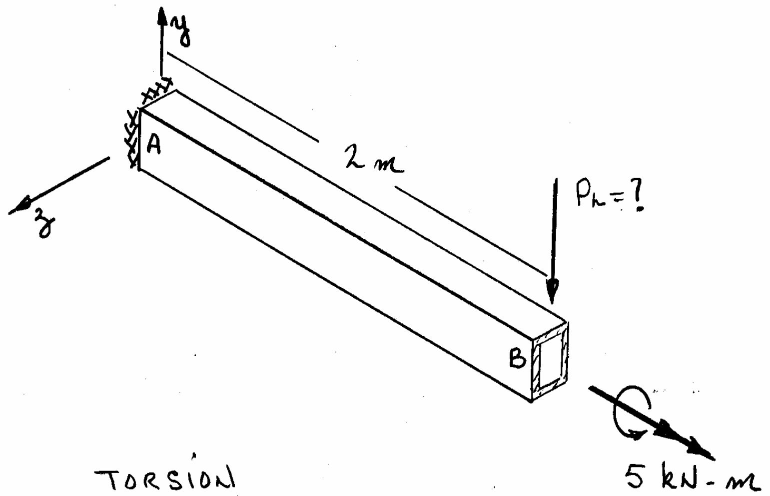
Chapitre 12- Analyse Limite- Flexion et torsion superposées

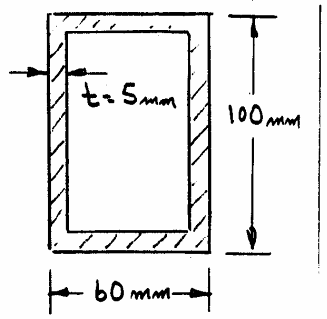
La figure illustre en isométrique un tube AB de section rectangulaire qui est encastré à son extrémité A et qui supporte à son autre extrémité une charge verticale P_L de même qu'un moment de torsion T = 5 kN-m. Le matériau du tube est un acier ayant un comportement élastique parfaitement plastique.

En utilisant le critère de Tresca, déterminez la charge limite P_L qui provoquera l'effondrement de cette structure.

Propriétés du matériau

$E = 200 \times 10^3$ Mpa
$\nu = 0.3$
$S_Y = 300$ Mpa





$A = 1500$ mm²

$\bar{A} = 5225$ mm²

$I_z = 1.963 \times 10^6$ mm⁴

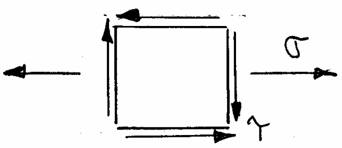
$S_z = 39.25 \times 10^3$ mm³

$Z_z = 48.75 \times 10^3$ mm³

TORSION

$$\tau_{xA} = \frac{T}{2\bar{A}t} = \frac{5\times10^6}{2\times5225\times5} = 95.7 \text{ MPa}$$ CONSTANTE SUR L'ÉPAISSEUR

CALCUL DE σ_P POUR PLASTIFICATION



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \qquad \sigma_3 = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{S_Y}{2}$$

$$\sqrt{\sigma_p^2 + (2\tau)^2} = S_Y \rightarrow \boxed{\sigma_p = \sqrt{S_Y^2 - (2\tau)^2}}$$

$$\sigma_p = \sqrt{300^2 - (2\times95.7)^2}$$

$$\sigma_p = 231 \text{ MPa}$$

CHARGE LIMITE

$$M_L = 2m\, P_L = Z_z \sigma_p \rightarrow P_L = \frac{48.75\times10^3 \times 231}{2\times10^3}$$

$$\boxed{P_L = 5.63 \text{ kN}}$$

Pour début d'écoulement

$$\tau_{xs} = 95.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{2000\, P_L}{S_z} = \frac{2000\, P_L}{39.25 \times 10^3} = 0.051\, P_L$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \leq \frac{S_Y}{2}$$

$$\sqrt{\sigma^2 + (2\tau)^2} < S_Y$$

$$\sigma^2 = S_Y^2 - (2\tau)^2$$

$$\sigma = \sqrt{S_Y^2 - (2\tau)^2}$$

$$0.051\, P_L = \sqrt{300^2 - (2 \times 95.7)^2}$$

$$P_L = 4.53 \text{ kN}.$$

La figure (a) illustre en isométrique une structure composée d'une poutre ABC encastrée à son extrémité A et relié rigidement en C à une autre poutre DCE encastrée à ses deux extrémités et simplement supportée verticalement au point C. Les deux poutres ABC et DCE ont la même section tubulaire illustrée sur la figure (b) avec un module plastique $Z = 48.75 \times 10^3$ mm³. Le matériau de la poutre peut être idéalisé comme étant élastique parfaitement plastique et son point d'écoulement est $S_Y = 300$ MPa.

Déterminez la charge limite P_L qui provoquera l'effondrement de cette structure.

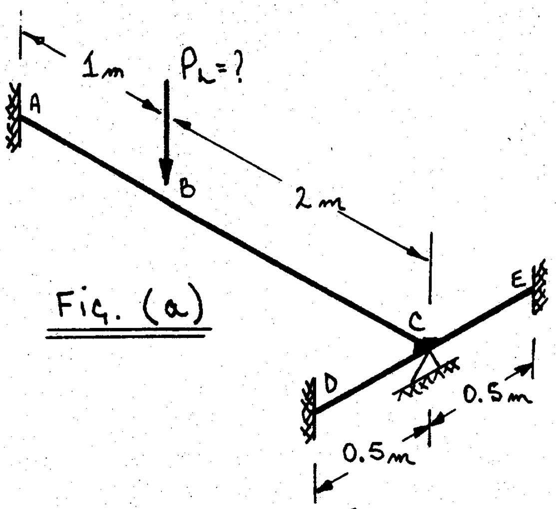


Fig. (a)

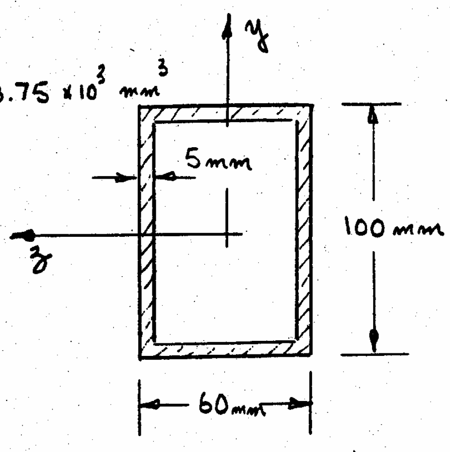


Fig. (b)

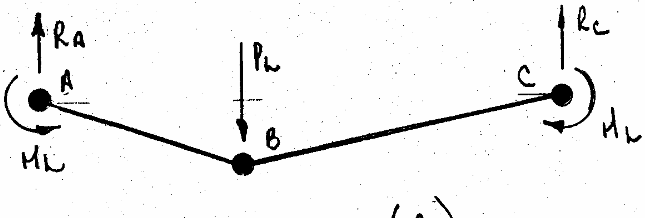
$$M_L = 300 \times 48.75 \times 10^3 = 14.625 \text{ kN-m}$$

$$\tau_Y = \tau_L = \frac{T_L}{2\bar{A}t} = \frac{S_Y}{2} \rightarrow T_L = S_Y \times \bar{A}\, t$$

$$T_L = 300 \times (95 \times 55) \times 5 = 7.84 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

MECANISME 1

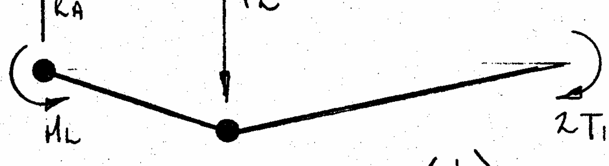
PLASTIFICATION POUTRE ABC ENC.



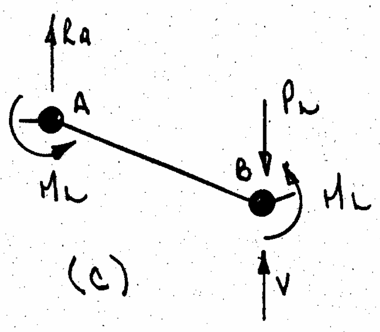
(a)

MECANISME 2

PLASTIFICATION EN TORSION DE DC ET CE



(b)



$\Sigma M/_B = 0 \qquad 1m \times R_A = 2M_L$

$$\boxed{R_A = 2M_L/1m}$$

MÉCANISME 1 - DCL (a)

$\Sigma M/_C = 0 \rightarrow 2m\, P_L = 3m\, \underbrace{R_A}_{2M_L/1m} = 6M_L$

$P_L = 6M_L/2m = \dfrac{3M_L}{1m} = 3 \times 14.625\ kN$

$$\boxed{P_L = 43.875\ kN}$$

MÉCANISME 2 - DCL (b)

$\Sigma M/_C = 0 \rightarrow 2m\, P_L = 3m\, \underbrace{R_A}_{2M_L/1m} + 2T_L - M_L$

$P_L = \dfrac{3M_L}{1m} + \dfrac{T_L}{1m} - \dfrac{M_L}{2m}$

$= 3 \times 14.625 + 7.84 - \dfrac{14.625}{2} = 44.4\ kN$

$$\boxed{P_L = 44.4\ kN}$$

Chapitre 12-Contraintes résiduelles

Un barreau ① (A_1 = 100 mm²) et un cylindre ② (A_2= 150 mm²) de 750 mm de longueur , sont concentriques et solidaires l'un de l'autre. Lorsqu'ils sont soumis à une force F (inconnue), les deux pièces s'allongent de 2,25 mm. Les matériaux ont un comportement élastique-parfaitement plastique et ont les propriétés suivantes :

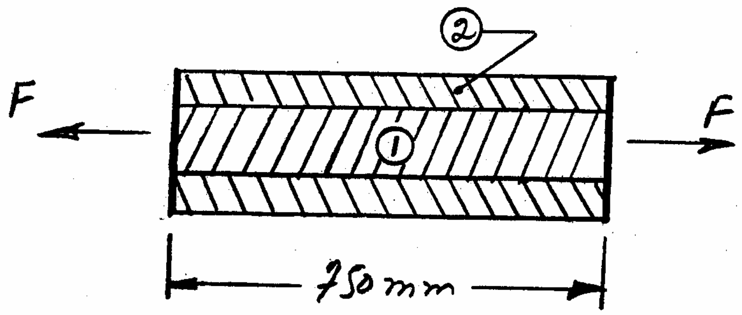
Matériau ① : S_{Y1} = 800 MPa ; E_1 = 200 000 MPa

Matériau ② : S_{Y2} = 200 MPa ; E_2 = 100 000 MPa

a) Déterminez la force appliquée;

b) Calculez la déformation résiduelle des barreaux après que la force F soit enlevée;

c) Calculez les contraintes résiduelles après déchargement.



Rép a) 90 000 N

b) $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 428{,}6 \times 10^{-6}$ m/m

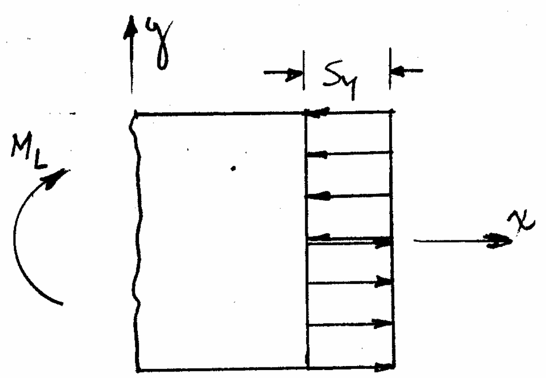
c) $\sigma_{1r} = 85{,}7$ MPa

$\sigma_{2r} = -57{,}15$ MPa

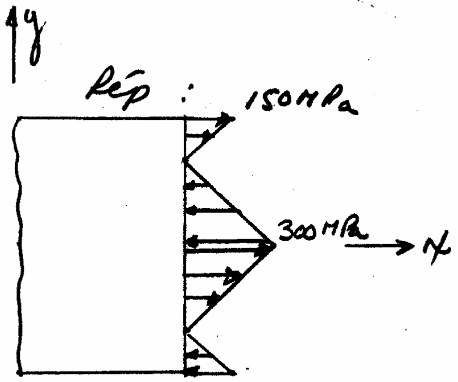
Chapitre 12 – Contraintes résiduelles

La figure a) illustre la distribution de la contrainte σ_x sur la section d'une poutre rectangulaire (hauteur = 100 mm; largeur = 25 mm) qui a été chargée par un moment $M = M_L$.
La distribution de la contrainte résiduelle obtenue après déchargement (M= 0) est illustrée schématiquement à la figure b); la valeur à mi-hauteur est connue et égale à 300 MPa (sens montré).

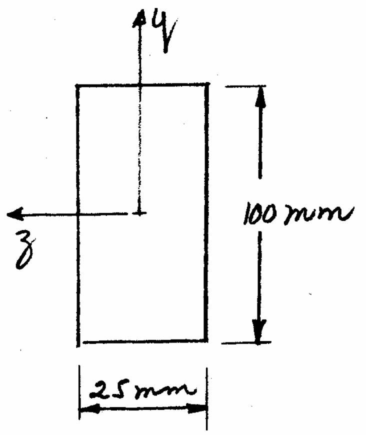
a) Déterminez la valeur de M_L.
b) Déterminez la valeur de la contrainte résiduelle à la fibre supérieure de la poutre.



a) chargement à $M = M_L$



b) contraintes résiduelles (M = 0)



section de la poutre

Rép : M_L = 18,75 kN