

# Section 5 : Comportement au-delà du domaine élastique

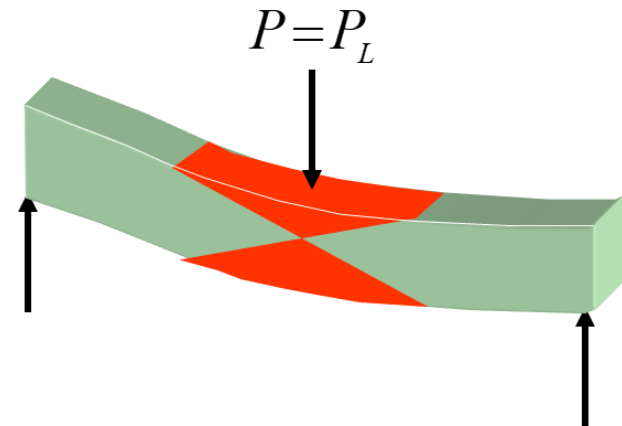
## • Objectifs

- Connaître le comportement d'un matériau élastique parfaitement plastique
- Analyser une structure soumise à un chargement uniaxial
- Analyser une structure soumise à un chargement de torsion
  - Calculer la force ou le moment au début de l'écoulement plastique
  - Calculer la force ou le moment limite
  - Calculer la réserve



Source: Lepoint.fr

### Phénomène physique



### Schéma de l'étude

## Section 5 : Comportement au-delà du domaine élastique

5.1 Introduction et modèles pour l'étude du comportement des matériaux

5.2 Application de l'analyse limite au chargement uniaxial

5.2.1 Analyse élastique

5.2.2 Comportement au-delà du domaine élastique

5.2.3 Analyse limite

5.2.4 Comparaison entre l'analyse limite et l'analyse élastique

5.3 Application de l'analyse limite à la torsion

5.4 Application de l'analyse limite à la flexion

5.4.1 Moment limite

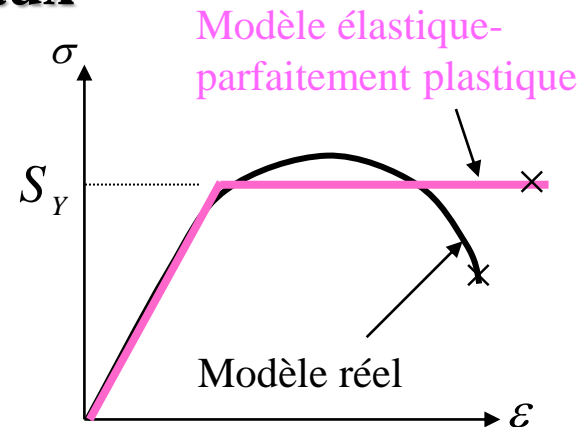
5.4.2 Analyse limite des poutres

5.5 Contraintes résiduelles

## 5.1 Introduction et modèles pour l'étude du comportement des matériaux

### Analyse limite

Utiliser un modèle de matériau élastique-parfaitement plastique.



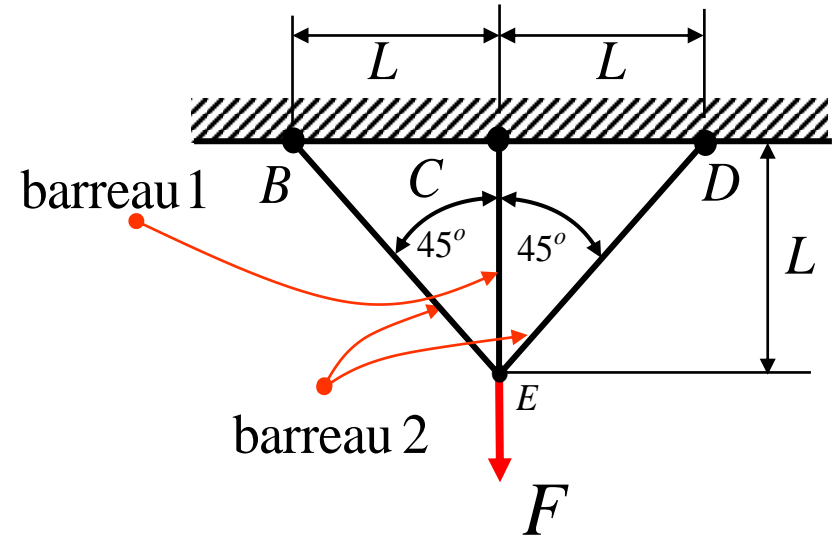
Dans cette étude, on appelle  $F_Y$ ,  $T_Y$  et  $M_Y$ , la *force*, le *couple* et le *moment* qui provoquent le **début de l'écoulement plastique** dans une pièce ou une structure. C'est la force  $F_Y$ , le couple  $T_Y$  ou le moment  $M_Y$  d'écoulement.

Par contre, on appelle  $F_L$ ,  $T_L$  et  $M_L$  la *force*, le *couple* et le *moment* qui provoquent **la plastification complète** d'une pièce ou d'une structure. C'est la force  $F_L$ , le couple  $T_L$  ou le moment  $M_L$  limite.

## 5.2.1 Analyse élastique

### Exemple 5.1:

Calculer  $F_Y$  et  $F_L$  pour la structure à trois barreaux ci-contre qui ont tous la même section ( $A_1 = A_2 = A$ ).



### Méthode de solution :

$F_Y$

Problème hyperstatique; les réactions sont obtenues en appliquant simultanément :

- les équations d'équilibre
- les équations de compatibilité

$F_L$

Problème isostatique ; les réactions sont obtenues en appliquant seulement

- les équations d'équilibre

## 5.2.1 Analyse élastique

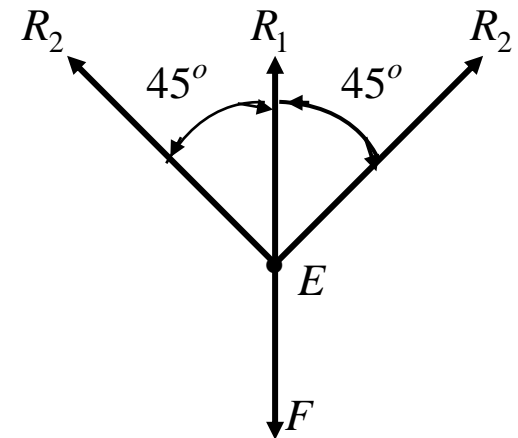
### Exemple 5.1- Solution (suite)

#### a) Équilibre

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = R_1 + 2 \cdot R_2 \cos(45)$$

$$F = R_1 + 2 \frac{R_2 \sqrt{2}}{2}$$

$$F = R_1 + R_2 \sqrt{2} \quad (5.1)$$



Nous avons **deux** inconnues et **une** seule équation d'équilibre, donc un problème **hyperstatique**.

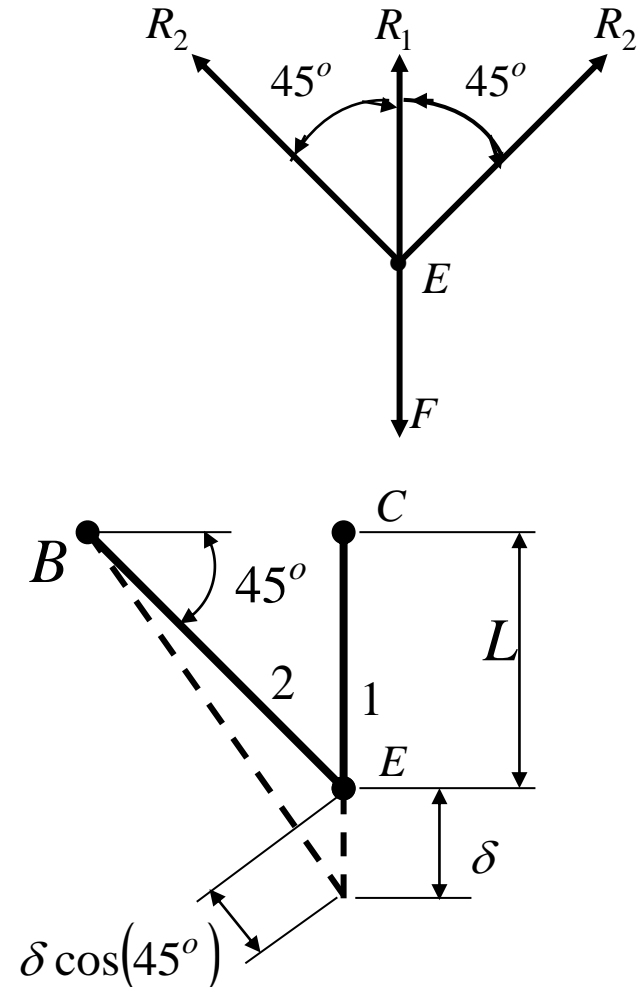
## 5.2.1 Analyse élastique

### Exemple 5.1- Solution (suite)

#### b) Compatibilité

$$\delta_1 = \delta$$

$$\delta_2 = \delta_1 \cos(45^\circ)$$



## 5.2.1 Analyse élastique

### Exemple 5.1- Solution (suite)

c) Relation  $P$ - $\delta$

Dans le domaine élastique, pour une membrure chargée uniaxialement

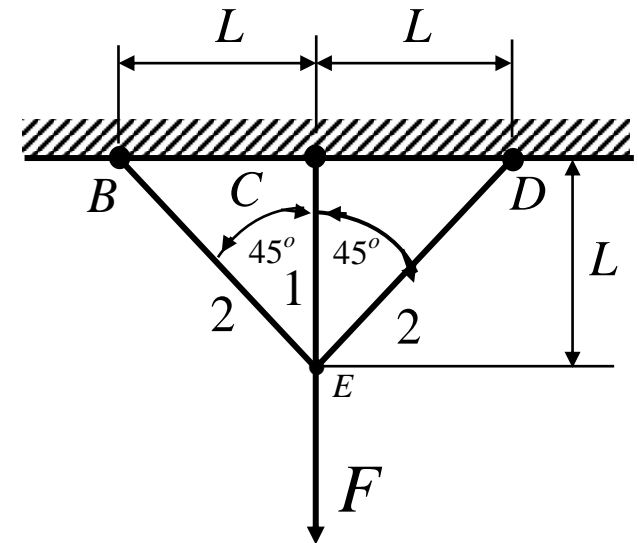
$$\sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{\Delta L}{L} E = \frac{\delta}{L} E \Rightarrow \delta = \frac{L \cdot \sigma}{E} = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

$P$  : force uniaxiale dans la membrure

$\delta$  : allongement de la membrure

d'où

$$\delta_1 = \frac{R_1}{A_1} \frac{L_1}{E} = \frac{R_1}{A_1} \frac{L}{E} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \frac{R_2}{A_2} \frac{L_2}{E} = \frac{R_2}{A_2} \frac{L \sqrt{2}}{E}$$



## 5.2.1 Analyse élastique

### Exemple 5.1- Solution (suite)

d) Résolution :

En combinant les relations précédentes :

$$\delta_2 = \delta_1 \cos(45^\circ) = \delta \cos(45^\circ)$$

$$\delta_1 = \frac{R_1 L}{A_1 E} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \frac{R_2 L \sqrt{2}}{A_2 E}$$

on obtient :

$$\left. \frac{R_2 L \sqrt{2}}{A_2 E} = \frac{R_1 L \sqrt{2}}{A_1 E} \right\}$$

$$A_1 = A_2 = A$$

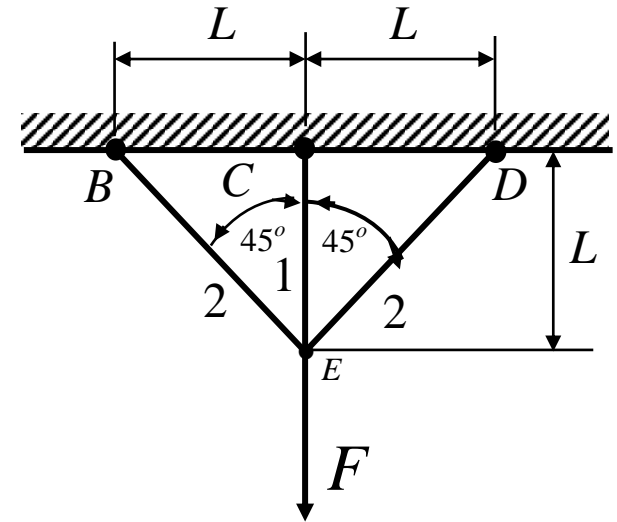
$$R_1 = 2 \cdot R_2$$

 $\Rightarrow$ 

$$F = R_1 + R_2 \sqrt{2}$$

$$R_1 = \frac{2 \cdot F}{2 + \sqrt{2}}$$

$$R_2 = \frac{F}{2 + \sqrt{2}}$$





## 5.2.2 Comportement au-delà du domaine élastique

Puisque  $R_1 = 2 R_2$  et puisque  $A_1 = A_2$ , dans le domaine élastique:

$$\sigma_1 = 2 \cdot \sigma_2$$

la première membrure à atteindre l'écoulement plastique sera la membrure 1.

Donc :

$$S_Y = \frac{R_1}{A} = \frac{2 \cdot F_Y}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{A} \quad \text{car} \quad R_1 = \frac{2 \cdot F}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow F_Y = A \cdot S_Y \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

## 5.2.3 Analyse limite

Pour un matériau élastique-parfaitement plastique, **lorsque  $F$  augmente au delà de  $F_Y$** , la réaction  $R_1$  reste constante et égale à  $AS_Y$  alors que la réaction  $R_2$  continue à augmenter.

À la charge limite  $F_L$ , les deux réactions  $R_1$  et  $R_2$  valent  $AS_Y$ .

Donc, de (5.1) :

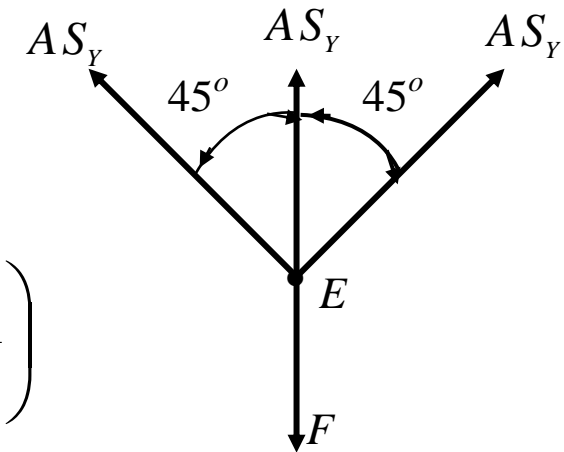
$$F_L = R_1 + R_2 \sqrt{2} = A_1 \cdot S_Y + A_2 \cdot S_Y \sqrt{2}$$

Puisque  $A_1 = A_2$ , on a :

$$\Rightarrow F_L = A \cdot S_Y (1 + \sqrt{2}) ; \quad F_Y = A \cdot S_Y \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

et

$$\frac{F_L}{F_Y} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = 1,41$$



À la limite du comportement élastique, la structure étudiée dispose de 41% de réserve avant de s'effondrer

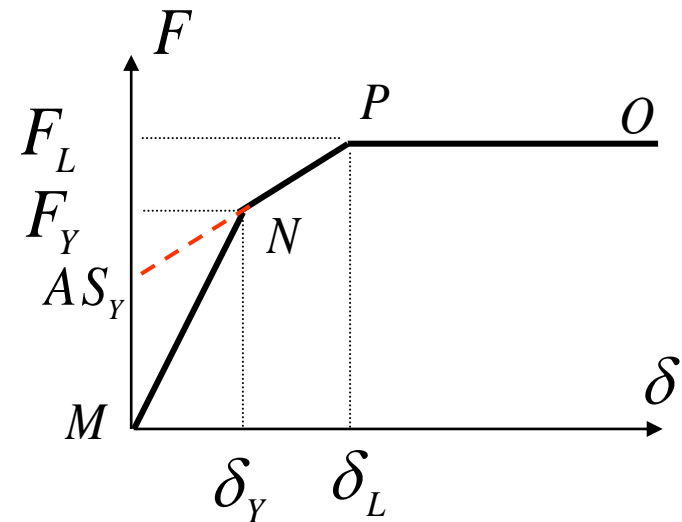
## 5.2.4 Comparaison entre l'analyse limite et l'analyse élastique

La rigidité d'une structure est définie par le rapport **chargement/déplacement**.

Ici, la rigidité est obtenue à l'aide des équations suivantes:

$$\text{De } M \text{ à } N : F = \left( \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) \frac{AE}{L} \cdot \delta$$

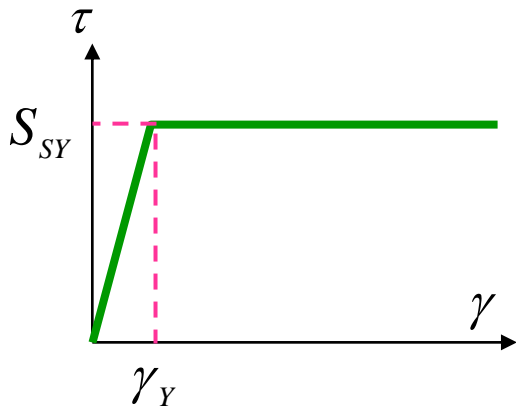
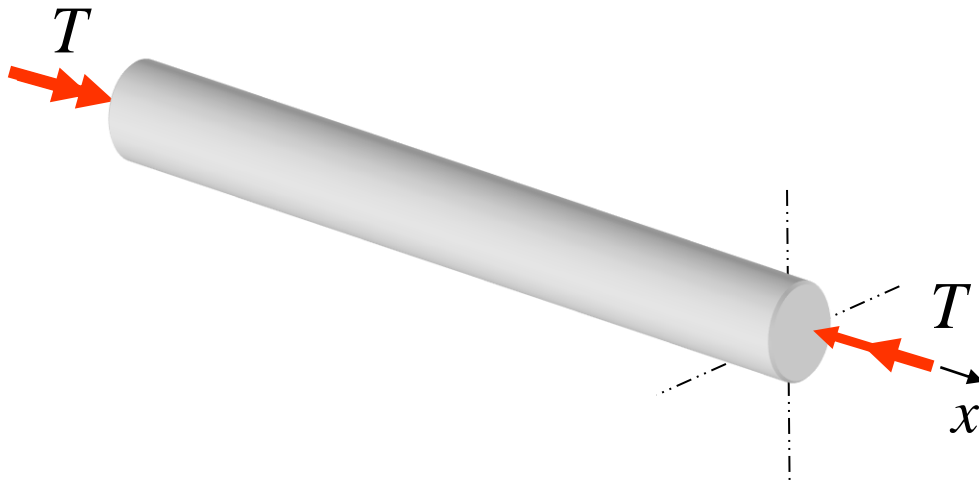
$$\text{De } N \text{ à } P : F = AS_Y + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{AE}{L} \cdot \delta$$



où  $\delta$  est l'allongement du barreau 1

$\delta_Y$  et  $\delta_L$  sont difficilement détectables à l'œil nu; en conséquence, la structure entre en état *limite* sans que cela ne soit bien perceptible.

# 5.3 Application de l'analyse limite à Torsion



*Modèle élastique-parfaitement  
plastique en cisaillement*

$$T = T_Y$$

$$\phi = \phi_Y$$

$$\gamma = \gamma_Y$$

$$T > T_Y$$

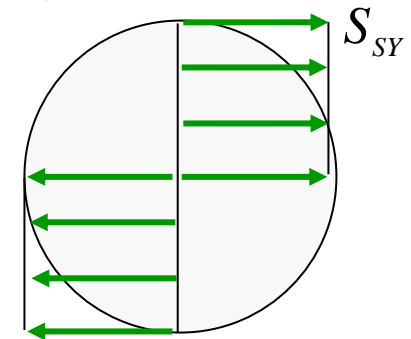
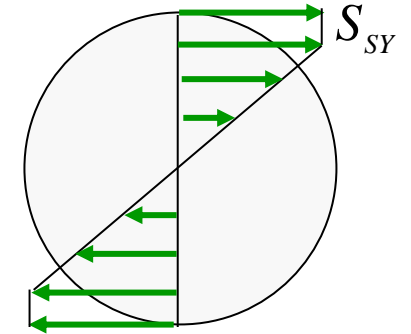
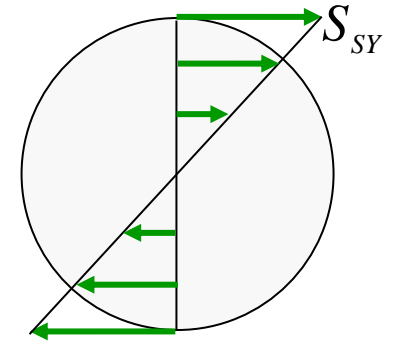
$$\phi > \phi_Y$$

$$\gamma > \gamma_Y$$

$$T = T_L$$

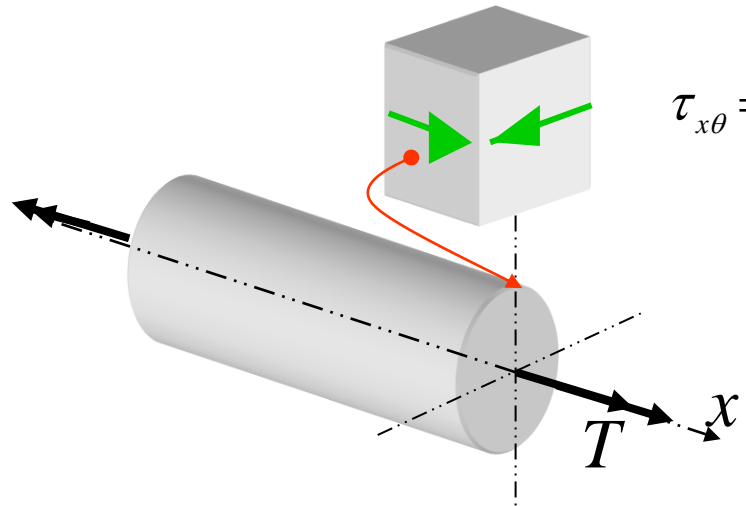
$$\phi \rightarrow \infty$$

$$\gamma \rightarrow \infty$$



### 5.3 Application de l'analyse limite à Torsion

**Arbre en torsion** : valeur de  $\tau$  au début de l'écoulement ( $\tau_Y = S_{SY}$ )



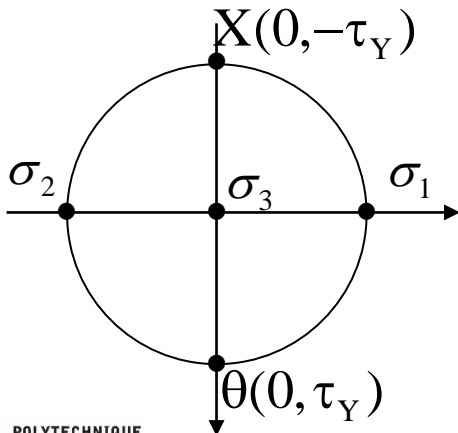
Selon Tresca

$$FS = 1,0 = \frac{S_Y}{2\tau_{\max}} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{S_Y}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_Y - (-\tau_Y)}{2} = \tau_Y$$

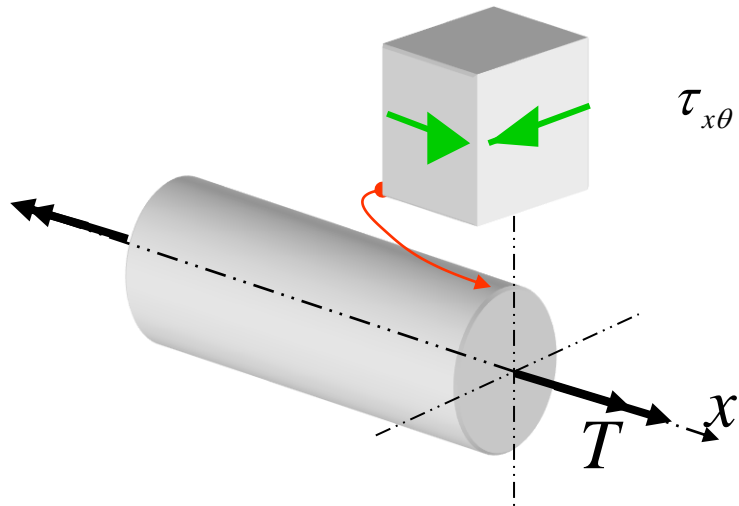
Donc :  $\tau_Y = \frac{S_Y}{2} = S_{SY}$



où  $S_{SY}$  : limite d'écoulement en torsion

### 5.3 Application de l'analyse limite à Torsion

**Arbre en torsion** : valeur de  $\tau$  au début de l'écoulement ( $\tau_Y = S_{SY}$ )

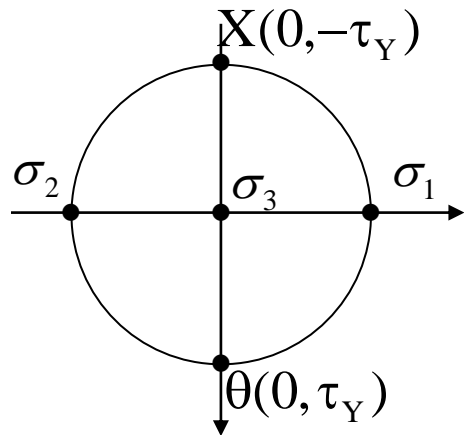


$$\tau_{x\theta} = \tau_Y = \frac{T_Y r}{J}$$

Selon Von Mises

$$FS = 1,0 = \frac{S_Y}{\sigma'} \Rightarrow \sigma' = S_Y$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$



$$\sigma' = \sqrt{\frac{1}{2} [(\tau_Y - (-\tau_Y))^2 + (-\tau_Y - 0)^2 + (0 - \tau_Y)^2]} = \tau_Y \sqrt{3}$$

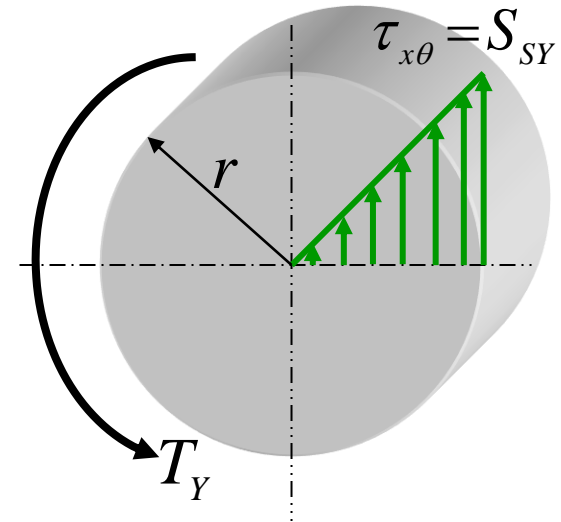
Donc :  $\tau_Y = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} = 0,577 S_Y = S_{SY}$

## 5.3 Application de l'analyse limite à Torsion

Au début de l'écoulement sur la section,  $T = T_Y$

$$\tau_{x\theta} = \frac{T \cdot r}{J} \quad J = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$S_{SY} = \frac{T_Y r}{J} \Rightarrow T_Y = \frac{\pi r^3}{2} S_{SY}$$



$$S_{SY} = \frac{S_Y}{2} \quad (\text{Tresca}) \quad \text{ou} \quad 0,577 S_Y \quad (\text{Von Mises})$$

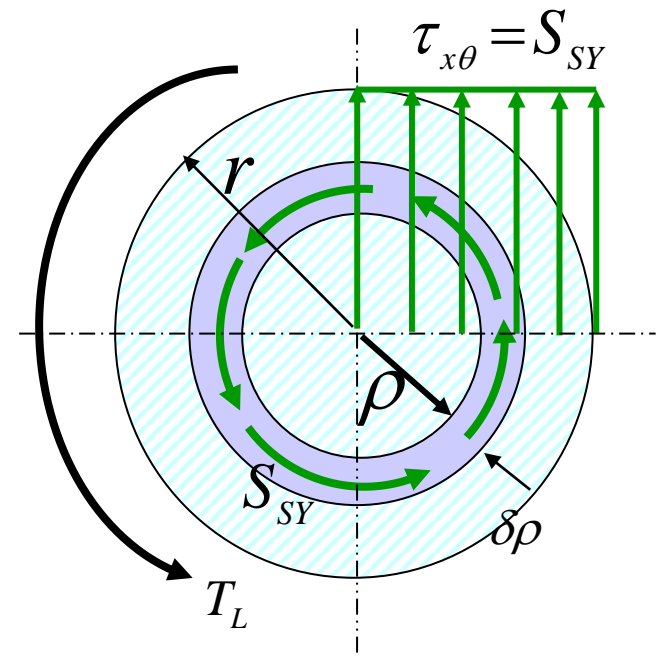
## 5.3 Application de l'analyse limite à Torsion

À la plastification complète de la section,  $T = T_L$

$$T_L = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho \underbrace{(\rho \cdot d\theta \cdot d\rho)}_{\text{Force}} S_{SY}$$

$$T_L = \int_0^r \underbrace{\rho}_{\text{Bras de levier}} \underbrace{(2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho)}_{\text{Force}} S_{SY}$$

$$T_L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3} S_{SY} \quad \text{et} \quad \frac{T_L}{T_Y} = \frac{4}{3} \quad \text{réserve}$$



À la limite du comportement élastique, un barreau circulaire plein en torsion dispose de 33% de réserve avant de s'effondrer



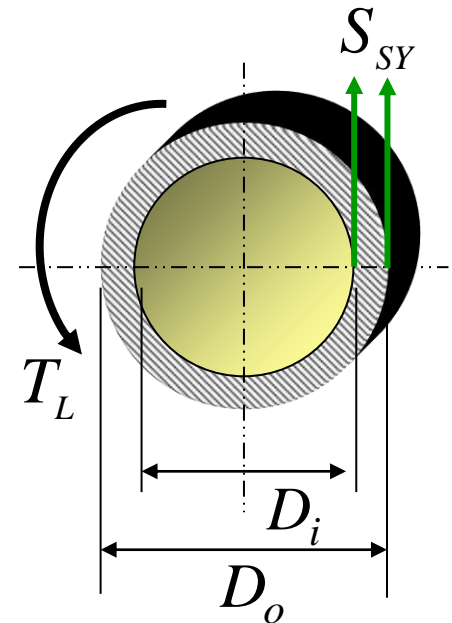
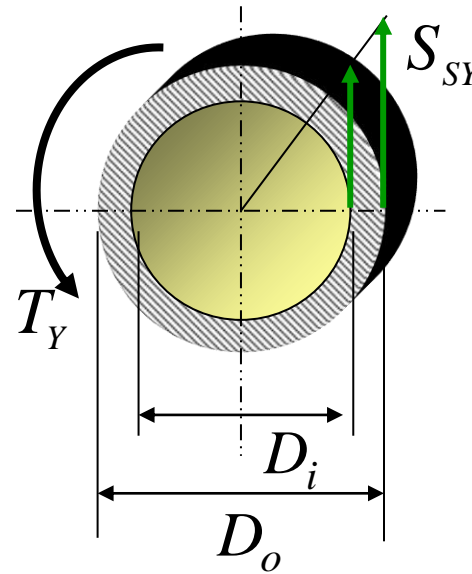
## 5.3 Application de l'analyse limite à Torsion

Pour un tube de section circulaire, quel est le rapport  $T_L/T_Y$ ?

$$S_{SY} = \frac{T_Y r}{J}$$

$$T_Y = \frac{S_{SY} \cdot J}{R_o} = S_{SY} \frac{\pi(R_o^4 - R_i^4)}{2 \cdot R_o}$$

$$T_L = \int_{R_i}^{R_o} \rho (2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho) S_{SY} = 2 \cdot \pi \cdot S_{SY} \frac{R_o^3 - R_i^3}{3}$$



## 5.3 Application de l'analyse limite à Torsion

Pour un **tube de section circulaire**, quel est le rapport  $T_L/T_Y$ ?

$$T_Y = S_{SY} \frac{\pi(R_o^4 - R_i^4)}{2 \cdot R_o}$$

$$T_L = 2 \cdot \pi \cdot S_{SY} \frac{R_o^3 - R_i^3}{3}$$

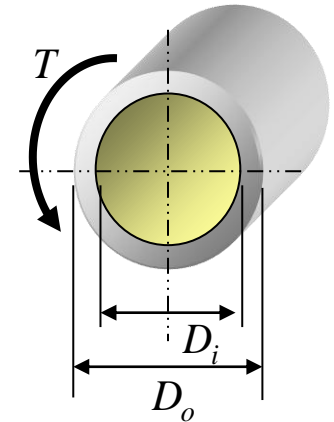
$$\frac{T_L}{T_Y} = \frac{4 R_o (R_o^3 - R_i^3)}{3 (R_o^4 - R_i^4)}$$

Si on pose  $R_i = X \cdot R_o$ , on a:  
( $X < 1,0$ )

$$\frac{T_L}{T_Y} = \frac{4(1 - X^3)}{3(1 - X^4)}$$

Pour  $X = 0,9$  typiquement,

$$\frac{T_L}{T_Y} = 1,051 \approx 1,0$$



À la limite du comportement élastique, un tube circulaire à paroi mince en torsion n'a pratiquement pas de réserve avant de s'effondrer

## 5.3 Application de l'analyse limite à Torsion

Quel est le rapport  $T_L/T_Y$  pour un tube rectangulaire?

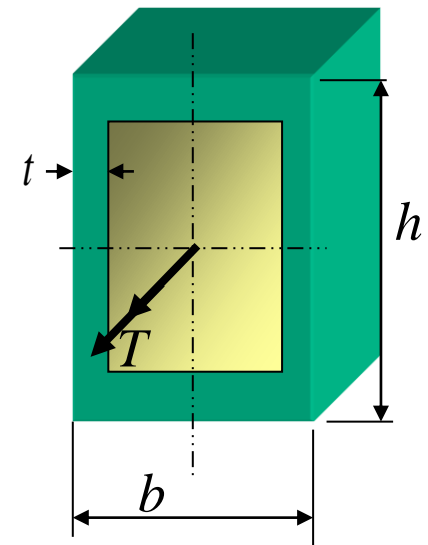
a)  $T_Y$        $T_Y = S_{SY} \cdot 2 \cdot \bar{A} \cdot t$

$$\tau_{xs} = \frac{T}{2 \cdot \bar{A} \cdot t}$$

b)  $T_L$

Puisque  $\tau_{xs}$  est  $\approx$  constant à travers l'épaisseur,  
dès que  $\tau_{xs} = S_{SY}$ , la paroi est complètement plastifiée

$$\frac{T_L}{T_Y} \approx 1,0$$



À la limite du comportement élastique, un tube rectangulaire à paroi mince en torsion n'a pratiquement pas de réserve avant de s'effondrer

# Section 5: Comportement au-delà du domaine élastique

- **Objectifs**

- Analyser une structure soumise à un chargement de flexion
  - Calculer le moment au début de l'écoulement plastique
  - Calculer le moment limite
  - Calculer la réserve
- Savoir la définition d'une rotule plastique
- Calculer la position de l'axe neutre plastique
- Dessiner les différents mécanismes d'effondrement d'une structure
- Calculer la charge limite  $P_L$

## Section 5 : Comportement au-delà du domaine élastique

5.1 Introduction et modèles pour l'étude du comportement des matériaux

5.2 Application de l'analyse limite au chargement uniaxial

5.2.1 Analyse élastique

5.2.2 Comportement au-delà du domaine élastique

5.2.3 Analyse limite

5.2.4 Comparaison entre l'analyse limite et l'analyse élastique

5.3 Application de l'analyse limite à la torsion

5.4 Application de l'analyse limite à la flexion

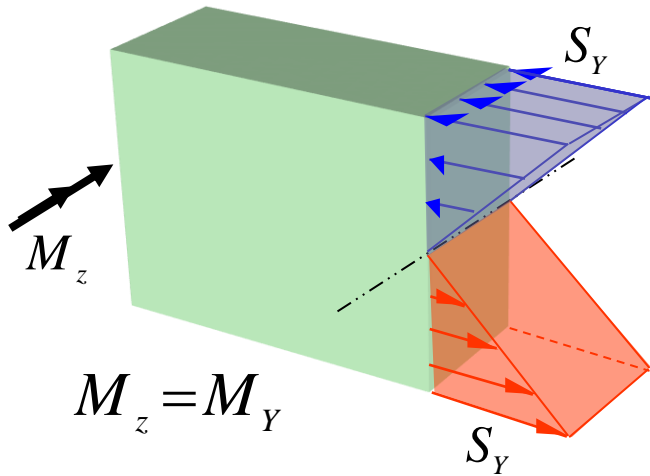
5.4.1 Moment limite

5.4.2 Analyse limite des poutres

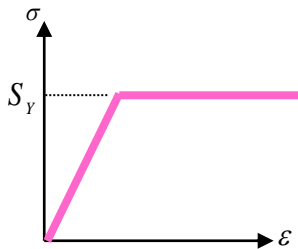
5.5 Contraintes résiduelles

# 5.4 Application de l'analyse limite à Flexion

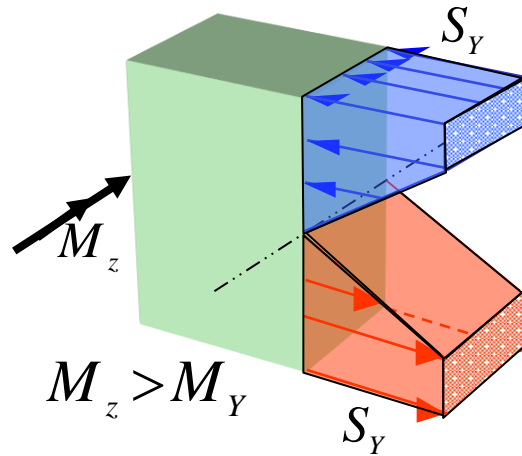
## Distribution de la contrainte



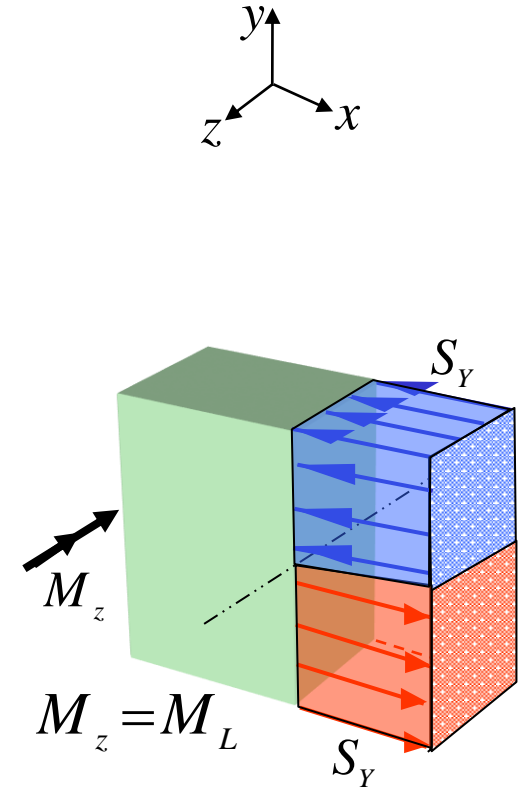
Au début de l'écoulement



Comportement élastique-  
parfaitement plastique



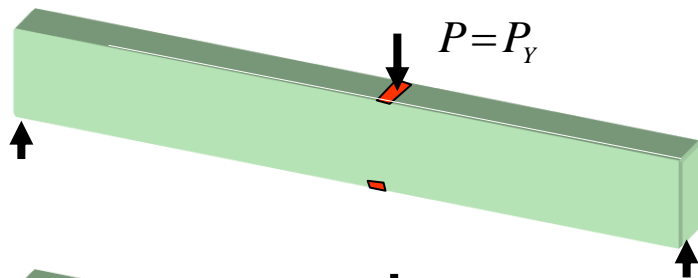
Après le début l'écoulement



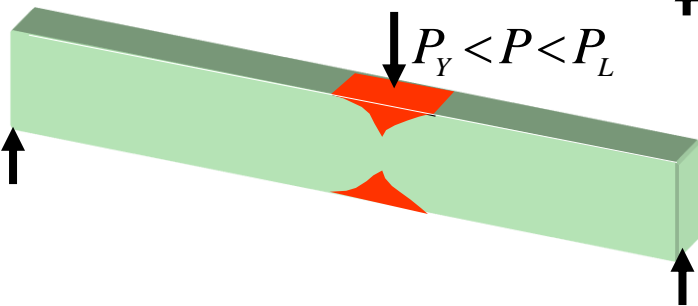
Plastification complète  
(création d'une rotule plastique)

# Création d'une rotule plastique

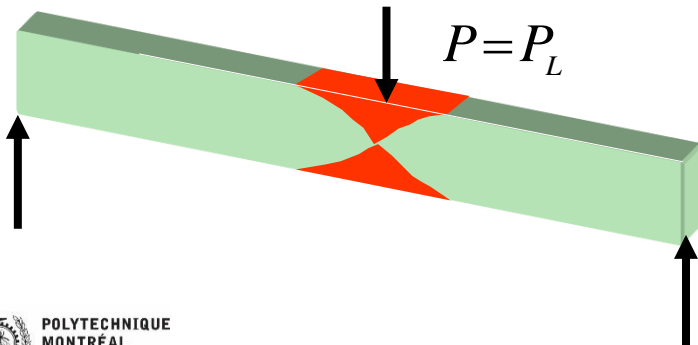
## Exemple 5.2 : Flexion 3 points



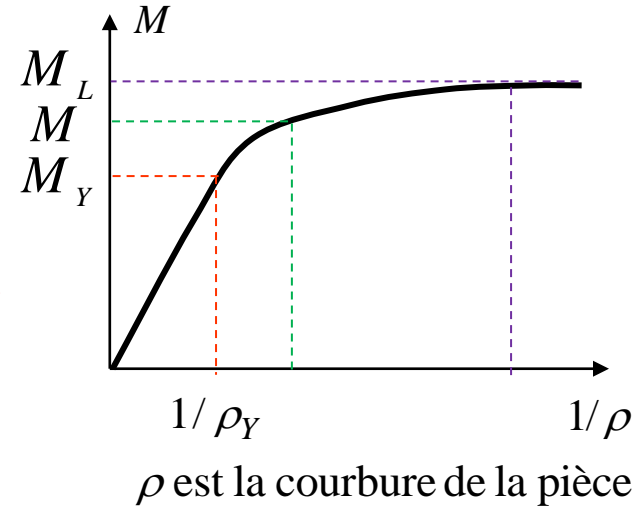
1: début de l'écoulement



2: propagation de la zone plastique

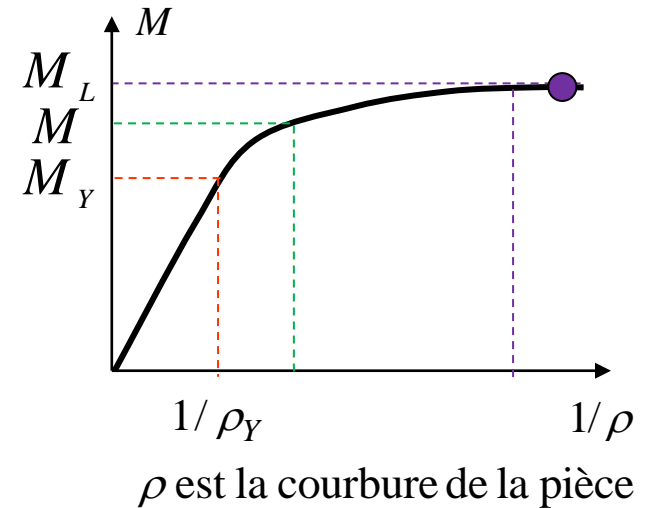
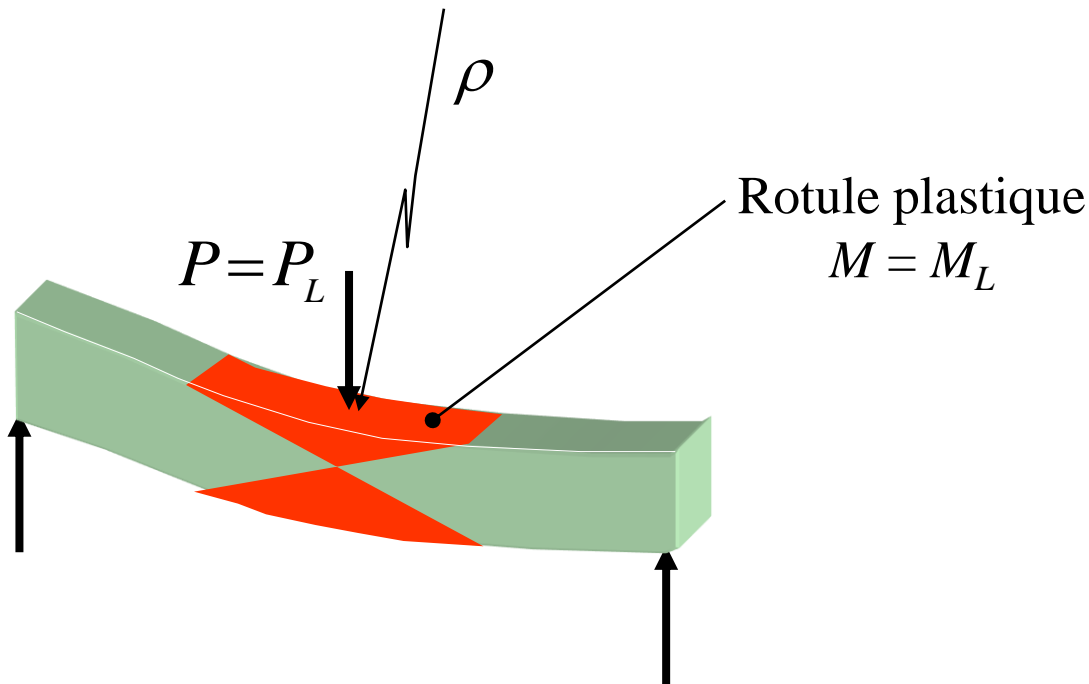


3: plastification complète



# Création d'une rotule plastique

## Exemple 5.2 (suite) : Flexion 3 points



$$1/\rho \rightarrow \infty$$



Attention une rotule mécanique n'est pas une rotule plastique

La pièce est en plastification généralisée et  $\rho$  diminue d'une façon ininterrompue



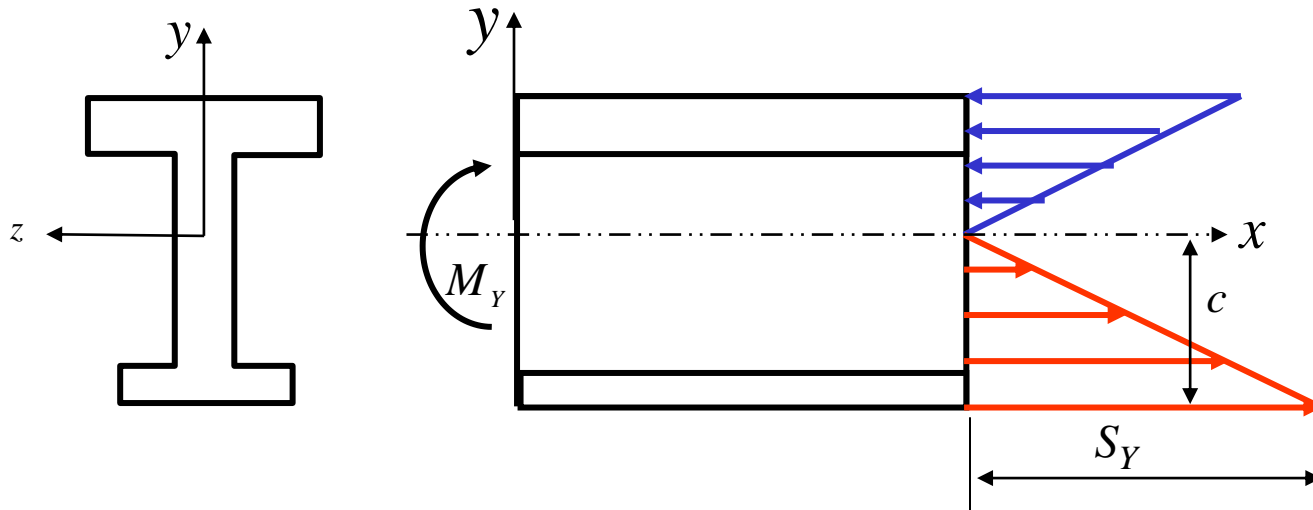
# Calcul du moment au début de l'écoulement ( $M_Y$ )

À partir de la contrainte axiale  $\sigma_x$  et du critère de Tresca

$$\sigma = S_Y = \frac{M_Y \cdot c}{I} \Rightarrow M_Y = \frac{I}{c} S_Y = S_z \cdot S_Y$$

*Limite d'écoulement*  
*Module de section*

$c$  est la distance entre l'axe *neutre* et la fibre la plus éloignée.



## 5.4.1 Moment limite ( $M_L$ )

### Plastification généralisée de la *section*

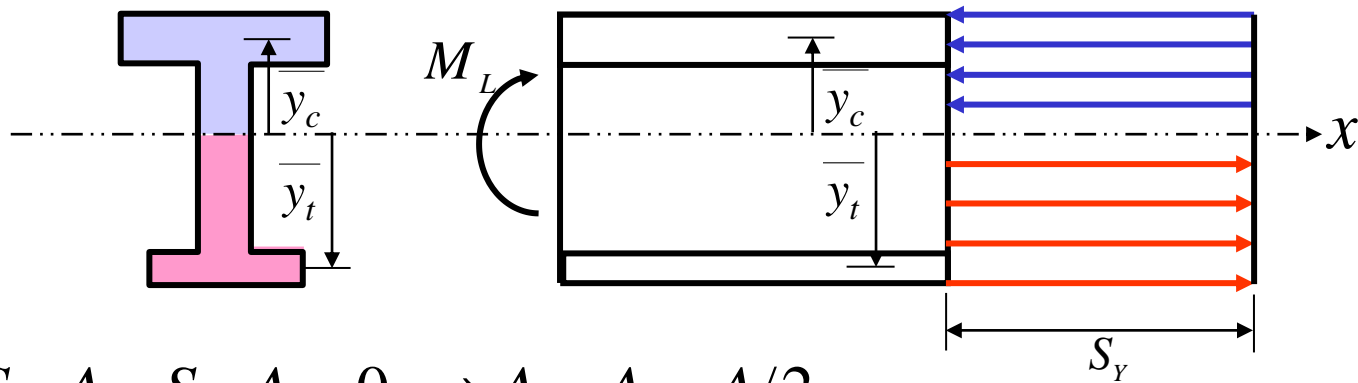
Méthode de solution :

- a) *Trouver la position de l'axe neutre plastique*
- b) *Calculer  $M_L$*

# Calcul du moment limite ( $M_L$ )

## a) Position de l'axe neutre plastique ( $\Sigma F_x = 0$ )

Soit  $A_t$  la portion de l'aire de la section soumise à de la tension et  $A_c$  celle qui subit de la compression. L'équilibre des forces en  $x$  amène



$$\sum F_x = S_Y \cdot A_t - S_Y \cdot A_c = 0 \Rightarrow A_t = A_c = A/2$$

L'axe neutre plastique divise la section en deux zones d'aires égales lorsque la pièce subit seulement de la flexion.

Cela n'est plus vrai lorsqu'on ajoute une force axiale ou lorsque la limite d'écoulement varie dans la section (différents matériaux).

## Calcul du moment limite ( $M_L$ )

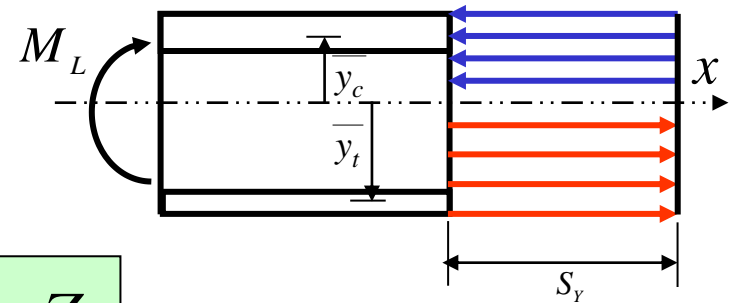
b) Calcul de  $M_L$  ( $\Sigma M_z = 0$ )

Une somme des moments donne

$$M_L = S_Y \cdot A_c \overline{y_c} + S_Y \cdot A_t \overline{y_t} = S_Y \sum A_i \cdot \overline{y_i} = S_Y \cdot Z_z$$

où  $\overline{y_c}$  et  $\overline{y_t}$  représentent la distance entre l'axe neutre plastique et le centroïde des sections en compression et en tension respectivement.

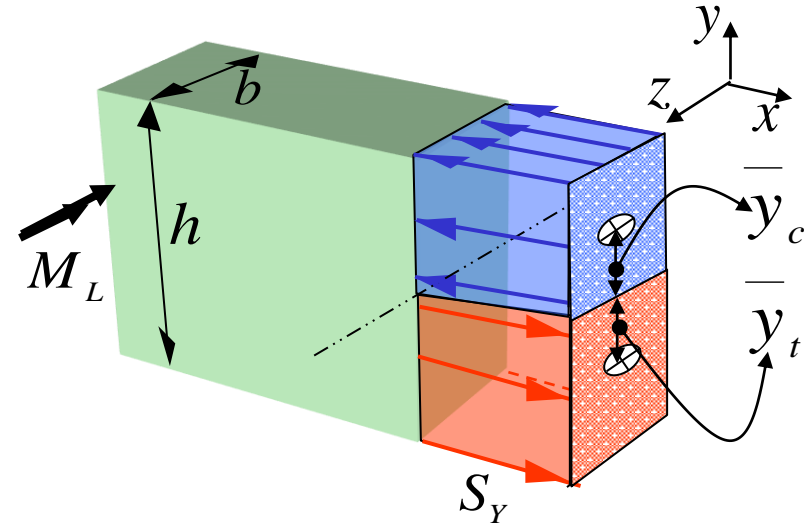
$Z$  est le **module limite**. Les valeurs de  $Z$  sont tabulées dans la fiche technique des profilés comme une propriété de la section au même titre que l'aire ou les moments d'inertie  $I$  et  $J$ .



**Exemple 5.3 :** Calculer  $M_L/M_Y$  pour une pièce rectangulaire pleine

$$M_Y \quad \sigma = S_Y = \frac{M_Y \cdot c}{I} \Rightarrow M_Y = \frac{I}{c} S_Y = S_z \cdot S_Y$$

$$S_z = \frac{I}{c} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$



$$M_L \quad M_L = S_Y \cdot Z_z$$

$$\begin{aligned} Z_z &= A_t |y_t| + A_c |y_c| \\ &= \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{4} + \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{M_L}{M_Y} = \frac{Z_z}{S_z} \quad \frac{M_L}{M_Y} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Une section rectangulaire pleine en flexion  
a une réserve de 50% avant l'effondrement

**Exemple 5.3 (suite) :** Calculer  $M_L$  de la poutre. La limite d'écoulement est  $S_Y$

**Solution :**

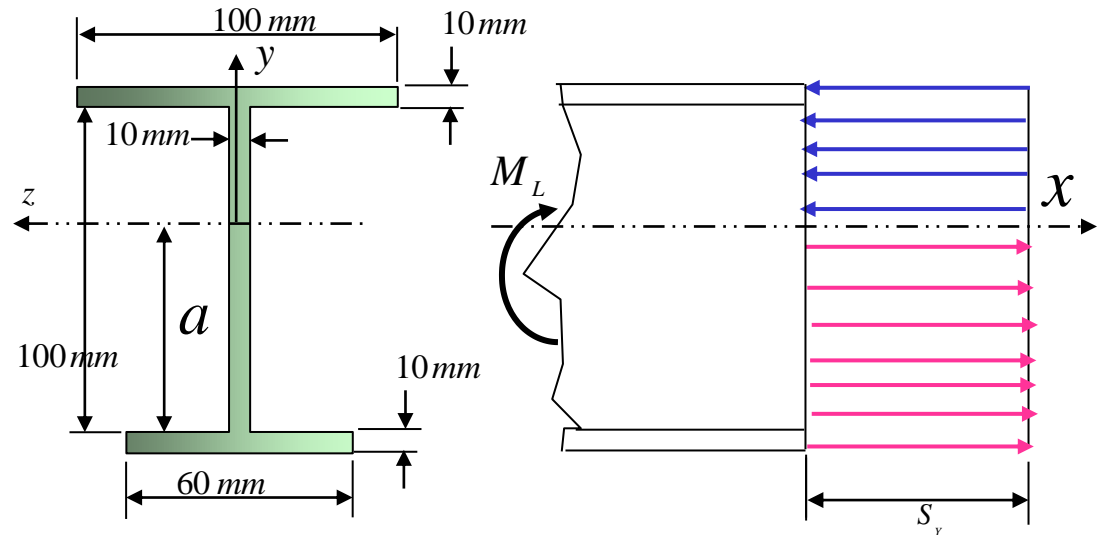
Il faut d'abord calculer l'emplacement de l'axe neutre plastique.

De  $A_t = 1/2 A$  on trouve :

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot A \Rightarrow (60 \cdot 10 + 10 \cdot a) = \frac{1}{2} (60 \cdot 10 + 100 \cdot 10 + 100 \cdot 10)$$

$$\Rightarrow a = 70 \text{ mm}$$

$$A_t = A_c = 1300 \text{ mm}^2$$

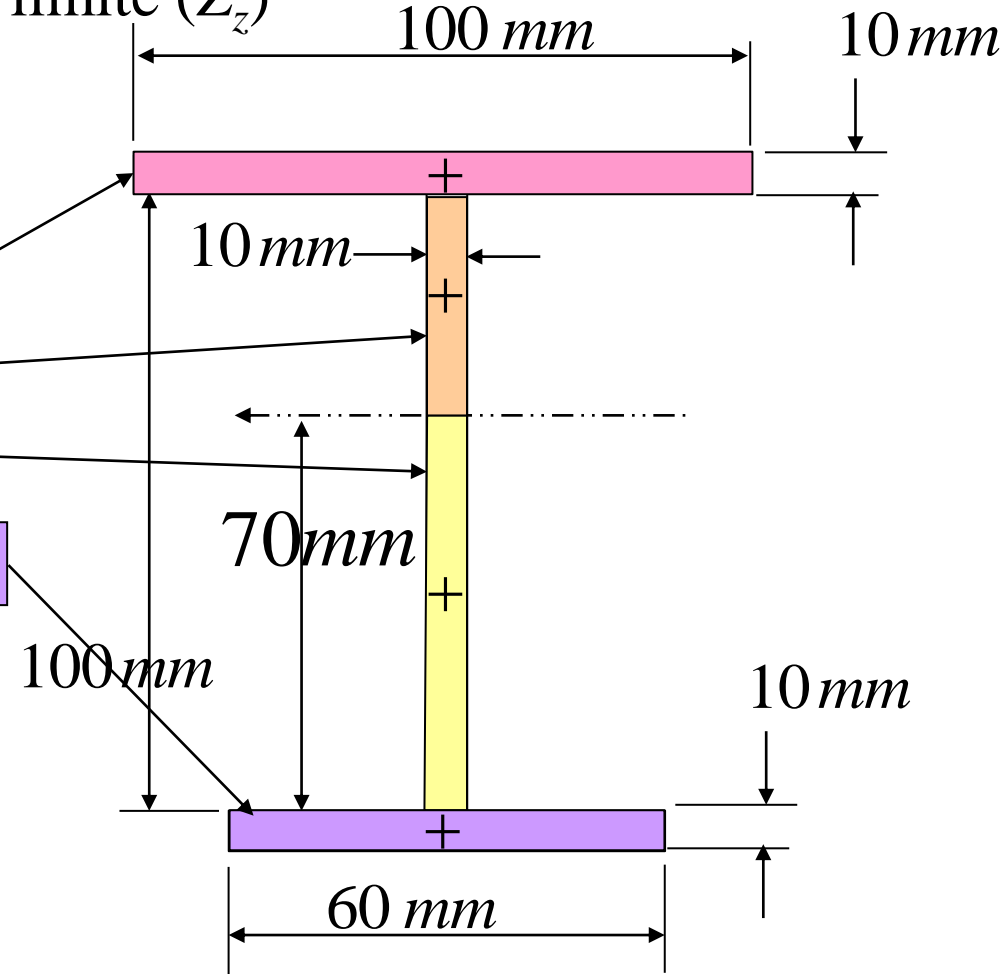


Enfin, on calcule le module limite ( $Z_z$ )

$$Z_z = \sum A_i \cdot |y_i| = (100 \cdot 10)(30 + 10/2) + (30 \cdot 10)(30/2) + (70 \cdot 10)(70/2) + (60 \cdot 10)(70 + 10/2)$$

$$Z_z = 109 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_L = Z_z \cdot S_Y \left( \frac{\text{mm}^3 \text{ N}}{\text{mm}^2} \right)$$



**Exemple 5.4 :** Calculer  $M_L/M_Y$  pour une poutre en I du type  
W200×52

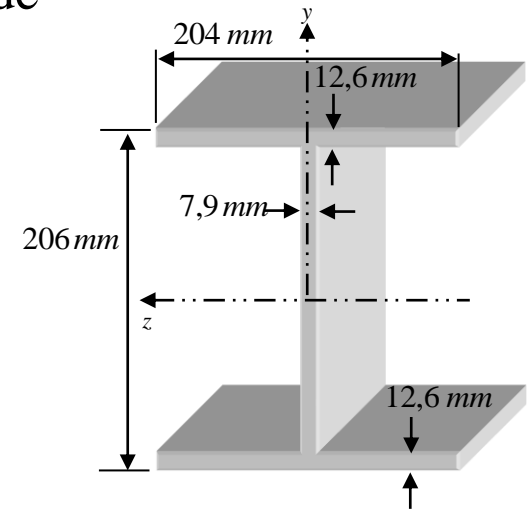
Le profilé W200×52 est un profilé normalisé de 200 mm de hauteur *nominale* et pesant 52 kg/m de longueur.

De l'annexe C, tableau C.1, on lit, pour ce profilé :

- $S_z = 512 \times 10^3 \text{ mm}^3$
- $Z_z = 570 \times 10^3 \text{ mm}^3$

Alors,

$$\frac{M_L}{M_Y} = \frac{570}{512} = 1,11$$



Le profilé W200×52 utilise plus efficacement le matériel que la section rectangulaire mais il a moins de réserve avant l'effondrement

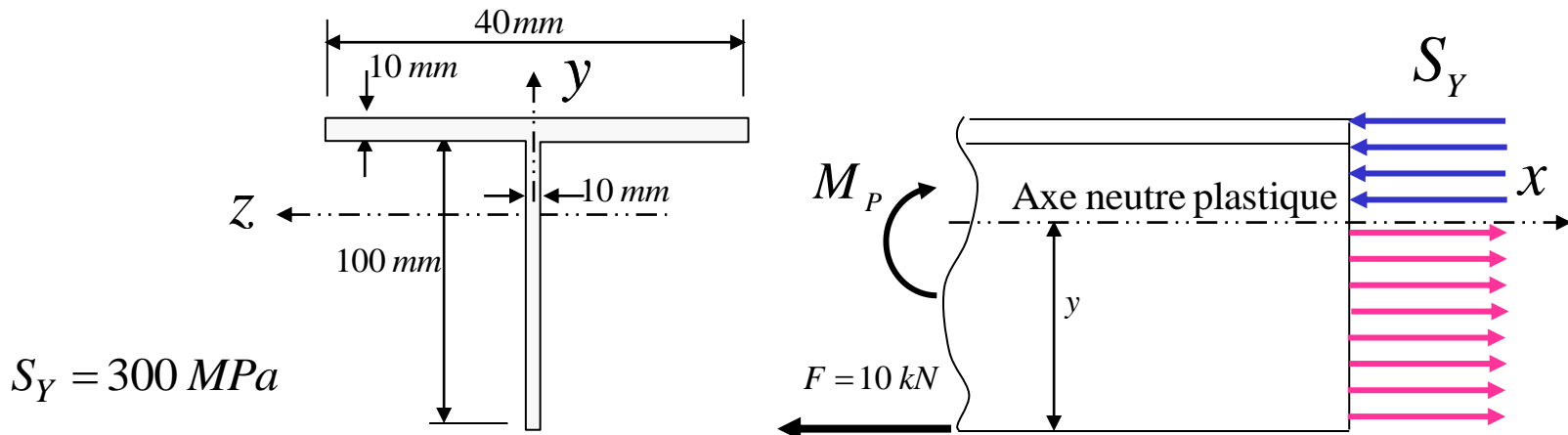


# Calcul du moment $M_P$

L'axe neutre *plastique* divise la section en deux zones d'aires égales lorsque la poutre subit **seulement de la flexion**.

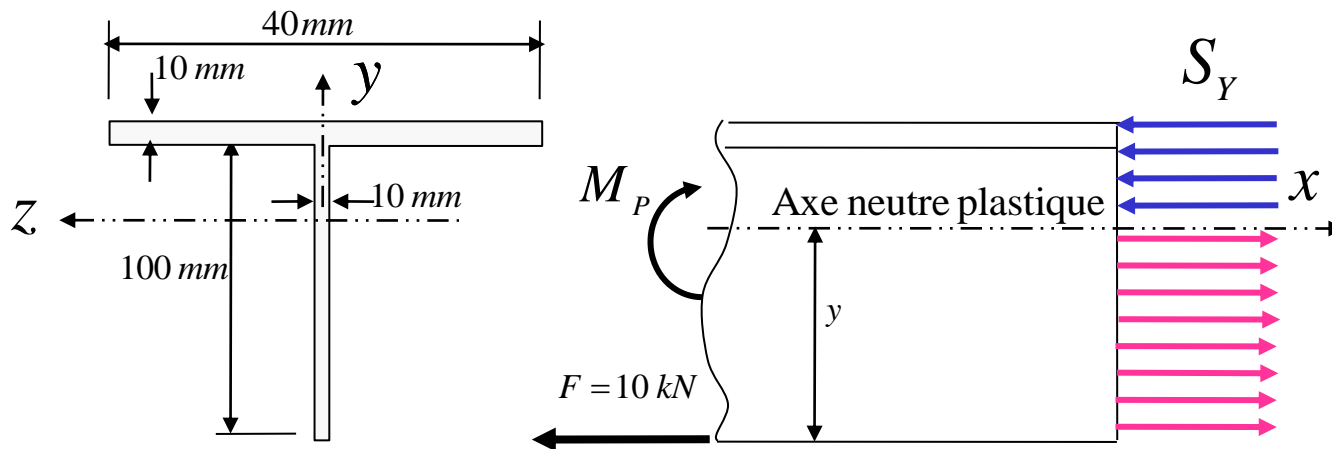
Ici, on verra que cela n'est plus vrai lorsqu'on **ajoute une force axiale**. Le moment qui cause la plastification s'appelle maintenant  $M_P$  et est différent de  $M_L$

**Exemple 5.5** : Trouver le moment de plastification  $M_P$  de la poutre en T.



# Calcul du moment $M_P$

**Exemple 5.5 (suite) :** Trouver le moment de plastification  $M_P$  de la poutre en T



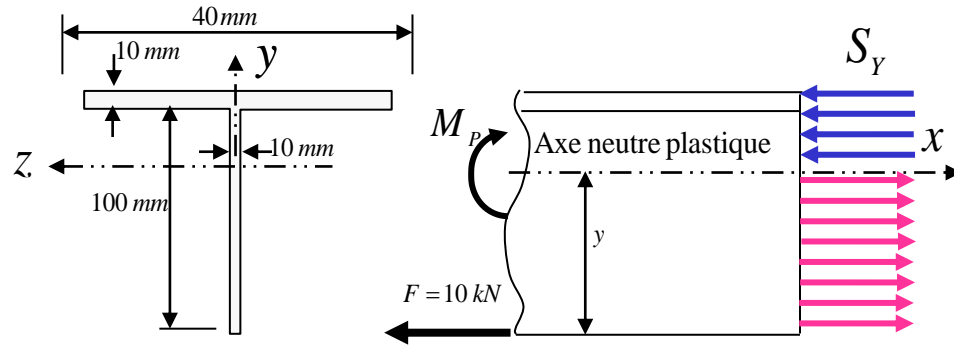
L'axe de passage de tension à compression est à un emplacement **différent** de celui de l'axe neutre *plastique* calculé pour la flexion seulement.

On le montre ici à une distance  $y$  du bas de la poutre.

# Calcul du moment $M_P$

## Exemple 5.5 (suite)

### Solution :



a) Localiser l'axe de passage de tension à compression.

Si on appelle  $A_t$  l'aire de la section qui est en tension et  $A_c$  celle qui est en compression,

$$\sum F_x = A_t \cdot S_Y - A_c \cdot S_Y - F = 0$$

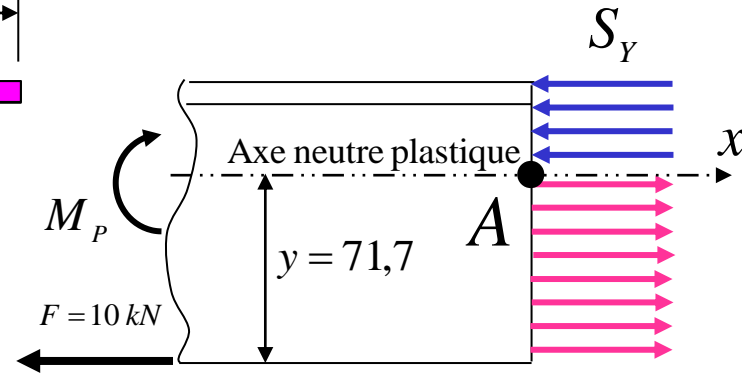
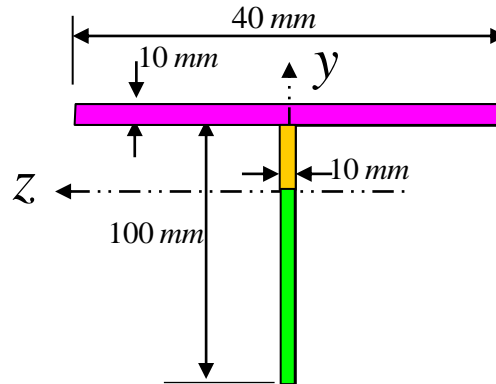
Puisque  $A_t + A_c = A$ , on obtient

$$A_t = \frac{F + A \cdot S_Y}{2 \cdot S_Y} = \frac{10 \times 10^3 \text{ N} + 1400 \text{ mm}^2 \cdot 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{2 \cdot 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 716,7 \text{ mm}^2$$

## Exemple 5.5 (suite)

$$A_t = 716,7 \text{ mm}^2 = 10 y$$

$$\Rightarrow y = 71,7 \text{ mm}$$



b) Calcul de  $M_P$

$$\sum M_A = -M_P + S_Y \cdot (40 \cdot 10) \cdot 33,3$$

$$+ S_Y \cdot [28,3 \cdot 10] \cdot \left(\frac{28,3}{2}\right)$$

$$+ S_Y \cdot (71,7 \cdot 10) \cdot \frac{71,7}{2} - F \cdot y = 0$$

$$M_P = 12,8 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 12,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### Résumé :

Lorsqu'il y a de la flexion et une charge axiale

$$1- \sum F = 0$$

$$2- \sum M = 0$$

## 5.4.2 Analyse limite des poutres en flexion ordinaire (Effondrement de structures)

Points **importants** à respecter dans l'analyse limite des poutres:

- Il est impératif de poser  $M_L$  dans le bon sens. L'analyse est basée sur une valeur connue de  $M_L$  (valeur numérique et sens)

### Solution en deux étapes

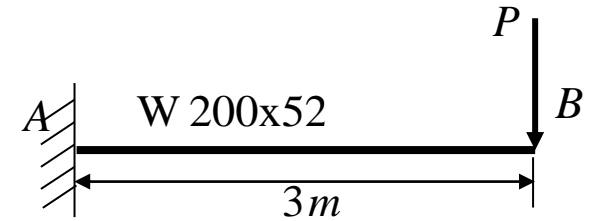
1. Faire d'abord un DCL de toute la structure
2. Ensuite faire des DCL sur des parties de la structure (au besoin)

- Quand on fait une coupe dans la structure, ne pas oublier l'effort tranchant sur le DCL
- Faire une somme des moments par rapport à un point qui élimine la contribution de l'effort tranchant

**Exemple 5.6 :** Déterminer la charge limite  $P_L$  pour cette poutre  
 ( $S_Y = 350 \text{ MPa}$ )

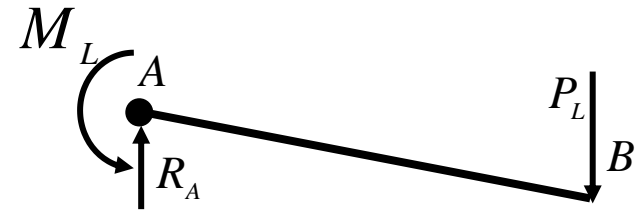
$$M_L = S_Y \cdot Z_z = 350 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 570 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_L = 199,5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 199,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



$$\sum M_A = 0$$

$$M_L = 3 \cdot P_L \Rightarrow P_L = \frac{M_L}{3} = \frac{199,5 \text{ kN} \cdot \text{m}}{3 \text{ m}} = 66,5 \text{ kN}$$



**IMPORTANT :**  $M_L$  s'oppose toujours à la rotation de la poutre. Dans le DCL il est impératif de poser  $M_L$  dans le bon sens.

*Exemple 12.2 dans volume*

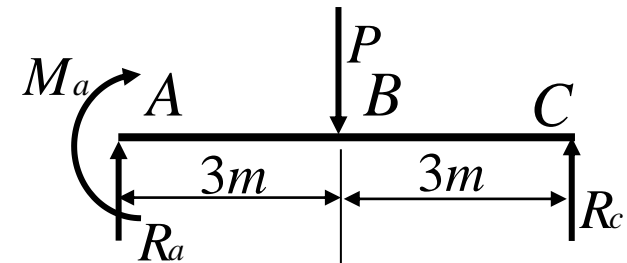
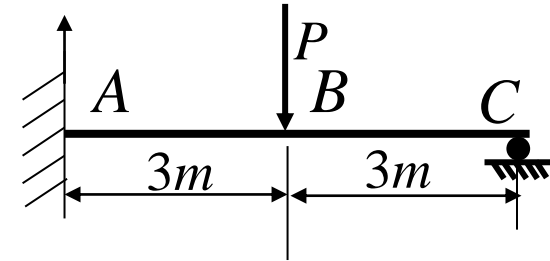
**Exemple 5.7 :** Déterminer la charge limite  $P_L$   
de la poutre W200x52  
 $S_Y = 350 \text{ MPa}$  ;  $Z_z = 570 \times 10^3 \text{ mm}^3$

**Solution :**

a) Analyse élastique

La poutre en (a) est une **structure hyperstatique** : les équations d'équilibre disponibles ne permettent pas de déterminer  $R_a$ ,  $R_c$  et  $M_a$ .

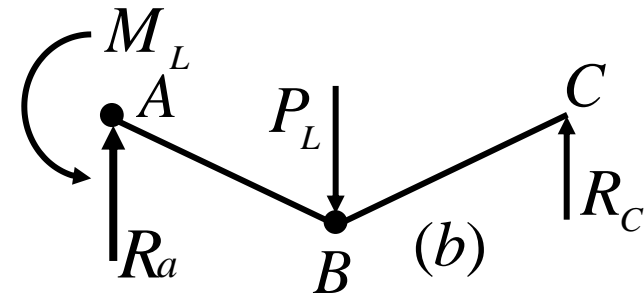
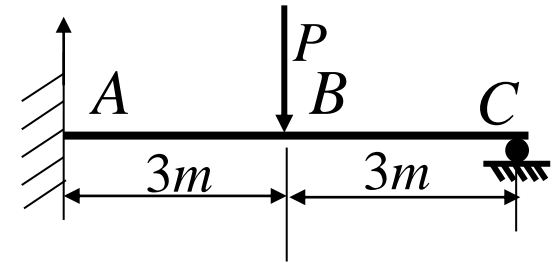
L'indétermination statique peut être levée à l'aide de méthodes classiques de l'énergie de déformation ou autre.



**Exemple 5.7 (suite) :** Déterminer la charge limite  $P_L$  de la poutre W200x52

b) Analyse limite

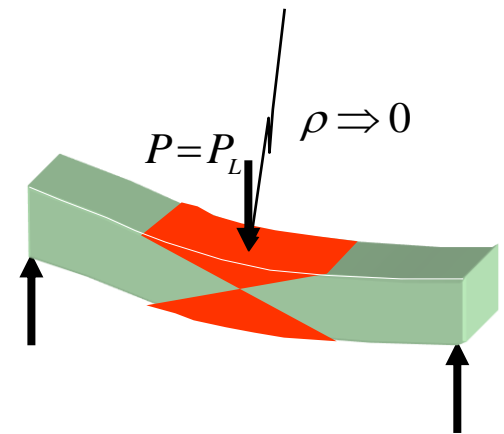
L'indétermination est levée si on étudie la déformée qui se produit à la charge limite  $P_L$ . Cette déformée est montrée en (b).



Le seul mécanisme d'effondrement possible nécessite la formation de deux rotules plastiques :

- une à l'encastrement
- une sous la charge  $P_L$

En C, le support étant un appui simple, il ne peut pas y avoir de rotule plastique.





### Exemple 5.7 (suite) :

Le DCL de toute la structure (b),

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_L + 6 \cdot R_C = 3 \cdot P_L \quad (1)$$

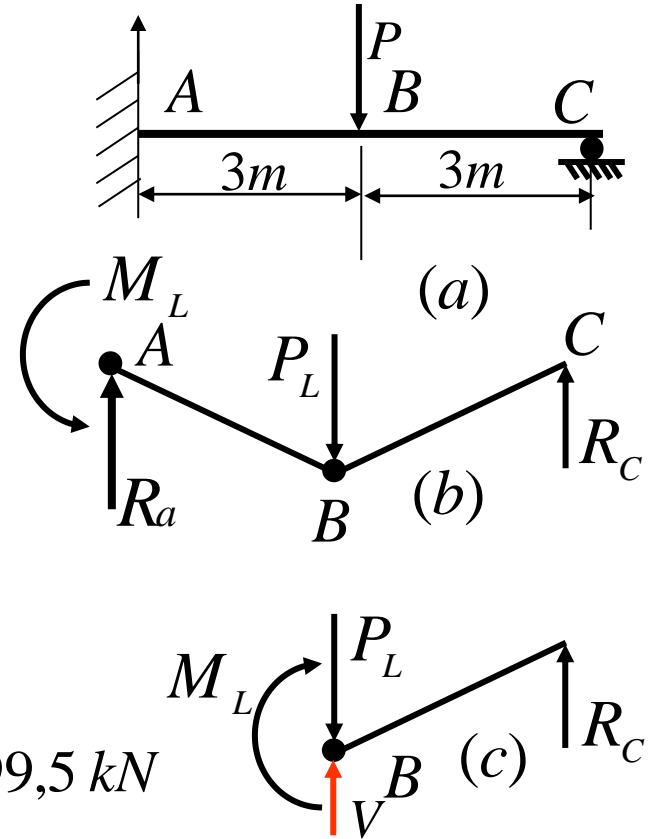
Puis, sur une partie de la structure (c) :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_L = 3 \cdot R_C \quad (2)$$

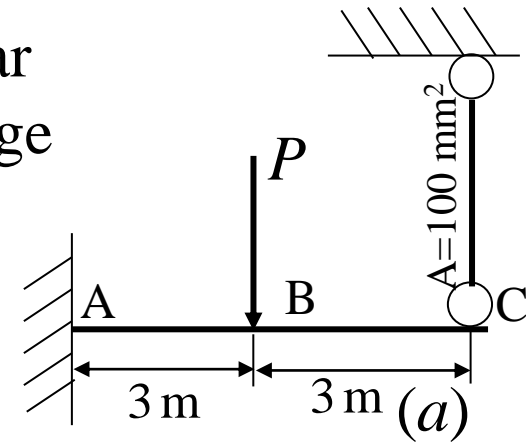
D'où :

$$P_L = \frac{M_L}{1m} = \frac{Z \cdot S_Y}{1m} = \frac{570 \times 10^{-6} \cdot 350 \times 10^6}{1m} = 199,5 \text{ kN}$$

$P_L = 199,5 \text{ kN}$



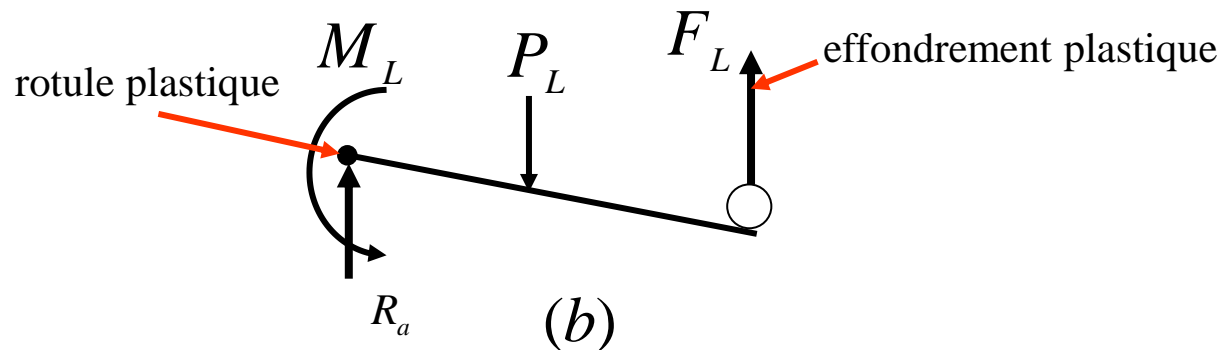
**Exemple 5.8 :** La poutre W200x52 est supportée par une tige de  $100 \text{ mm}^2$  de section. La poutre et la tige sont d'un acier pour lequel  $S_Y = 350 \text{ MPa}$ . Déterminer  $P_L$ .



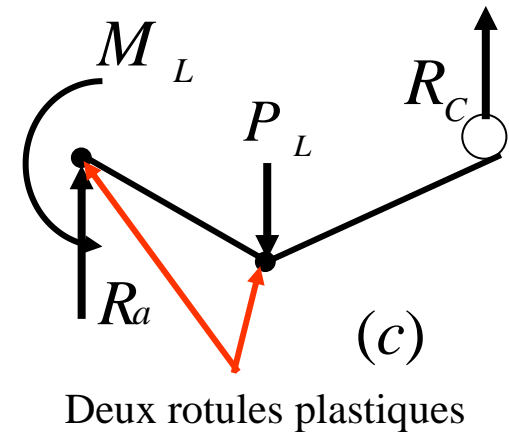
## Solution :

Dans le domaine élastique, le système est hyperstatique. En analyse limite, deux mécanismes d'effondrement sont possibles.

### Mécanisme 1



### Mécanisme 2



## Exemple 5.8 (suite) :

### Solution :

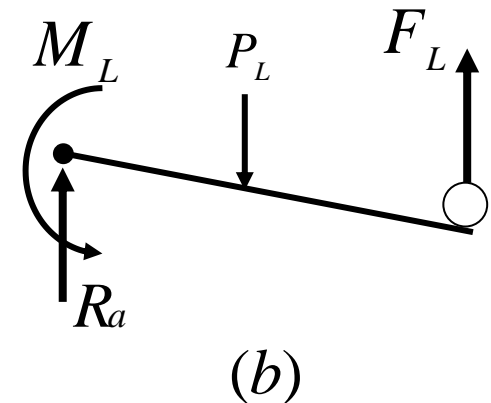
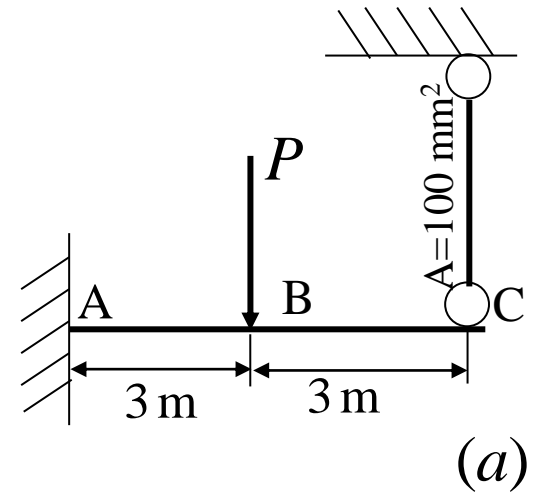
Analyse du mécanisme montré en (b) :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_L + 6 \cdot F_L = 3 \cdot P_L$$

où :  $F_L = A \cdot S_Y = 100 \text{ mm}^2 \cdot 350 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 35 \text{ kN}$

et 
$$P_L = \frac{6F_L + M_l}{3} = \frac{6AS_Y + Z_z S_Y}{3}$$

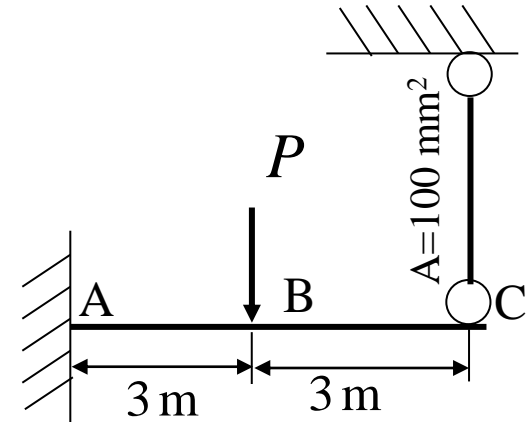
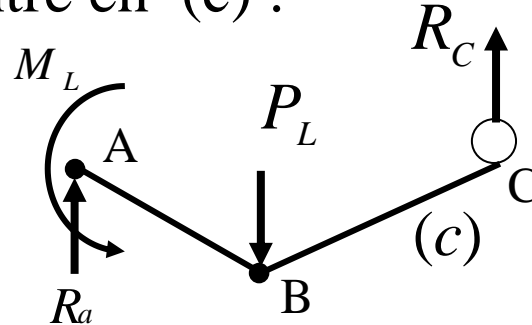
$$P_L = 136,5 \text{ kN}$$



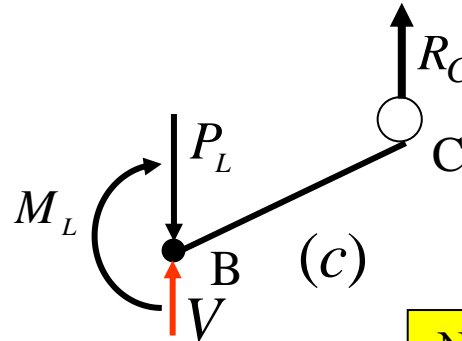
**Exemple 5.8 (suite) :**

Analyse du mécanisme montré en (c) :

$$\sum M_A = M_L - 3P_L + 6 R_C = 0$$



$$\sum M_B = M_L - 3 R_C = 0$$



$$P_L = \frac{M_L}{1m} = 199,5 \text{ kN}$$

Ne pas oublier l'effort tranchant.  
Choisir une somme des moments par rapport à un point qui élimine l'effet de l'effort tranchant

La charge limite est la plus petite  $P_L = 136,5 \text{ kN}$

## 5.4.2 Analyse limite des poutres en flexion ordinaire (exercice 1)

Pour le montage illustré, on donne les propriétés suivantes :

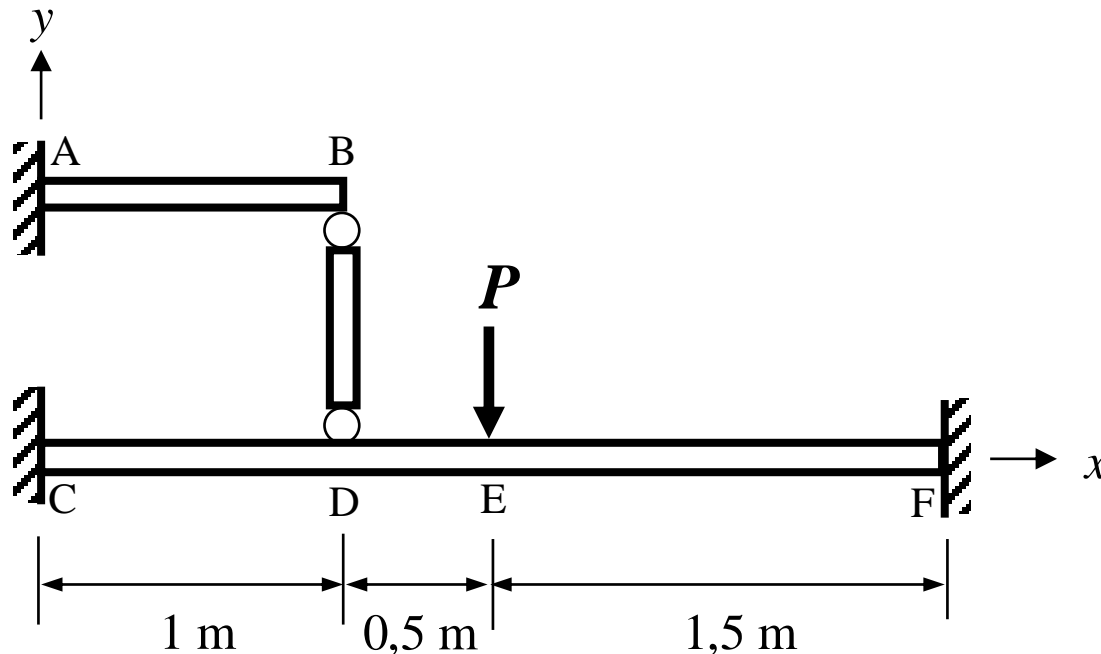
Poutre AB :  $Z_z = 75 \times 10^3 \text{ mm}^3$

Poutre CF :  $Z_z = 150 \times 10^3 \text{ mm}^3$

Tige BD :  $A = 100 \text{ mm}^2$

Le montage est fait d'acier doux dont  $S_y = 250 \text{ MPa}$ . On demande de :

- dessiner tous les mécanismes possibles d'effondrement plastique de cette structure;
- calculer la charge limite de ces mécanismes.



# Section 5 : Comportement au-delà du domaine élastique

- **Objectifs**

- Connaître l'importance des contraintes résiduelles
- Calculer les contraintes et la déformation résiduelles d'une structure soumise à un chargement uniaxial
- Calculer et dessiner la distribution des contraintes résiduelles dans une poutre soumise à un chargement en flexion
- Calculer et dessiner la distribution des contraintes résiduelles dans une structure soumise à un chargement en torsion

## Section 5 : Comportement au-delà du domaine élastique

5.1 Introduction et modèles pour l'étude du comportement des matériaux

5.2 Application de l'analyse limite au chargement uniaxial

5.2.1 Analyse élastique

5.2.2 Comportement au-delà du domaine élastique

5.2.3 Analyse limite

5.2.4 Comparaison entre l'analyse limite et l'analyse élastique

5.3 Application de l'analyse limite à la torsion

5.4 Application de l'analyse limite à la flexion

5.4.1 Moment limite

5.4.2 Analyse limite des poutres

5.5 Contraintes résiduelles

## 5.5 Contraintes résiduelles

- **Définition:** Contrainte qui existe dans une pièce alors qu'aucun chargement n'y est appliqué
- Pour qu'il y ait des contraintes résiduelles, il a fallu, que dans l'histoire de la pièce, une partie ait été **déformée plastiquement**
- Peuvent être bénéfiques ou nuisibles pour les pièces mécaniques
  - En tension à la surface
    - **Nuisibles** : contribuent à l'initiation et à la propagation des fissures
  - En compression à la surface :
    - **Bénéfiques**: retardent l'initiation et la propagation des fissures.
  - Sous la surface
    - S'additionnent aux contraintes induites dans la pièce par les forces extérieures
    - Leur intensité et la sévérité du chargement sur la pièce indiquent si elles doivent être prises en compte



## 5.5 Contraintes résiduelles

### Origine des contraintes résiduelles

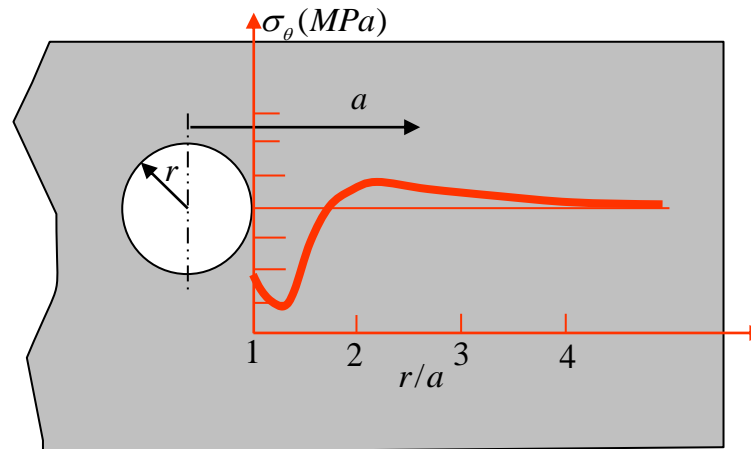
- Procédés d'usinage par enlèvement mécanique de matériau (usinage par tour, fraiseuse, rectifieuse)
  - Laissent des contraintes résiduelles de **tension en surface**.
  - L'épaisseur de la couche affectée dépend de l'intensité du procédé.
- Procédés de forgeage, d'étirage, de laminage, d'injection
  - Laissent des contraintes résiduelles importantes en surface en **tension ou en compression**.
  - Peuvent parfois prendre une proportion importante par rapport à celles induites par les forces extérieures.
- Un choix judicieux du procédé de mise en forme
  - Peut diminuer les contraintes résiduelles indésirables
  - Sinon le recuit est le moyen le plus courant et le plus économique pour éliminer les contraintes résiduelles indésirables

## 5.5 Contraintes résiduelles

- Certains procédés ont comme objectif d'induire des contraintes résiduelles de **compression bénéfiques à la surface** de la pièce.
  - Grenailage (Shot Peening) et le roulage (rolling).

### Exemple: Écrouissage

Dans l'assemblage des structures aéronautiques rivetées, les trous de rivets sont écrouis afin d'induire des contraintes résiduelles en **compression sur les parois du trou**, ce qui améliore la vie en fatigue



## 5.5 Contraintes résiduelles

- Calculs des contraintes résiduelles pour un matériau élastique-parfaitement plastique
- Calculs pour 3 types de chargements
  - Chargement uniaxial
  - Flexion
  - Torsion

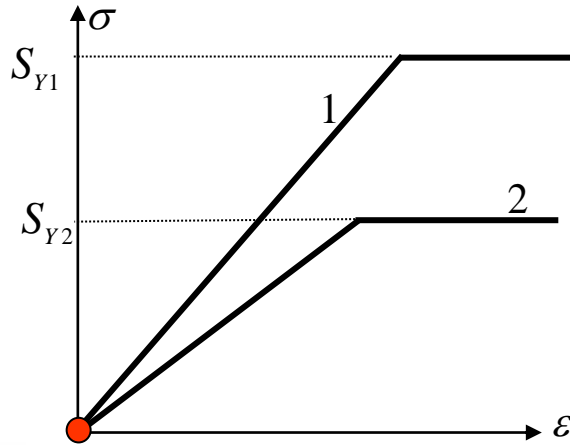
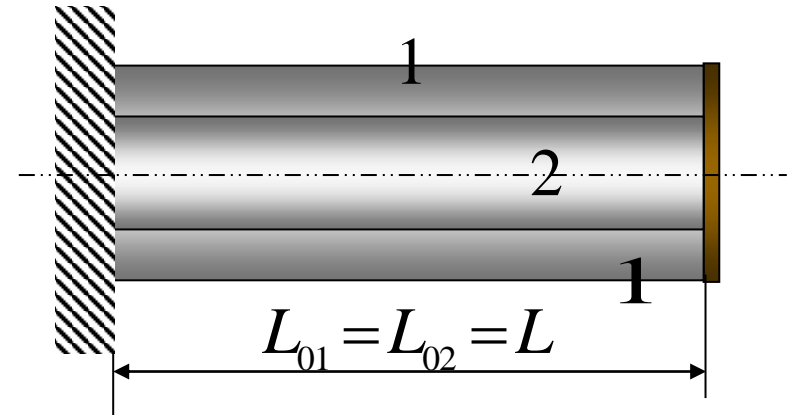
### Méthode de solution

1. Lors du chargement, il y a comportement élastique et élasto-plastique
2. Lors du déchargement, on suppose qu'il y a comportement élastique parfait des matériaux
3. Les contraintes résiduelles sont auto-équilibrées

# 5.5 Contraintes résiduelles : Chargement uniaxial

## Exemple 5.9 :

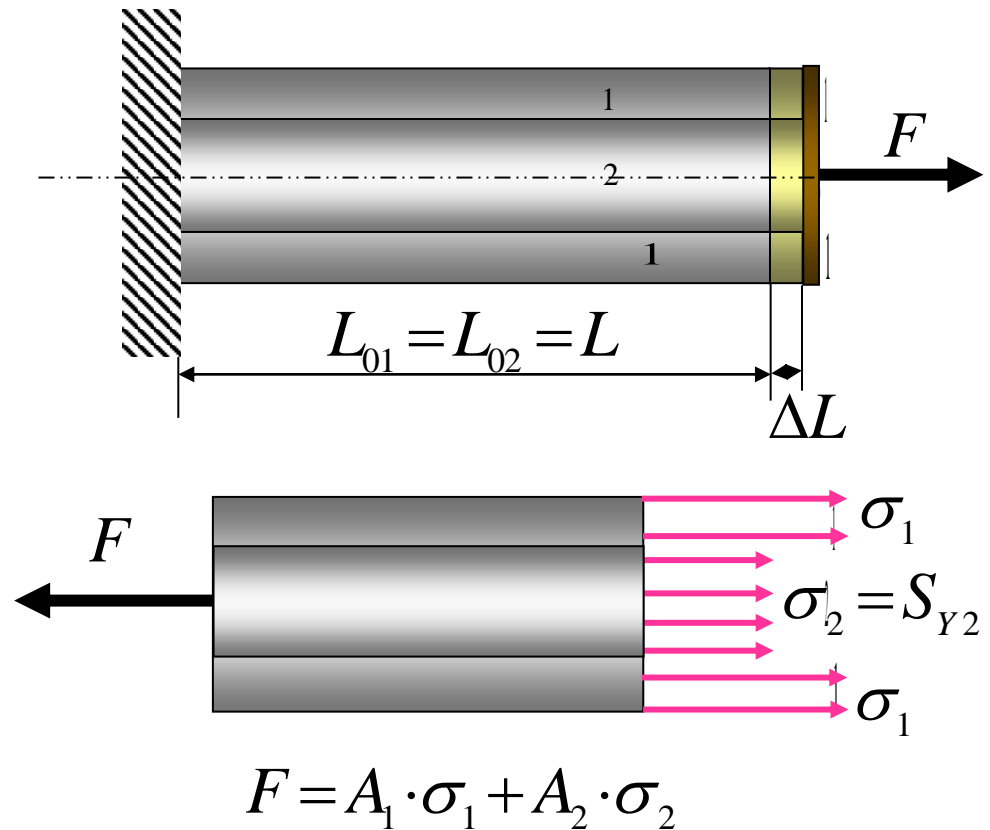
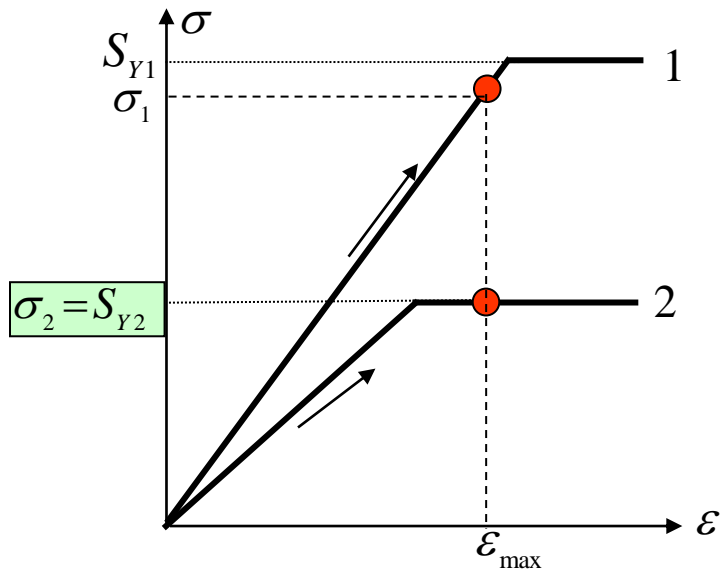
- Deux barreaux concentriques solidaires
- Alliages différents,  $S_{Y1} > S_{Y2}$
- $E_1 > E_2$
- Aires  $A_1 \neq A_2$
- Longueurs initiales  $L_{01} = L_{02}$
- Allongements  $\Delta L_1 = \Delta L_2$



### Exemple 5.9 (suite) :

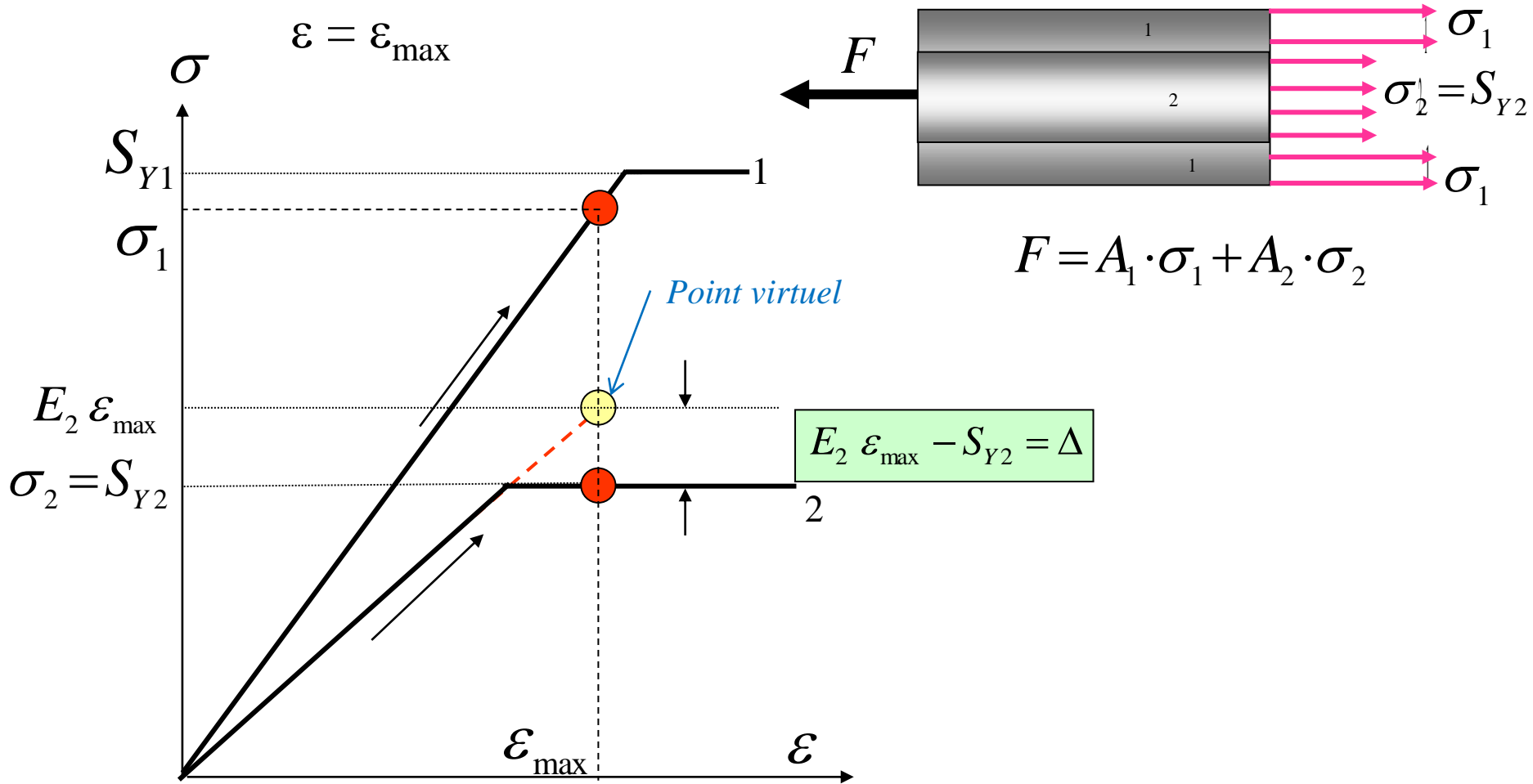
Application d'une force  $F$  telle que  $\sigma_2 = S_{Y2}$  et  $S_{Y2} < \sigma_1 < S_{Y1}$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max}$$



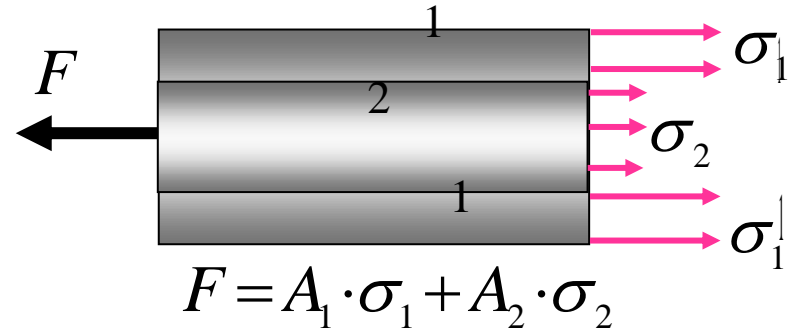
**Exemple 5.9 (suite) :**

Application d'une force  $F$  telle que  $\sigma_2 = S_{Y2}$  et  $S_{Y2} < \sigma_1 < S_{Y1}$

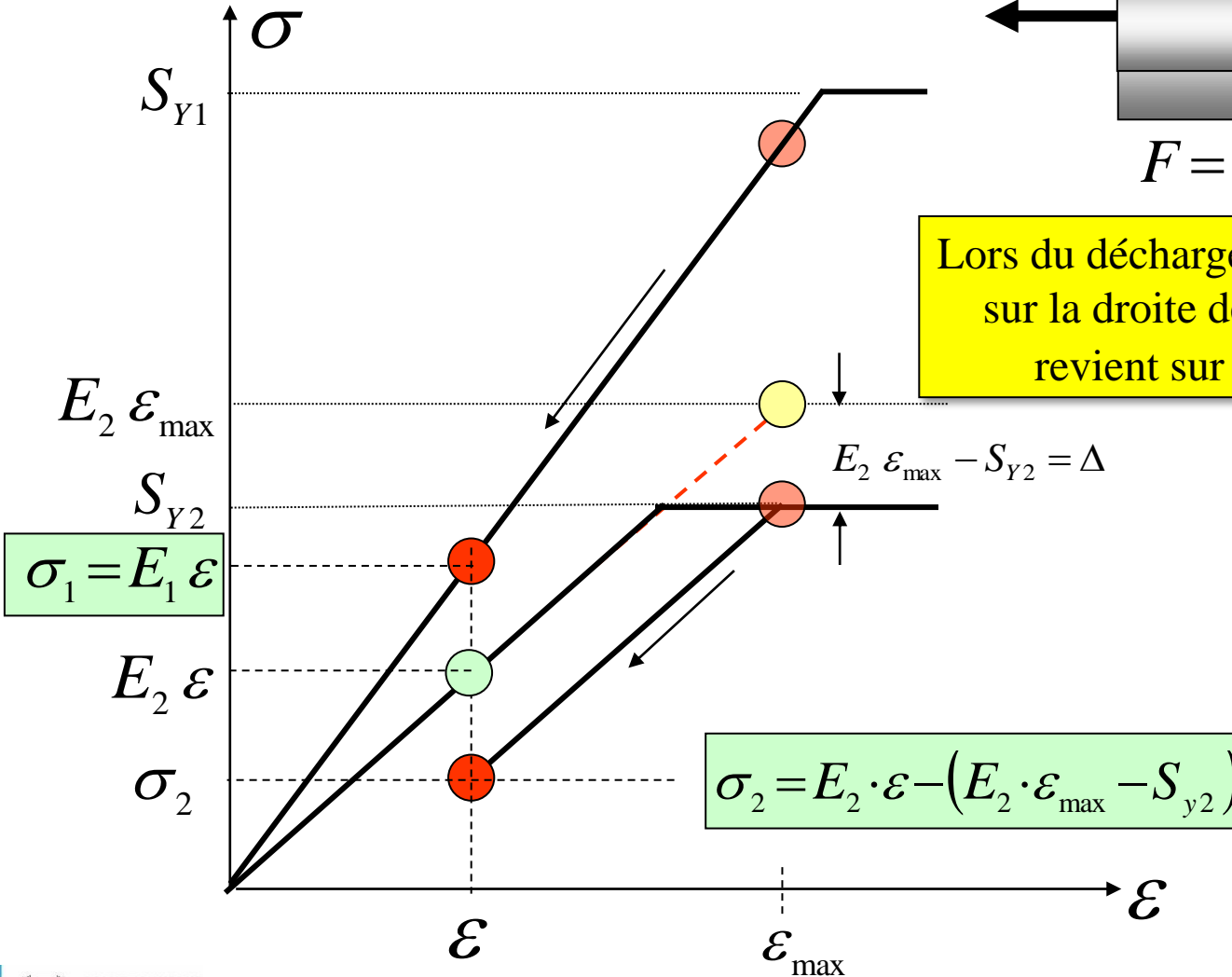


**Exemple 5.9 (suite) :**

**Déchargement en gardant  $F > 0$**

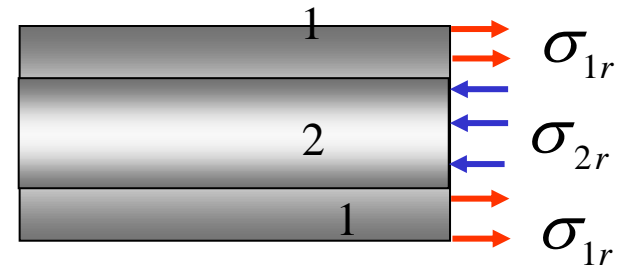
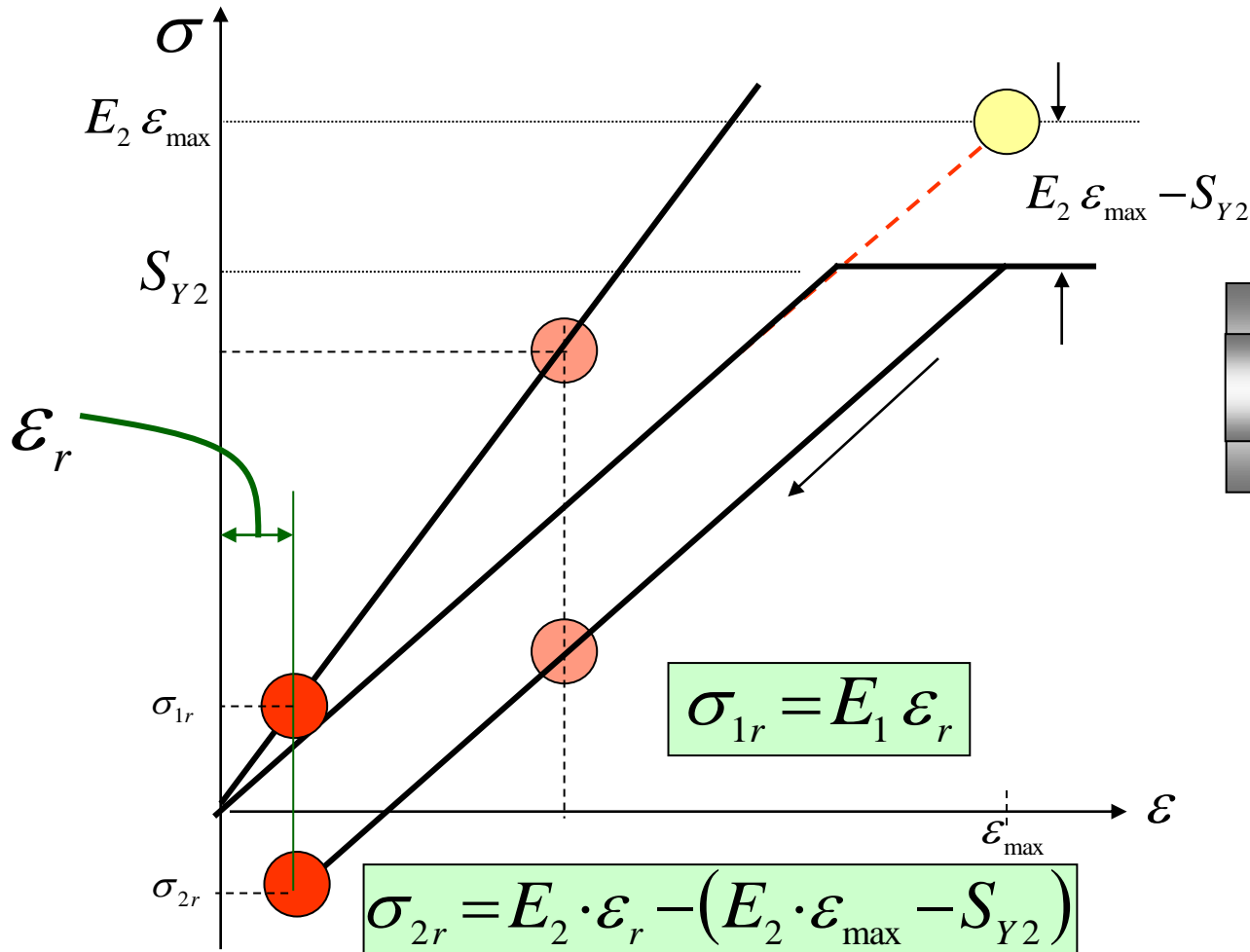


Lors du déchargement, le matériau 1 revient sur la droite de pente  $E_1$ . Le matériau 2 revient sur une droite de pente  $E_2$



Exemple 5.9 (suite) :

Déchargement jusqu'à  $F = 0$



$$F = A_1 \cdot \sigma_{1r} + A_2 \cdot \sigma_{2r} = 0$$



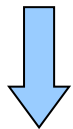
**Exemple 5.9 (suite) :**

**Déchargement jusqu'à  $F = 0$**

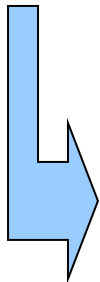
$$\sigma_{2r} = E_2 \cdot \varepsilon_r - (E_2 \cdot \varepsilon_{\max} - S_{Y2})$$

$$+$$

$$\sigma_{1r} = E_1 \varepsilon_r$$

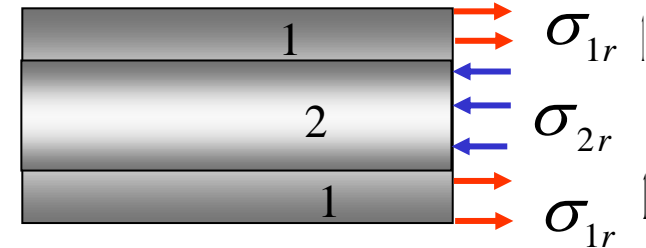


$$F = A_1 \cdot \sigma_{1r} + A_2 \cdot \sigma_{2r} = 0$$



$$A_1 E_1 \cdot \varepsilon_r + A_2 \cdot E_2 \cdot \varepsilon_r - A_2 \cdot E_2 \cdot \varepsilon_{\max} + A_2 \cdot S_{Y2} = 0$$

$$\varepsilon_r = \frac{A_2 (E_2 \cdot \varepsilon_{\max} - S_{Y2})}{A_1 E_1 + A_2 \cdot E_2} \quad ; \sigma_{1r} = E_1 \cdot \varepsilon_r \quad ; \sigma_{2r} = -\frac{A_1}{A_2} \sigma_{1r}$$



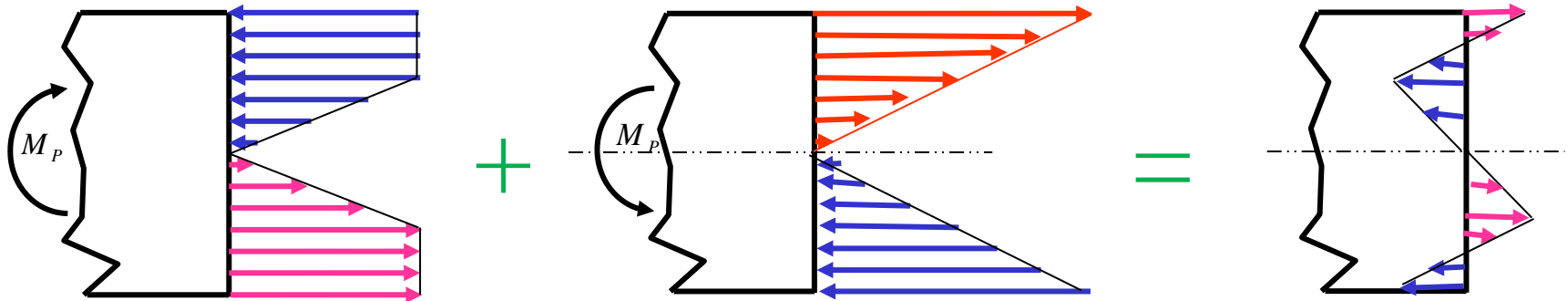
$\varepsilon_r$  est **toujours** calculé à partir de la contrainte résiduelle dans le matériau qui est resté dans le domaine **élastique**.

Dans ce cas-ci,  $\varepsilon_r = \sigma_{1r} / E$

# 5.5 Contraintes résiduelles: chargement en flexion

## • Concept

- Trois étapes: chargement, déchargement et superposition des contraintes
- On suppose matériau élastique-parfaitement plastique



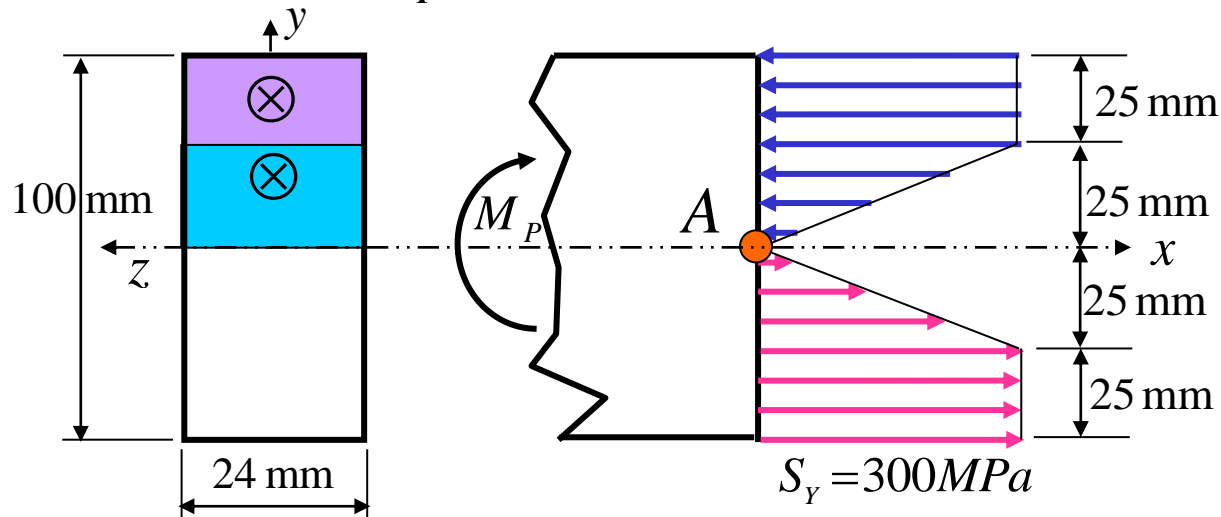
Lors du *chargement*,  
il y a comportement **élastique**  
**et élasto-plastique**

Lors du *déchargement*,  
on suppose qu'il y a  
**comportement élastique** parfait  
des matériaux

Au *repos*,  
les contraintes résiduelles  
sont **auto-équilibrées**

## 5.5 Contraintes résiduelles: chargement en flexion

**Exemple 5.10 :** Calculer les contraintes résiduelles après que le moment  $M_P$  illustré ici ait été enlevé



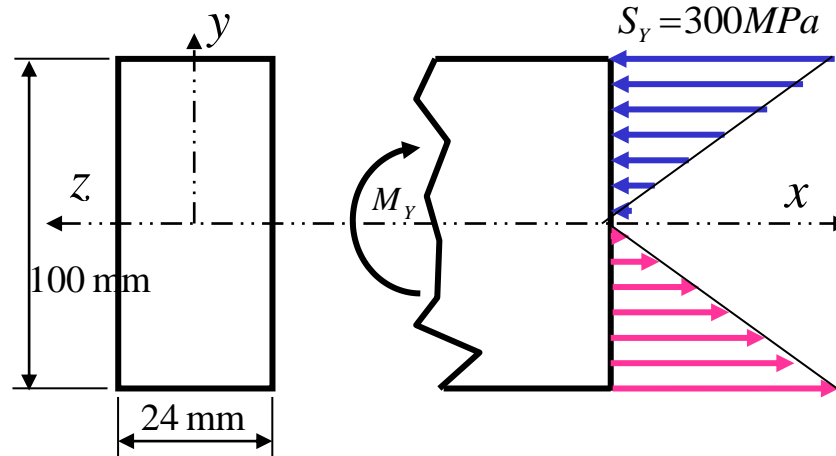
Calcul  $M_P$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ &= -M_P + 2 \cdot \left[ (24 \cdot 25) \cdot \left( 25 + \frac{25}{2} \right) + \frac{1}{2} (24 \cdot 25) \cdot \frac{2}{3} \cdot 25 \right] \text{mm}^3 \cdot 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 0 \end{aligned}$$

$$M_P = 16,5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 16,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

## 5.5 Contraintes résiduelles: chargement en flexion

**Exemple 5.10 (suite) :** Vérification que  $M_Y < M_P < M_L$



Calcul  $M_Y$

$$M_Y = S_z \cdot S_Y$$

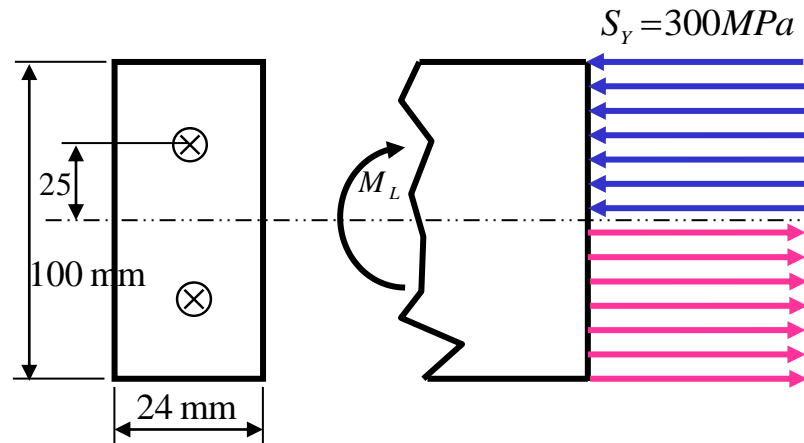
$$S_z = \frac{I}{c} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{(24 \cdot 100^2)}{6} = 40 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S_Y = 300 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad M_Y = 40 \times 10^3 \text{ mm}^3 \cdot 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_Y = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} < M_P = 16,5 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow \text{OK}$$

# 5.5 Contraintes résiduelles: chargement en flexion

**Exemple 5.10 (suite) :** Vérification que  $M_Y < M_P < M_L$



Calcul  $M_L$

$$M_L = Z \cdot S_Y$$

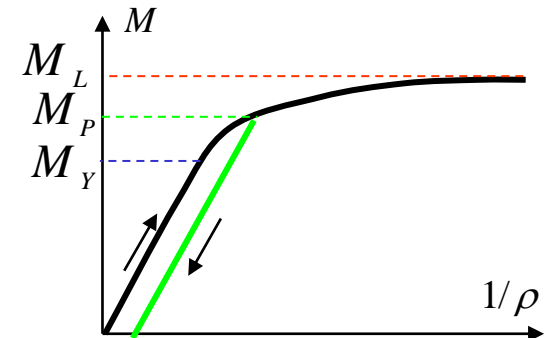
$$Z_z = \sum A_i \cdot |y_i|$$

$$Z_z = 2 \left[ (24 \cdot 50) \frac{50}{2} \right] = 24 \cdot 50^2$$

$$Z_z = 60 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S_Y = 300 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow M_L = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

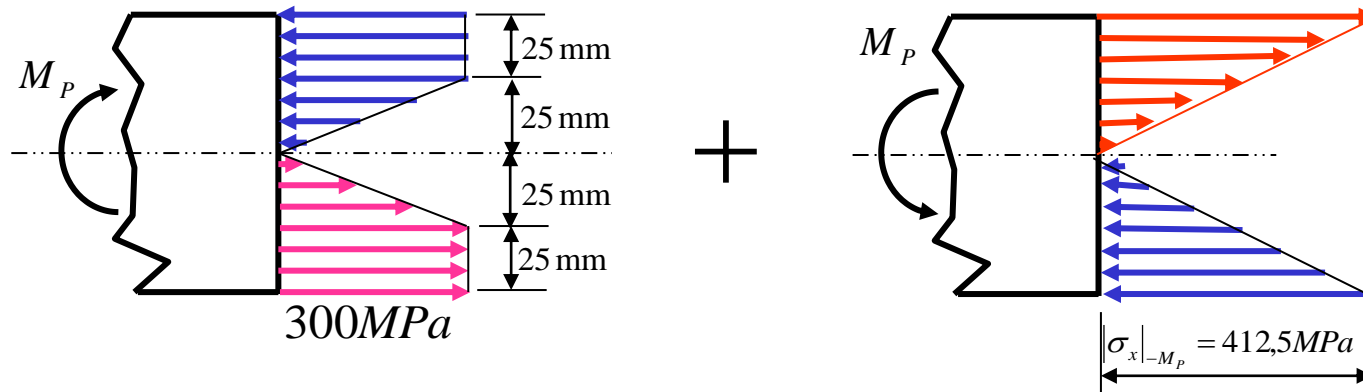


$$M_P = 16,5 \text{ kN} \cdot \text{m} < M_L = 18 \text{ kN} \cdot \text{m} \Rightarrow OK$$

## 5.5 Contraintes résiduelles: chargement en flexion

### • Exemple 5.10 (suite) :

- L'état de contraintes dans la section à  $M = 0$  se calcule en superposant l'état de contraintes associé à un moment  $-M_p$  à celui induit par  $M_p$ .
- Lors du déchargement, le matériau a un comportement parfaitement linéaire.



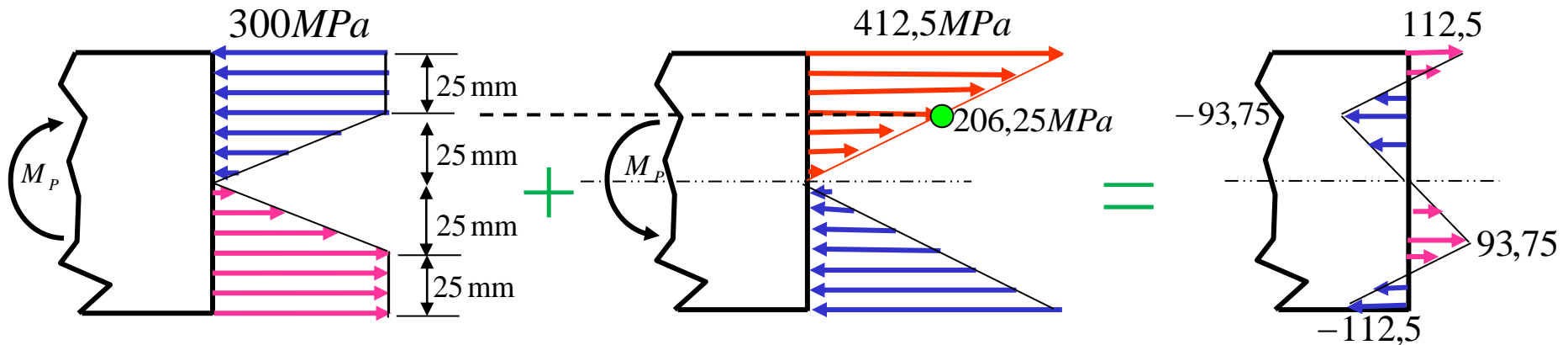
Calcul de  $\sigma_x$  à la fibre extrême pour un matériau élastique linéaire

$$|\sigma_x|_{-M_p} = \frac{M_p}{S_z} = \frac{16,5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{40 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 412,5 \text{ MPa}$$

# 5.5 Contraintes résiduelles: chargement en flexion

## Exemple 5.10 (suite) :

- Superposition des contraintes (addition vectorielle aux points importants)



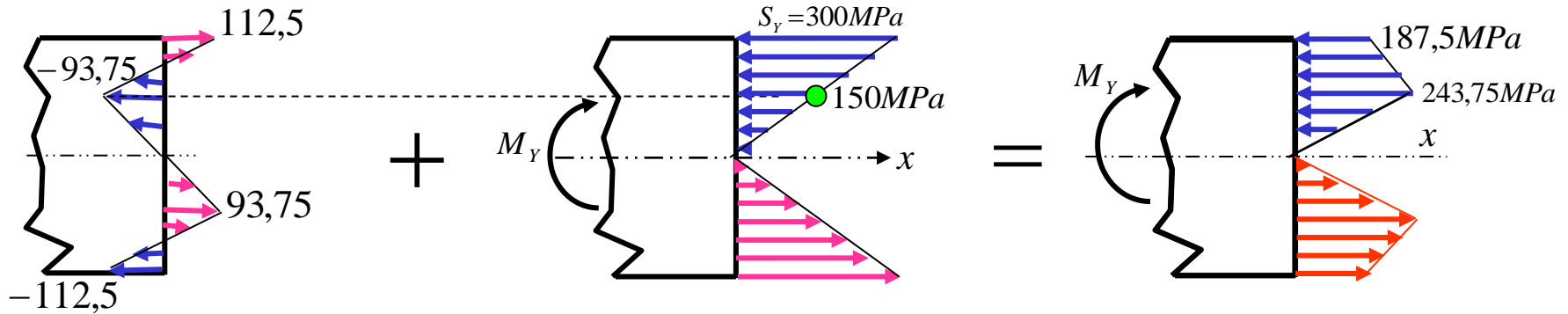
Lors du *chargement*,  
il y a comportement **élastique**  
**et élasto-plastique**

Lors du *déchargement*,  
on suppose qu'il y a  
**comportement élastique** parfait  
des matériaux

Au *repos*,  
les contraintes résiduelles  
sont **auto-équilibrées**

# 5.5 Contraintes résiduelles: chargement en flexion

- Exemple 5.10 (suite) : Si on recharge à  $M_Y$

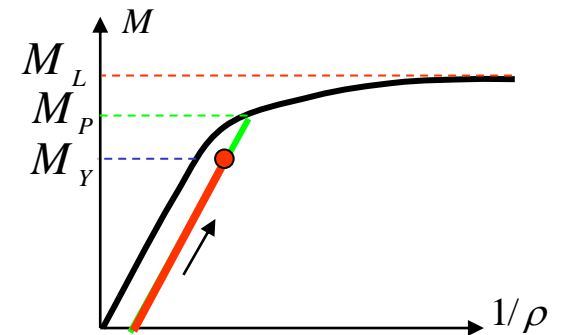


Au repos avec présence de contraintes résiduelles

Application d'un nouveau chargement externe (ici,  $M_Y$ )

Effet bénéfique des contraintes résiduelles (pas d'écoulement)

À cause des contraintes résiduelles présentes dans la section avant de recharger, on ne retrouve, en aucun point de la section, une contrainte égale ou supérieure à celle que l'on aurait eu si les contraintes résiduelles n'avaient pas été présentes. Il faut recharger à  $M_p$  pour retrouver  $S_Y$  dans la section.





# Photoélasticité pour mesurer les contraintes

## Principe

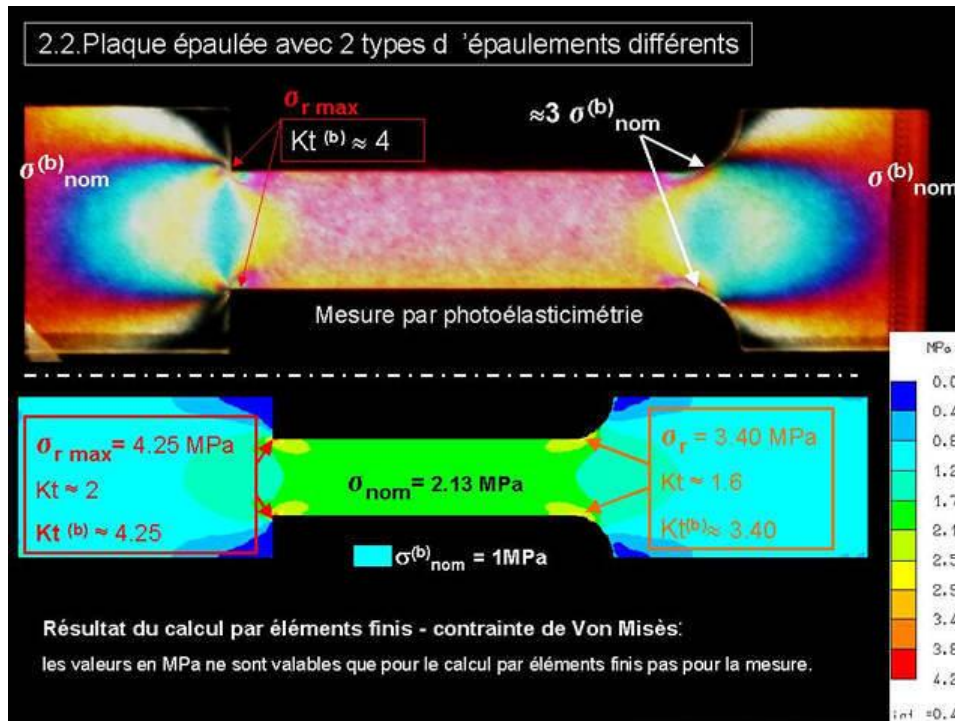
- Basée sur les propriétés de **biréfringence** d'un matériau
  - **Indice de réfraction  $n$ 'est pas unique** mais **dépend de la direction de polarisation** de l'onde incidente lorsque le matériau est déformé
- Les contraintes/déformations au sein du matériau introduisent un déphasage qui dépend
  - Intensité des contraintes
  - Épaisseur du matériau
- Il se produit des “extinctions” pour certaines longueurs d'onde (dépendamment du matériau et de la contrainte) d'où les bandes de couleurs observées.

Réf.:

- <https://en.wikipedia.org/wiki/Photoelasticity>
- MEC64605-LAB5: Photoélasticité bidimensionnelle



Modèle photoélastique d'une plaque trouée chargée en tension uniaxiale (MEC6405: Analyse expérimentale des contraintes)



Source: Formationtech.tv