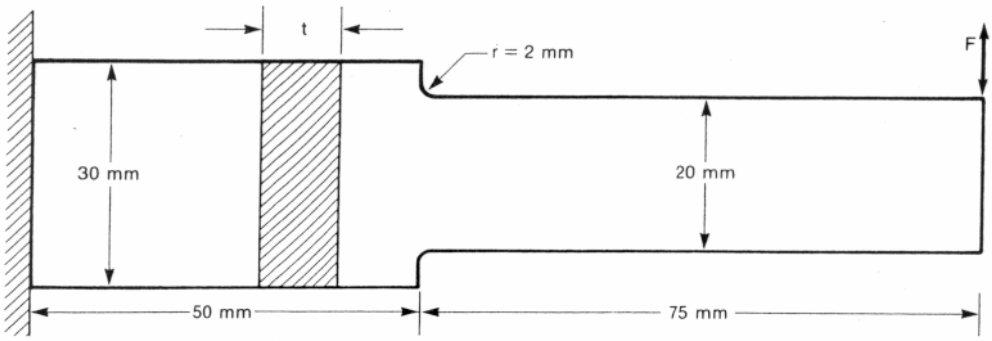
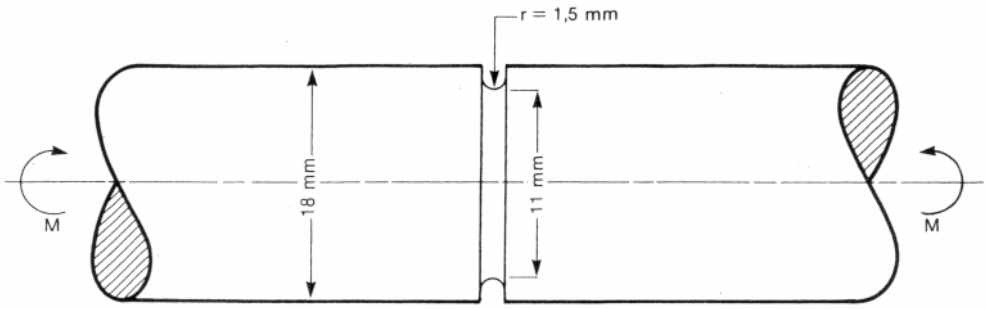
Cours MEC2400-Résistance des Matériaux
Exercices sur la Fatigue des matériaux
Tirés du Chapitre 5 du livre « Éléments de Machines»
G. Drouin, M. Gou , P. Thiry, R. Vinet, Editions de l'École Polytechnique,1986.

Chapitre 5

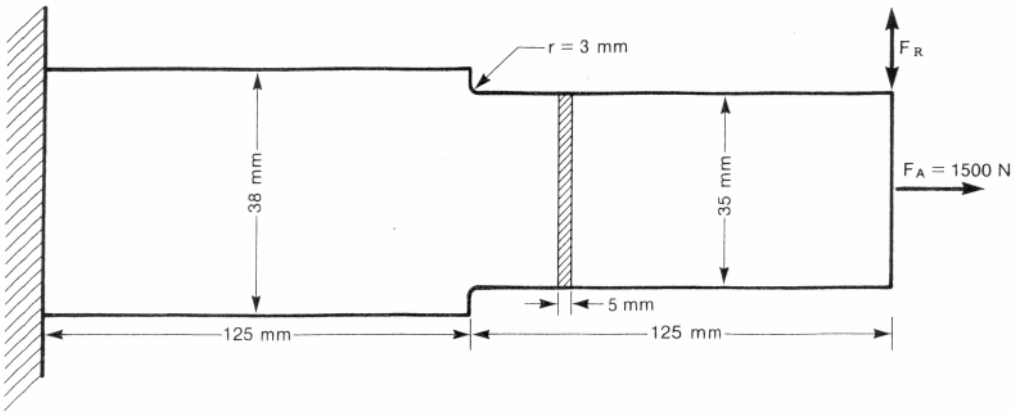
5.1 Une pièce faite d'acier UNS G 10150 étiré à froid est soumise à l'action alternée d'une force F de 500 N, ce qui engendre des contraintes alternées complètement renversées. Pour un facteur de sécurité égal à 2 et une fiabilité de 95 %, évaluer l'épaisseur nécessaire pour que la durée de vie de cette pièce soit infinie.



5.2 Un arbre est fait d'acier UNS G 92550 laminé à chaud et poli. Il tourne et il est soumis à l'action d'un moment fléchissant constant. Pour un facteur de sécurité égal à 2 et une durée de vie de 100 000 cycles, déterminer la valeur du moment maximal qu'on peut appliquer.



5.3 Une plaque usinée faite d'acier UNS G 10450 laminé à chaud est soumise à l'action d'une force variable complètement renversée F_R et d'une force constante F_A. Pour un facteur de sécurité égal à 2 et pour une durée de vie de 50 000 cycles, déterminer la valeur maximale de la force F_R qu'on peut appliquer.



5.4 L'analyse d'un réservoir sous pression a permis de déterminer, dans la zone la plus sollicitée, les valeurs suivantes des contraintes:

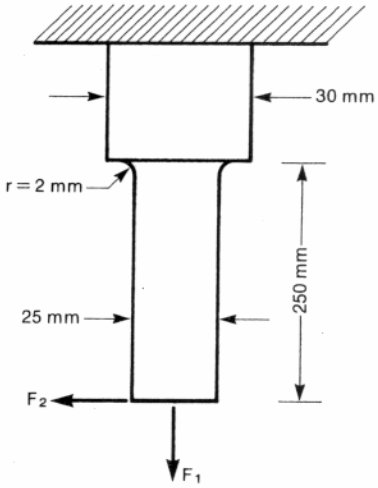
σ_x varie de 0 à 50 MPa;
σ_y varie de −10 à 35 MPa.

Le réservoir, fait d'acier UNS G 10100 laminé à chaud, a des parois épaisses de 25 mm. La température d'utilisation est de 300°C et le facteur théorique de concentration de contraintes est égal à 1,8, pour un rayon d'entaille de 6 mm. Pour un facteur de sécurité égal à 1,5, déterminer la durée de vie de ce réservoir.

5.5 Un barreau circulaire usiné est fait d'acier UNS G 31400 laminé à chaud. Il est soumis aux sollicitations suivantes:

F_1 = 40 kN;
F_2 = variable de 0 à 500 N.

Pour un facteur de sécurité égal à 2, déterminer la durée de vie de cette pièce en calculant les contraintes à l'épaulement.

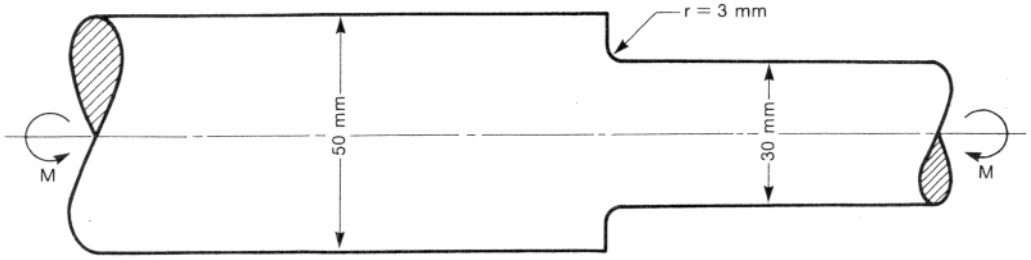


5.6 Un arbre usiné de 75 mm de diamètre, fait d'acier UNS G 41300 laminé à chaud, est soumis aux contraintes suivantes:

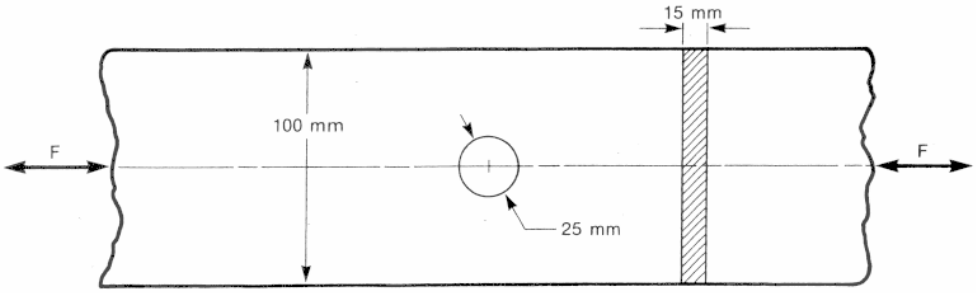
σ_x varie de −80 à 80 MPa;
σ_y = 0;
τ_{xy} varie de 10 à 20 MPa.

Pour un facteur théorique de concentration de contraintes K_t égal à 2,8 et un indice de sensibilité aux entailles q de 0,7, déterminer la valeur du facteur de sécurité pour que la durée de vie de cet arbre soit infinie.

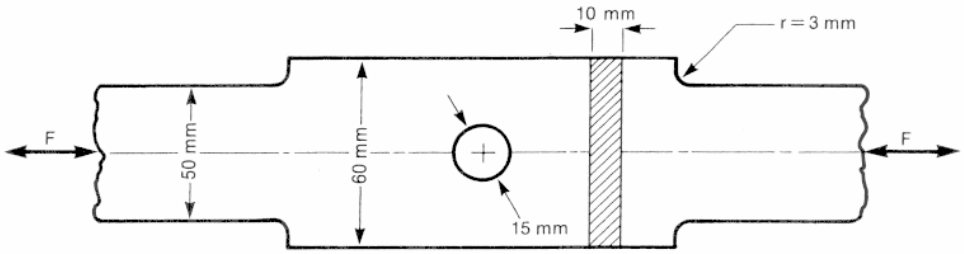
5.7 Une pièce tournée faite d'acier UNS G 10500 laminé à chaud est soumise à une contrainte de flexion complètement renversée de 200 MPa. Pour une température d'utilisation de 100°C, une fiabilité de 95 % et un facteur de sécurité égal à 2, déterminer la durée de vie de cette pièce.



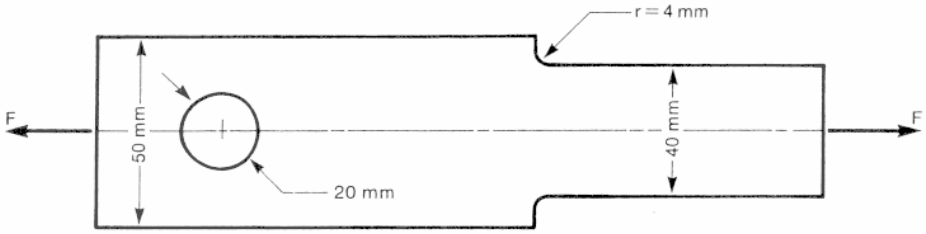
5.8 Une pièce meulée est soumise à un programme d'essais caractérisé par l'action d'une force axiale variant de 15 kN en tension à 75 kN en compression. Pour assurer une durée de vie infinie à la pièce, et pour un facteur de sécurité égal à 2, choisir un acier ordinaire au carbone.



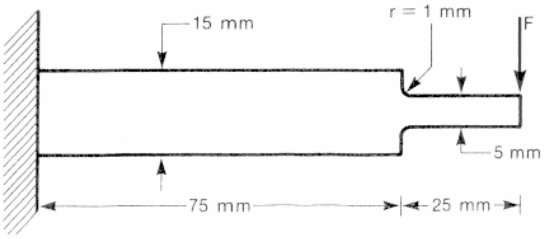
5.9 Une pièce meulée faite d'acier UNS G 10500 laminé à chaud est soumise à une charge axiale complètement renversée de 50 kN. Pour un facteur de sécurité égal à 2 et pour une fiabilité de 99 %, déterminer la durée de vie de cette pièce.



5.10 Une pièce usinée de 12 mm d'épaisseur faite d'acier UNS G 10100 étiré à froid est soumise à une force axiale de traction variant de 10 à 50 kN. Pour une fiabilité de 95 %, déterminer la valeur du facteur de sécurité pour que la durée de vie de cette pièce soit infinie.



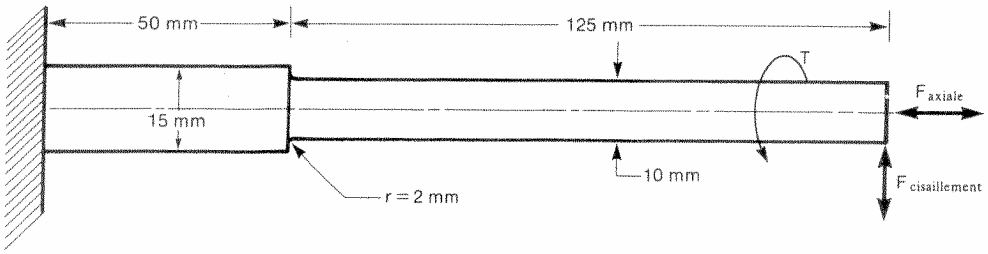
5.11 Une pièce usinée de 50 mm de large faite d'acier UNS G 10350 laminé à chaud est encastrée à une extrémité; son autre extrémité est soumise à une force verticale variant de 50 à 100 kN. Pour une température d'utilisation de 150°C et une fiabilité de 99 %, déterminer la valeur du facteur de sécurité pour que la durée de vie de cette pièce soit de 200 000 cycles.



5.12 Un arbre usiné fait d'acier UNS G 10400 étiré à froid est soumis à un état de contraintes complexes non complètement renversées engendré par les chargements suivants:

F axiale varie de 500 (compression) à 2500 N (tension);
F cisaillement varie de 25 (vers le haut) à 100 N (vers le bas);
T = 10 N•m (torsion).

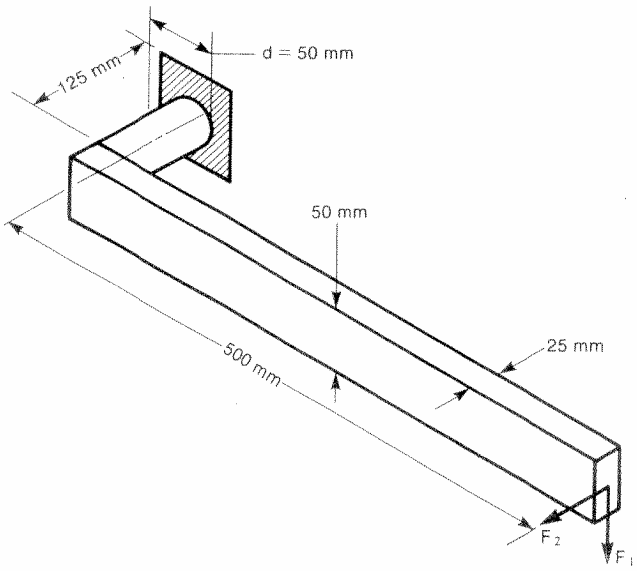
Pour une fiabilité de 95 %, déterminer la valeur du facteur de sécurité pour que la durée de vie de cet arbre soit de 200 000 cycles.



5.13 Une pièce forgée faite d'un alliage d'aluminium UNS A 92011 trempé (trempe T3) est soumise aux sollicitations suivantes:

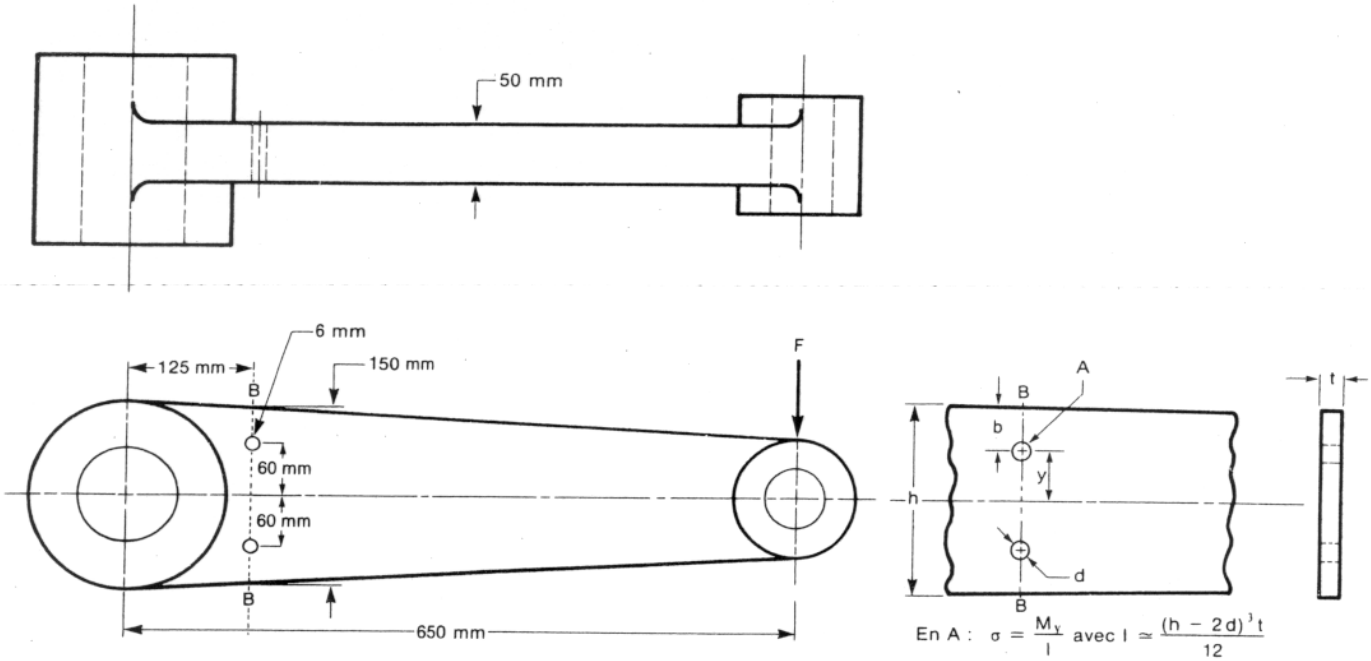
F_1 varie de 0 à 2 kN;
F_2 varie de 0 à 5 kN.

Pour un facteur théorique de concentration de contraintes K_t égal à 1,4, un rayon d'entaille de 2 mm à l'encastrement, un facteur de sécurité égal à 2 et une fiabilité de 99 %, déterminer la durée de vie de cette pièce.



5.14 Une bielle forgée faite d'acier UNS G 31400 étiré à froid est soumise à l'action d'une force F. La section B-B où sont percés les trous de 6 mm est la plus sollicitée.

Pour une température d'utilisation de 250° C, un facteur de sécurité égal à 2,5 et une fiabilité de 99,9 %, déterminer la valeur de la force F complètement renversée qu'on peut appliquer pour que la durée de vie de la bielle soit de 150 000 cycles. Pour évaluer l'effet des trous, étudier le cas d'une plaque équivalente percée d'un trou central et soumise à un chargement identique.



5.15 À sa section critique, une pièce (S_u = 690 MPa; S_e = 140 MPa, tous facteurs inclus) est soumise au programme d'essais suivant:

Condition	σ	N
1	−350 à +350 MPa	10 000 cycles
2	−275 à +275 MPa	——— cycles

Évaluer la durée de vie de cette pièce pour la condition 2, en utilisant:

a) la loi de Miner;

b) la méthode de Manson modifiée.

5.16 Une pièce d'acier ($S_u = 555$ MPa; $S_e = 75$ MPa, tous facteurs inclus) est soumise au programme d'essais suivant:

Condition	σ	N
1	−150 à +150 MPa	30 000 cycles
2	−100 à +100 MPa	100 000 cycles
3	−200 à +200 MPa	——— cycles

Évaluer la durée de vie de cette pièce pour la condition 3, en utilisant:
a) la loi de Miner;
b) la méthode de Manson modifiée.

5.17 Une pièce polie faite d'acier UNS G 10350 laminé à chaud est soumise au programme d'essais suivant:

Condition	σ	N
1	−150 à +150 MPa	25 000 cycles
2	−175 à +175 MPa	55 000 cycles
3	−100 à +100 MPa	——— cycles

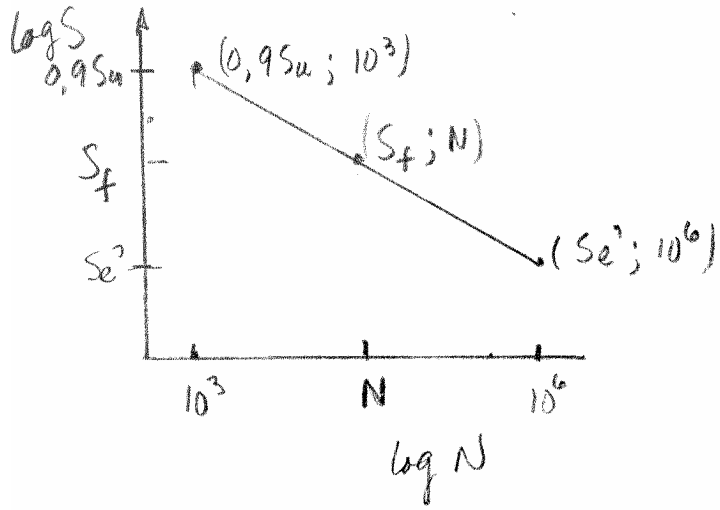
Pour un facteur théorique de concentration de contraintes K_t égal à 2,5, un rayon d'entaille de 3 mm et une fiabilité de 95 %, évaluer la durée de vie de cette pièce pour la condition 3.

5.18 À sa section critique, une pièce ($S_u = 690$ MPa; $S_e = 140$ MPa, tous facteurs inclus) est soumise durant 100 000 cycles à une contrainte complètement renversée de 120 MPa. Déterminer la valeur de la contrainte qu'il faut appliquer durant 50 000 cycles pour qu'il y ait rupture.

Fatigue - compléments à la section 5.3.2
livre "Éléments de machines"

Approximation de la courbe S-N dans la région de la vie finie, haut cyclage

I) Matériaux ferreux ($10^3 \leq N \leq 10^6$)



$$\text{pente} = m = \frac{\log Se' - \log 0{,}9 S_u}{\log 10^6 - \log 10^3}$$

$$= \frac{\log(Se'/0{,}9 S_u)}{6-3}$$

$$= \frac{1}{3} \log(Se'/0{,}9 S_u) \quad (\text{éq } 1)$$

$$m = \frac{\log S_f' - \log 0{,}9 S_u}{\log N - \log 10^3} = \frac{\log(S_f'/0{,}9 S_u)}{\log N - 3} \quad (\text{éq } 2)$$

$$(\text{éq } 1) = (\text{éq } 2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \log\left(\frac{Se'}{0{,}9 S_u}\right) = \frac{\log(S_f'/0{,}9 S_u)}{\log N - 3} \quad (\text{éq } 3)$$

$$\log N - 3 = 3 \frac{\log(S_f'/0{,}9 S_u)}{\log(Se'/0{,}9 S_u)} \quad (\text{éq } 4)$$

et finalement :

$$\log N = 3 + 3 \frac{\log(S_f'/0{,}9 S_u)}{\log(Se'/0{,}9 S_u)} = 3\left[1 + \frac{\log(S_f'/0{,}9 S_u)}{\log(Se'/0{,}9 S_u)}\right]$$

(éq 5.9 du livre É de M)

$$\log y = \log b + a \log x$$

$$y = b\, x^a$$

$$N = 1000\left(\frac{S_f'}{0{,}9 S_u}\right)^{3/\log(Se'/0{,}9 S_u)}$$

(éq 5.10 É de M)

(éq 3) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{3}\log\left(\frac{S_e'}{0,9\,S_u}\right) = \frac{\log\left(S_f'/0,9\,S_u\right)}{\log N - 3}$$

$$\frac{1}{3}\left(\log N - 3\right)\log\frac{S_e'}{0,9\,S_u} = \log\left(S_f'/0,9\,S_u\right)$$

$$a \quad \log x = \log y$$

$$y = x^a$$

$$\frac{S_f'}{0,9\,S_u} = \left(\frac{S_e'}{0,9\,S_u}\right)^{\frac{\log N - 3}{3}} \qquad \text{(éq 5,7 Éde M)}$$

II Pour les matériaux nm-ferreux ($10^3 \leq N \leq 5\times10^8$) de la même manière que pour les ferreux :

$$m = \frac{\log S_e' - \log 0,9\,S_u}{\log 5\times10^8 - \log 3} = \frac{1}{5,7}\log\left(S_e'/0,9\,S_u\right) \quad \text{(éq 5)}$$

(éq 2) $\Rightarrow$

$$m = \frac{\log\left(S_f'/0,9\,S_u\right)}{\log N - 3} \quad \text{(éq 6)}$$

(éq 5) = (éq 6) $\Rightarrow$

$$\log N - 3 = 5,7\,\frac{\log\left(S_f'/0,9\,S_u\right)}{\log\left(S_e'/0,9\,S_u\right)}$$

$$\log N = 3 + 5,7\,\frac{\log\left(S_f'/0,9\,S_u\right)}{\log\left(S_e'/0,9\,S_u\right)}$$

et $N = 1000\left(S_f'/0,9\,S_u\right)^{5,7/\log\left(S_e'/0,9\,S_u\right)}$

on obtient :

$$\frac{S_f'}{0,9\,S_u} = \left(\frac{S_e'}{0,9\,S_u}\right)^{\frac{\log N - 3}{5,7}}$$

Fatigue - Chap 5 - livre Eléments de Machines
Solutions de quelques exercices

5.1 • Matériau : UNS G 10150, étiré à froid
Tableau B.2, E de M : $S_u = 390$ MPa
$S_y = 320$ MPa
$\Rightarrow S_e' = 0{,}5 S_u = 195$ MPa.

• données : - vie infinie
- F.S. = 2,0
- Fiabilité : 95%

• question : $t = ?$

a) <u>Connection de S_e'</u>

$k_a = 0{,}88$ (usiné)

$k_b = 0{,}85$ (pièce en flexion, volume important)

$k_c = 0{,}868$ (fiabilité de 95%)

$k_d = 1{,}0$

$$k_e = \frac{1}{q(K_T - 1) + 1} = \frac{1}{0{,}7(1{,}8-1)+1} = \frac{1}{1{,}56} = 0{,}64$$

$r/d = 2/20 = 0{,}1$, $D/d = 30/20 = 1{,}5$ } $K_{TF} = 1{,}8$ (Fig C.6)

$q = 0{,}7$ (FIG 5.13)

$S_e = 0{,}88 \times 0{,}85 \times 0{,}868 \times 1 \times 0{,}64 \times 195$ MPa $= 81$ MPa

b) <u>Calcul des contraintes</u>

i) Au changement de section :

- $\sigma_{xa} = \dfrac{Mc}{I} = \dfrac{M\,h/2}{bh^3/12} = \dfrac{6M}{bh^2} = \dfrac{6 \times 500\,N \times 75\,mm}{(t)\,(20)^2\,mm^2}$

- $\sigma_{xa} = \dfrac{562{,}5}{t}$ MPa où t : mm

(note : on n'applique pas le τ sur la contrainte car a été appliqué sur Se)

- $\sigma_{ya} = \sigma_{za} = 0$
- à la fibre externe, aucune contrainte de cisail. $\tau_{xa} = \tau_{ya} = \tau_{za} = 0$
- aucune contrainte moyenne : $\sigma_{xm} = \sigma_{ym} = \sigma_{zm} = (\tau_{ij})_m = 0$

ii) A l'encastrement :

- $\sigma_{xa} = \dfrac{6 \times 500 \times 125\ (N.mm)}{b\,(30)^2} = \dfrac{416{,}7}{b}$ MPa

- $\sigma_{ya} = \sigma_{za} = (\tau_{ij})_a = \sigma_{xm} = \sigma_{ym} = \sigma_{zm} = (\tau_{ij})_m = 0$

- $(\sigma_{xa})_{encast} < (\sigma_{xa})_{chang\ section}$

- Puisque $(Se)_{encast} > (Se)_{chang\ de\ section}$ car Ke ne s'applique pas à l'encastrement.
  ⇒ Point critique : au changement de section

c) <u>Calcul de l'épaisseur au point critique</u>

$$F.S. = 2 = \frac{1}{\dfrac{\sigma_a}{Se} + \dfrac{\sigma_m}{Su}} \quad \Big\| \quad \text{où } \sigma_a = \sigma_{xa},\ \sigma_m = 0$$

$$\sigma_a = \frac{Se}{2} = \frac{81}{2}\ MPa = 40{,}5\ MPa = \frac{562{,}5}{t}\ MPa \quad (t : mm)$$

$$t = \frac{562{,}5}{40{,}5} = 13{,}89\ mm \simeq \boxed{14\ mm\ :\ REP}$$

F.S à l'écoulement : $F.S = S_Y/\sigma_a = \dfrac{320\ MPa}{40{,}5\ MPa} = 7{,}9$

5.2 – Arbre en acier UNS G 92550, laminé à chaud et poli

– $M = ?$; arbre tourne ; $N = 100\,000$ cycles

– F.S = 2

Tableau B.2 : $S_u = 790$ MPa ; $S_y = 540$ MPa

$S_e' = 0{,}5 \times 790$ MPa $= 395$ MPa

a) Correction de S_e' :

$k_a = 1{,}0$ (poli) ; $k_b = 0{,}85$ (flexion ; $7 \leq d \leq 50$ mm)

$k_c = 0{,}868$ (on choisit 95% de fiabilité même si pas spécifié)

$k_d = 1{,}0$

$$k_e = \frac{1}{0{,}8(1{,}85-1)+1} = 0{,}595$$

$\frac{D}{d} = \frac{18}{11} = 1{,}64$

$\frac{r}{d} = \frac{1{,}5}{11} = 0{,}14$

fig C.14 : $K_T = 1{,}85$

$k_f = 1{,}0$

$S_e = 0{,}85 \times 0{,}868 \times 0{,}595 \times 395$ MPa $= 173$ MPa

b) Analyse des contraintes :

- L'arbre tourne et M est constant $\Rightarrow \sigma_{xa} = \frac{Mc}{I}$

et toutes les autres contraintes sont nulles :

$\sigma_{\theta a} = \sigma_{ra} = \tau_{ija} = 0$ et $\sigma_{xm} = \sigma_{\theta m} = \sigma_{rm} = \tau_{ijm} = 0$

- contrainte équivalente pour $N = 100\,000$?

$$S_f = 0{,}9 S_u \left(\frac{S_e}{0{,}9 S_u}\right)^{\frac{1}{3}(\log N - 3)}$$ (pour mat. ferreux)

$$S_f = 0{,}9 \times 790 \left(\frac{173}{0{,}9 \times 790}\right)^{\frac{1}{3}[(\log 100\,000) - 3]} = 277 \text{ MPa}$$

$$F.S = 2 = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_f} + \cancel{\frac{\sigma_m}{S_u}}^{\,0}}$$

où $\sigma_m = 0$

$$\sigma_a = \sigma_{xa} = \frac{Mr}{\pi r^4/4} = \frac{4M}{r^3}$$

$$\sigma_a = \frac{S_f}{2} = \frac{277\ MPa}{2} = \frac{4M}{\pi(5,5)^3}$$

où $r = 11/2$ mm

$$M = 18,1 \times 10^3\ N.mm = \boxed{18,1\ N.m \quad : RÉP}$$

. Ecoulement : $FS = \frac{S_y}{\sigma_{xa}} = \frac{320\ MPa}{277/2\ MPa} = 2,31$

5.3 • Plaque usinée acier UNS G 10450 laminé à chaud

• $FS = 2$; $N = 50\,000$ cycles

• F_r complètement renversée ; F_a constante

$S_u = 570\ MPa$; $S_y = 310\ MPa$

$S_e' = 0{,}5 \times 570\ MPa = 285\ MPa$

a) <u>Correction de S_e'</u>

$k_a = 0{,}6$ (laminé à chaud) ; $k_b = 0{,}85$

$k_c = 1{,}0$; $k_d = 1{,}0$

k_e :

$D/d = \frac{38}{35} = 1{,}08$; $\frac{r}{d} = \frac{3}{35} = 0{,}0857$ $\left\{ \begin{array}{l} K_{T\,Flexion} = 1{,}65 \\ (\text{fig. C.6}) \\ K_{T\,TRACTION} = 1{,}63 \\ (\text{fig C.5}) \end{array} \right.$

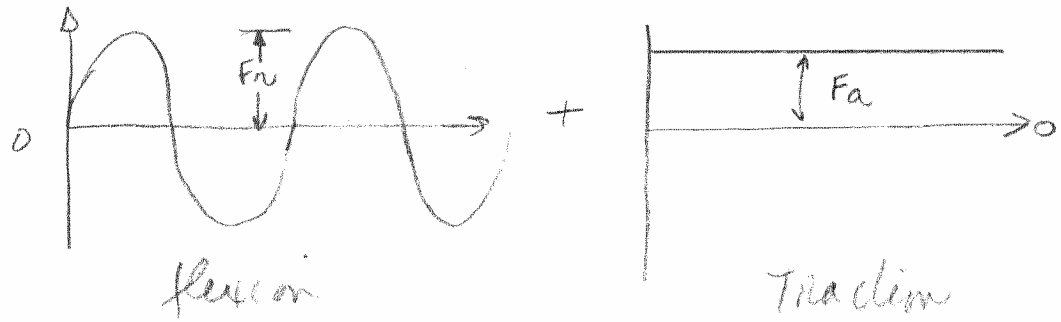
nous prendrons la plus grande valeur de K_T pour corriger la limite d'endurance

$$k_e = \frac{1}{0{,}85(1{,}65-1)+1} = 0{,}64$$

$S_e = 0{,}6 \times 0{,}85 \times 0{,}64 \times 285 = 93\ MPa$

b) Analyse des contraintes

$F_r \Rightarrow$ flexion complètement renversée
$F_a \Rightarrow$ traction constante



$F_r \rightarrow \sigma_{xa}$

$F_a \rightarrow \sigma_{xm}$

i) Au changement de section :

- $\sigma_{xa} = \dfrac{Mc}{I} = \dfrac{F_r \times 125 \times 35/2}{(5)\,(35)^3/12} = 122{,}45 \times 10^{-3}\, F_r$ (MPa)

  (F_r : N)

- $\sigma_{x\,m} = \dfrac{F_a}{(35 \times 5)\ mm^2} = \dfrac{1500\ N}{35 \times 5\ mm^2} = 8{,}6$ MPa

- Toutes les autres contraintes sont nulles :
  $\sigma_{ya} = \sigma_{za} = \tau_{ija} = \sigma_{ym} = \sigma_{zm} = \tau_{ijm} = 0$

- Calcul de la contrainte équiv pour $N = 50\,000$

$$S_f = 0{,}9 S_u \left(\frac{S_e}{0{,}9 S_u}\right)^{\frac{1}{3}(\log N - 3)} \qquad \text{(pour mat. ferreux)}$$

$$= 0{,}9 \times 570 \left(\frac{93}{0{,}9 \times 570}\right)^{\frac{1}{3}[\log(50\,000) - 3]} = 195 \text{ MPa}$$

- $FS = \dfrac{1}{\dfrac{\sigma_a}{S_f} + \dfrac{\sigma_m}{S_u}} \Rightarrow \sigma_a = \left(1 - FS\dfrac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)\dfrac{S_f}{FS} = \left(1 - \dfrac{2 \times 8{,}6}{570}\right)\dfrac{195}{2}$

  $\sigma_a = 94{,}6$ MPa

- $\sigma_{xa} = \sigma_a = 94{,}6$ MPa $= 122{,}45 \times 10^{-3} F_r \Rightarrow F_r = 772$ N

- Ecoulement : $FS = \dfrac{S_y}{\sigma_{xa} + \sigma_{xm}} = \dfrac{310\ MPa}{(94{,}6 + 8{,}6)\ MPa} = 3{,}0$

ii) A l'encastrement

On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de concentration de contrainte à l'encastrement ($K_e = 1$)

$S_e = 0{,}6 \times 0{,}85 \times 285$ MPa $= 145$ MPa

- $\sigma_{xa} = \dfrac{Mc}{I} = \dfrac{F_r\,(125+125)\;38/2}{5\times(38)^3/12} = 207{,}7\times10^{-3}F_r$ (MPa)
  (F_r : N)

- $\sigma_{xm} = \dfrac{1500\ N}{(5\times38)\ mm^2} = 7{,}9\ MPa$

- $S_f = 0{,}9\,S_u\left(\dfrac{S_e}{0{,}9S_u}\right)^{\frac{1}{3}(\log N-3)}$

  $= 0{,}9\times570\left(\dfrac{145}{0{,}9\times570}\right)^{\frac{1}{3}[\log(50000)-3]} = 251\ MPa$

- $\sigma_a = \left(1-\dfrac{FS\,\sigma_m}{\sigma_u}\right)\dfrac{S_f}{FS} = \left(1-\dfrac{2\times7{,}9}{570}\right)\dfrac{251}{2} = 122\ MPa$

- $\sigma_{xa} = 122\ MPa = 207{,}7\times10^{-3}F_r \Rightarrow \boxed{F_r = 587{,}5\ N}$

- Ecoulement : $FS = \dfrac{S_y}{\sigma_{xa}+\sigma_{xm}} = \dfrac{310\ MPa}{(122+7{,}9)\ MPa} = 2{,}39$

5.4 Réservoir sous pression - acier UNS G 10100 laminé à chaud ; T° op. : 300°C ; $K_T = 1,8$
ray. entaille : 6 mm ; $FS = 1,5$
épaisseur paroi = 25 mm
σ_x : 0 à 50 MPa on demande N ?
σ_y : -10 à 35 MPa

IMPORTANT : état de contraintes biaxial ; pour être conséquent avec la notation classique des réservoirs sous pression, nous posons :
σ_θ : 0 à 50 MPa
σ_x : -10 à 35 MPa

a) <u>Connection de Se'</u>

$S_u = 320$ MPa ; $S_y = 180$ MPa ;

$S_e' = 0,5\ S_u = 0,5 \times 320$ MPa $= 160$ MPa

$K_a = 0,7$ (laminé à chaud)
$K_b = 0,75$ (cylindre long, épaisseur paroi 25 mm)
$K_c = 1,0$ (hypothèse : fiabilité de 50%)
$K_d = \dfrac{344}{273 + 300} = 0,6$

$\times(0,8)+1 = 1,666$

$$K_e = \frac{1}{0,75(1,8-1)+1} = 0,625$$

$K_f = 1,0$

$S_e = 0,7 \times 0,75 \times 0,6 \times 0,625 \times 160$ MPa $= 31,5$ MPa

b) Analyse des contraintes :

- $\sigma_{\theta a} = \dfrac{\sigma_{\theta max} - \sigma_{\theta min}}{2} = \left(\dfrac{50-0}{2}\right)$ MPa $= 25$ MPa

- $\sigma_{\theta m} = \dfrac{\sigma_{\theta max} + \sigma_{\theta min}}{2} = \left(\dfrac{50+0}{2}\right)$ MPa $= 25$ MPa

- $\sigma_{xa} = \dfrac{35-(-10)}{2}\ MPa = 22{,}5\ MPa$

- $\sigma_{xm} = \dfrac{35+(-10)}{2}\ MPa = 12{,}5\ MPa$

- $\sigma_{ra} = 0$; $\tau_{x\theta a} = \tau_{xra} = \tau_{r\theta a} = 0$

- $\sigma_{rm} = 0$; $\tau_{x\theta m} = \tau_{xrm} = \tau_{r\theta m} = 0$

- Calcul de σ_a' et σ_m' (contraintes éq. de Von Mises)

$$\sigma_a' = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{\theta a}-\sigma_{xa})^2+(\sigma_{xa}-\sigma_{ra})^2+(\sigma_{ra}-\sigma_{\theta a})^2\right]+3(\tau_{x\theta a}^2+\tau_{xra}^2+\tau_{r\theta a}^2)}$$

$$\sigma_a' = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{\theta a}-\sigma_{xa})^2+(\sigma_{xa}-0)^2+(0-\sigma_{\theta a})^2\right]+3(0)}$$

$$\sigma_a' = \sqrt{\sigma_{\theta a}^2+\sigma_{xa}^2-\sigma_{\theta a}\sigma_{xa}} = \sqrt{25^2+22{,}5^2-25\times 22{,}5}$$

$$\sigma_a' = 23{,}85\ MPa$$

$$\sigma_m' = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{\theta m}-\sigma_{xm})^2+(\sigma_{xm}-\sigma_{rm})^2+(\sigma_{rm}-\sigma_{\theta m})^2\right]+3(\tau_{x\theta m}^2+\tau_{xrm}^2+\tau_{r\theta m}^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(25-12{,}5)^2+(12{,}5-0)^2+(0-25)^2+3(0)}$$

$$\sigma_m' = 21{,}65\ MPa$$

c) Calcul de la vie avec $FS = 1{,}5$

$$FS = \frac{1}{\dfrac{\sigma_a'}{S_f}+\dfrac{\sigma_m'}{S_u}} \Rightarrow S_f = \frac{FS\,\sigma_a'}{1-\dfrac{FS\,\sigma_m'}{S_u}} = \frac{1{,}5\times 23{,}85}{1-\dfrac{1{,}5\times 21{,}65}{320}}$$

$$= 39{,}8\ MPa$$

$$N = 1000\left(\frac{S_f}{0{,}9S_u}\right)^{\frac{3}{\log(S_e/0{,}9S_u)}} = 1000\left(\frac{39{,}8}{0{,}9\times 320}\right)^{\frac{3}{\log(31{,}5/0{,}9\times 320)}}$$

$$\boxed{\text{Rép} = N = 481\,884 \text{ cycles}}$$

5.6 Arbre usiné ; 75 mm dia ; acier UNS G41300 lam. ch. $K_T = 2,8$; $q = 0,7$. On demande FS pour une vie infinie sous le changement suivant :

σ_x : de -80 à $+80$ MPa (arbre en flexion rotative)
et
$\tau_{xy} = \tau_{x\theta}$: 10 à 20 MPa (couple en torsion variable)

a) <u>Connection de Se'</u>

$S_u = 620$ MPa ; $S_y = 410$ MPa.

$S_e' = 0,5 \times 620$ MPa $= 310$ MPa

$K_a = 0,57$ (laminé à chaud) ; $K_b = 0,75$ ($d > 50$ mm)
$K_c = 1,0$; $K_d = 1,0$; $K_f = 1,0$

$$K_e = \frac{1}{0,7(2,8-1)+1} = 0,44$$

$S_e = 0,57 \times 0,75 \times 0,44 \times 310$ MPa $= 59$ MPa

b) Analyse des contraintes

- $\sigma_{xa} = \dfrac{\sigma_{x\,max} - \sigma_{x\,min}}{2} = \dfrac{80-(-80)}{2} = 80$ MPa
- $\sigma_{xm} = \dfrac{\sigma_{x\,max} + \sigma_{x\,min}}{2} = \dfrac{80-80}{2} = 0$

car contrainte complètement renversée

- $\tau_{x\theta a} = \left(\dfrac{20-10}{2}\right)$ MPa $= 5$ MPa
- $\tau_{x\theta m} = \left(\dfrac{20+10}{2}\right)$ MPa $= 15$ MPa

- $\sigma_{ra} = 0$; $\tau_{r\theta a} = \tau_{xra} = 0$
- $\sigma_{rm} = 0$; $\tau_{r\theta m} = \tau_{xrm} = 0$

• Calcul de σ_a' et σ_m' :

$$\sigma_a' = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{xa}-\cancelto{0}{\sigma_{\theta a}})^2 + (\cancelto{0}{\sigma_{\theta a}}-\cancelto{0}{\sigma_{ra}})^2 + (\cancelto{0}{\sigma_{ra}}-\sigma_{xa})^2\right] + 3(\tau_{x\theta a}^2 + \cancelto{0}{\tau_{r\theta a}^2} + \cancelto{0}{\tau_{xra}^2})}$$

$$\sigma_a' = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{x\theta a}^2} = \sqrt{80^2 + 3\times 5^2} = 80{,}5\ MPa$$

$$\sigma_m' = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\cancelto{0}{\sigma_{xm}}-\cancelto{0}{\sigma_{\theta m}})^2 + (\cancelto{0}{\sigma_{\theta m}}-\cancelto{0}{\sigma_{rm}})^2 + (\cancelto{0}{\sigma_{rm}}-\cancelto{0}{\sigma_{xm}})^2 + 3(\tau_{x\theta m}^2 + \cancelto{0}{\tau_{r\theta m}^2} + \cancelto{0}{\tau_{xrm}^2})\right]}$$

$$\sigma_m' = \sqrt{3\tau_{x\theta m}^2} = \tau_{x\theta m}\sqrt{3} = 15\sqrt{3} = 26\ MPa$$

c) Calcul du FS pour une vie infinie :

• $$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a'}{S_e} + \frac{\sigma_m'}{S_u}} = \frac{1}{\frac{80{,}5}{59} + \frac{26}{620}} = 0{,}71 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{la vie ne peut être infinie}}$

Calculons la vie pour un FS = 1

$$1 = \frac{1}{\frac{\sigma_a'}{S_f} + \frac{\sigma_m'}{S_u}} \Rightarrow S_f = \frac{\sigma_a'}{1-\frac{\sigma_m'}{S_u}} = \frac{80{,}5}{1-\frac{26}{620}} = 84\ MPa$$

$$N = 1000\left(\frac{84}{0{,}9\times 620}\right)^{\frac{3}{\log(59/0{,}9\times 620)}} = 337\,516 \text{ cycles}$$

note : le facteur de sécurité à l'écoulement n'a pas été calculé. Pour le calculer, considérez les valeurs maximales du chargement, calculez les contraintes principales et appliquez TRESCA ou Mises

5.12 Arbre usiné, acier UNS G10400, étiré à froid, fiabilité : 95% ; on demande FS si N = 200 000 pour chargement :

- F axiale : −500 à 2500 N
- F verticale : 25 N vers le haut à 100 N vers le bas
- T = 10 N.m (constant)

$S_u = 590$ MPa
$S_y = 490$ MPa
$S_e' = 0{,}5\,S_u$
$= 0{,}5 \times 590\,MPa = 295\,MPa$

a) Correction de S_e'

i) $K_a = 0{,}75$ (usiné) ; $K_b = 0{,}85$ ($7{,}6 \le d \le 50$ mm)
$K_c = 0{,}868$ (95% fiab.) $K_d = 1{,}0$; $K_f = 1{,}0$.

$$K_e : \frac{1}{0{,}8(1{,}55-1)+1} = 0{,}69$$

$\frac{D}{d} = \frac{15}{10}$; $\frac{r}{d} = \frac{2}{10}$

$K_{TT} = 1{,}55$ (fig C.7)
$K_{TF} = 1{,}44$ (fig C9)
$K_{TS} = 1{,}25$ (fig C8)

Nous choisissons le + grand

au changement de section :

$S_e = 0{,}75 \times 0{,}85 \times 0{,}868 \times 0{,}69 \times 295\,MPa = 113\,MPa$

ii) à l'encastrement :

- $K_e = 1$ (aucune conc. de contrainte)
- les autres facteurs demeurent identiques à ceux en i) :

$S_e = 0{,}75 \times 0{,}85 \times 0{,}868 \times 295\,MPa = 163\,MPa$

b) Calcul des contraintes

i) Au changement de section :

On suppose les chargements en phase :

- $\sigma_{x\,max} = (\sigma_{x\,TRACTION} + \sigma_{x\,FLEXIO})_{MAX}$

$$= \frac{2500\,N}{\pi(5)^2} + \frac{100\,N \times 125\,mm \times 5\,mm}{\pi(5)^4/4}$$

$\sigma_{x\,max} = 31{,}8\,MPa + 127{,}3\,MPa = 159{,}1\,MPa$

• $\sigma_{x\,min} = \left(\sigma_{x\,TRACTION} + \sigma_{x\,FLEX}\right)_{min}$

$$= -\frac{500}{\pi(5)^2} - \frac{25 \times 125 \times 5}{\pi(5)^4/4} \quad (MPa)$$

$$\sigma_{x\,min} = -6,37 - 31,83 \ (MPa) = -38,2\ MPa$$

• $\tau_{x\theta} = \frac{T.r}{J} = \frac{10 \times 10^3 N.mm \times 5}{\pi(5)^4/2} = 50,9\ MPa = cte$

• $\sigma_{xa} = \frac{\sigma_{x\,max} - \sigma_{x\,min}}{2} = \frac{159,1 - (-38,2)}{2}\ MPa = 98,7\ MPa$

• $\sigma_{xm} = \frac{\sigma_{x\,max} + \sigma_{x\,min}}{2} = \frac{159,1 + (-38,2)}{2}\ MPa = 60,5\ MPa$

• $\tau_{x\theta a} = 0$ et $\tau_{x\theta m} = 50,9\ MPa$.

De plus : $\sigma_{\theta a} = \sigma_{ra} = \tau_{xra} = \tau_{\theta ra} = 0$

$\sigma_{\theta m} = \sigma_{rm} = \tau_{xrm} = \tau_{\theta rm} = 0$

$\sigma_a' = \sqrt{\sigma_{xa}^2} = \sigma_{xa} = 98,7\ MPa$ (voir solution de 5.6 pour formules complètes)

$\sigma_m' = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + 3\tau_{\theta xm}^2}$

$= \sqrt{60,5^2 + 3 \times 50,9^2} = 106,9\ MPa$

ii) à l'encastrement :

• $\sigma_{x\,max} = \frac{2500\,N}{\pi(7,5)^2} + \frac{100\,N \times 175\,mm \times 7,5\,mm}{\pi(7,5)^4/4\ mm^4} =$

$= 14,14\ MPa + 52,82\ MPa = 67\ MPa$

• $\sigma_{x\,min} = \frac{-500}{\pi(7,5)^2}(MPa) - \frac{25 \times 175 \times 7,5}{\pi(7,5)^4/4}(MPa) =$

$-2,8\ MPa - 13,20\ MPa = -16\ MPa$

$$\tau_{x\theta} = \frac{10\times10^3 N.mm \times 7,5 mm}{\pi (7,5)^4/2 \ mm^4} = 15,1 \ MPa = cte$$

- $\sigma_{xa} = \dfrac{\sigma_{x\,max} - \sigma_{x\,min}}{2} = \dfrac{67-(-16)}{2}(MPa) = 41,5 \ MPa$

- $\sigma_{xm} = \dfrac{\sigma_{x\,max} + \sigma_{x\,min}}{2} = \dfrac{67-16}{2}(MPa) = 25,5 \ MPa$

- $\tau_{x\theta a} = 0$; $\tau_{x\theta m} = 15,1 \ MPa$

- Toutes les autres composantes de contraintes sont nulles à l'encastrement

- $\sigma_a' = \sigma_{xa} = 41,5 \ MPa$

- $\sigma_m' = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + 3\tau_{\theta xm}^2} = \sqrt{25,5^2 + 3(15,1)^2} = 36,5 \ MPa$

c) <u>Calcul du FS pour N = 200 000</u>

i) au changement de section :

$$S_f = 0,9 \ S_u \left(\frac{S_e}{0,9 S_u}\right)^{\frac{1}{3}(\log N - 3)} = 0,9\times590\left(\frac{113}{0,9\times590}\right)^{\frac{1}{3}(\log 200000 - 3)}$$

$S_f = 162 \ MPa$

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a'}{S_f} + \frac{\sigma_m'}{S_u}} = \frac{1}{\frac{98,7}{162} + \frac{106,9}{590}} = 1,27$$

. pour l'écoulement : voir note, exercice 5.6

ii) à l'encastrement :

$$S_f = 0,9\times590\left(\frac{163}{0,9\times590}\right)^{\frac{1}{3}(\log 200000 - 3)} = 215 \ MPa$$

$$FS = \frac{1}{\frac{41,5}{215} + \frac{36,5}{590}} = 3,92$$

. pour écoulement : voir note exercice 5.6