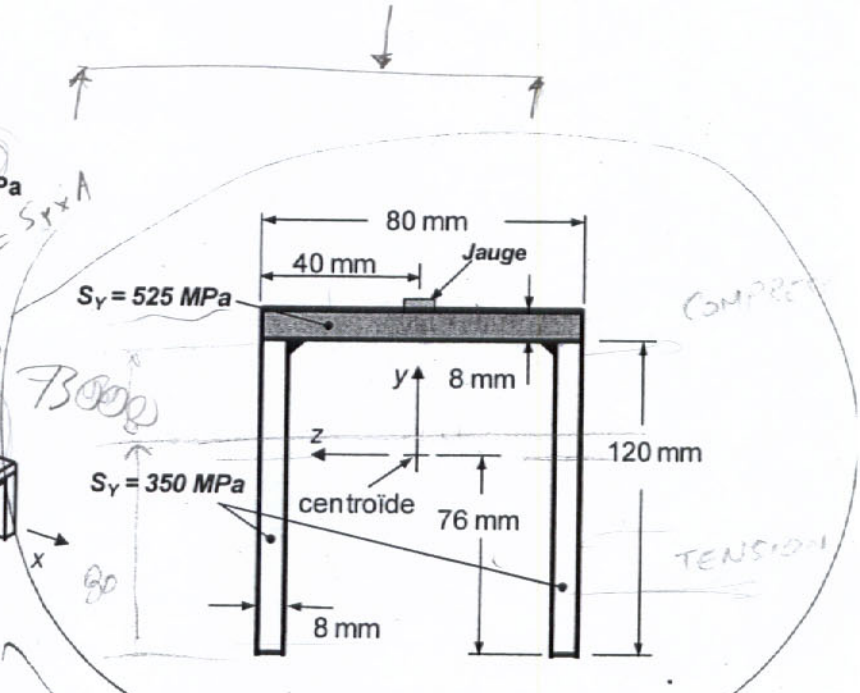
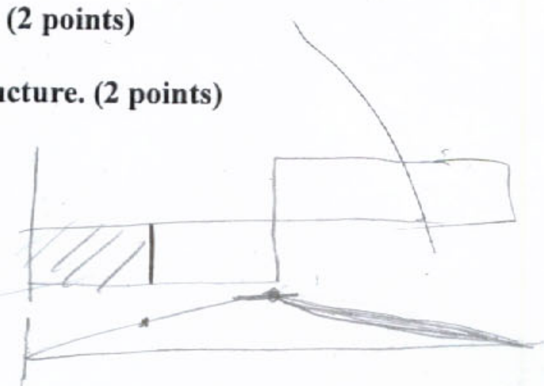


Fig. b) Section de la poutre ABC
I_z = 4,273 × 10^6 mm^4

a) Déterminez la valeur du module de Young de l'acier utilisé pour la tige et la poutre. (2 points)

b) Calculez le moment limite M_L de la poutre. (2 points)

c) Déterminez la charge limite P_L de cette structure. (2 points)

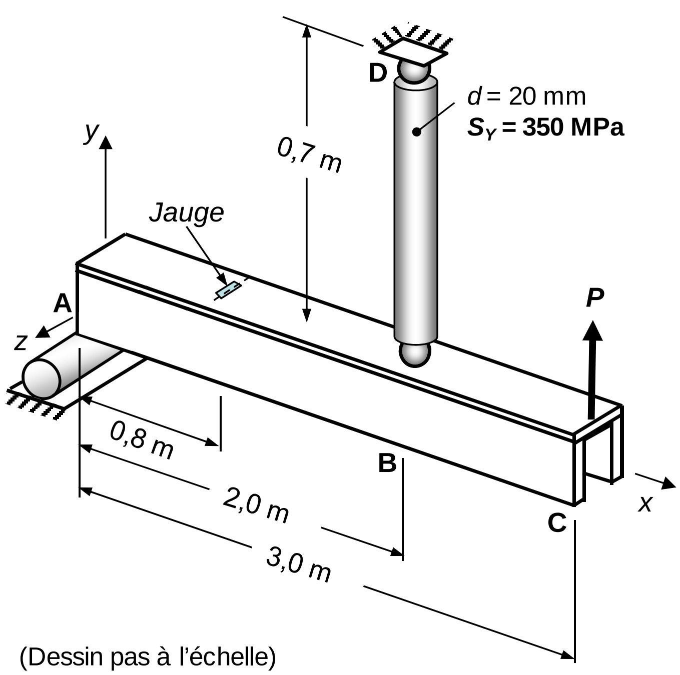


QUESTION 4 (6 points)

La figure a) illustre une poutre ABC qui est simplement supportée au point A et supportée au point B par une tige rotule-rotule BD (d = 20 mm) d'une longueur de 0,7 m. La poutre est chargée en C par une force P (selon le sens montré).

La poutre et la tige sont fabriquées d'un même acier (module de Young, E = **valeur inconnue**; coefficient de Poisson, ν = 0,3) dont le comportement est élastique-parfaitement plastique. La limite d'écoulement de la tige est de 350 MPa. La poutre est composée de deux plaques (voir fig. b) ayant également une limite d'écoulement de 350 MPa et d'une plaque (en gris) ayant été soumise à un traitement thermique pour élever sa limite d'écoulement à 525 MPa. Le second moment de surface de toute la section, I_z, est égal à 4,273 x 10^6 mm^4.

Une jauge est collée suivant la direction z, à 0,8 m de l'extrémité A (fig. a), au centre de la surface de la plaque (figures a et b). Au début de l'écoulement plastique de l'acier (c'est-à-dire lorsque $P = P_Y$), la lecture de la jauge est ε_a = 273,7 µm/m.



(Dessin pas à l'échelle)
Fig. a) Structure et chargement

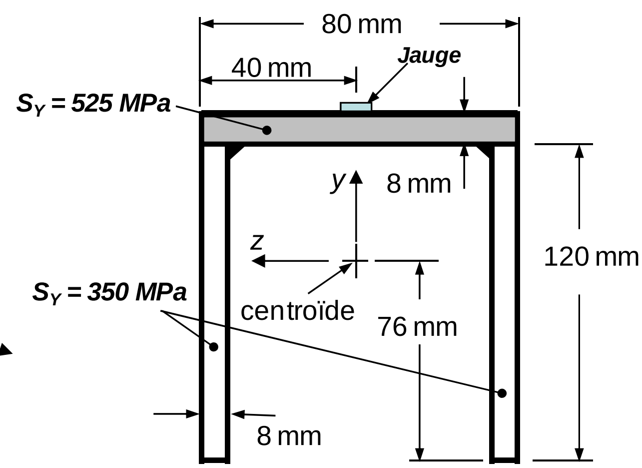


Fig. b) Section de la poutre ABC
$I_z = 4{,}273 \times 10^6$ mm^4

a) Déterminez la valeur du module de Young de l'acier utilisé pour la tige et la poutre. (2 points)

b) Calculez le moment limite M_L de la poutre. (2 points)

c) Déterminez la charge limite P_L de cette structure. (2 points)

a) P_Y = 19 678 N, ε_z = 273,68 µm/m, E = 210 GPa
b) M_L =36,6 kN.m , c) 3 mécanismes possibles, P_L = 22,1 kN

1 calcul de la contrainte interne lors de l'écoulement $P = P_Y$,

donc écoulement en premier pour $S_Y = 350$ MPa.

$\sigma_x = S_Y = 350$ MPa. à la fibre extrême inférieure

$$\sigma_x = \frac{M_z 76}{I_z} \Rightarrow M_z = \frac{350 \times 4.273 \cdot 10^6}{76}$$

$M_z = 19.678$ kN.m

σ_x au niveau de la jauge

$$\sigma_x = \frac{-M_z \cdot 44}{I_z} = \frac{19.678 \cdot 10^3 \cdot 44}{4.273 \cdot 10^6}$$

$\sigma_x = -202.6$ MPa compression

déformation mesurée par la jauge

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \qquad E = \frac{-\nu \sigma_x}{\varepsilon_z}$$

$$E = \frac{0.3 \cdot 202}{273.7 \cdot 10^{-6}} = \cancel{221} \text{ GPa}$$

diagramme V, M

1.5

b) Calcul de M_L

$$M_L = Z_z \cdot S_Y = Z_{z_1} \cdot S_{Y_1} + Z_{z_2} \cdot S_{Y_2}$$

$$Z_{z_1} = A_t \bar{Y}_t + A_c \bar{Y}_c$$

Axe neutre plastique

2 S_Y ≠ t

$$A_t = A_c = A/2 \qquad A_t = 2 \times y \times 8 = \frac{(120\times8\times2 + 80\times8)}{2}$$

$$y = \cancel{80} \text{ mm}$$

0.75

$$Z_{z_1} = 2(80\times8)\times40 + 2\times40\times8\times20$$

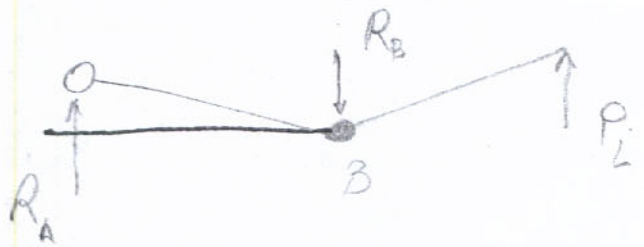
$$Z_{z_1} = 64\,000 \text{ mm}^3$$

$Q_{z_2} = 80 \times 8 \times 44 = 28160$

$M_L = 64000 \times 350 + 28160 \times 525$

$M_L = \cancel{37.184}$ kN.m (0.75)

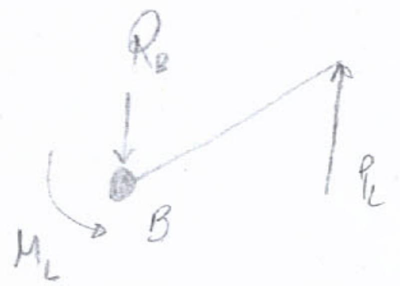
c) Calcul de la charge limite P_L.



$R_A + P_L = R_B$

$\sum M_{/B} = 0$

$P_L \cdot 1m = -M_L$



$P_L = 37.184$ kN (1)

$\left(\frac{4}{6}\right)$