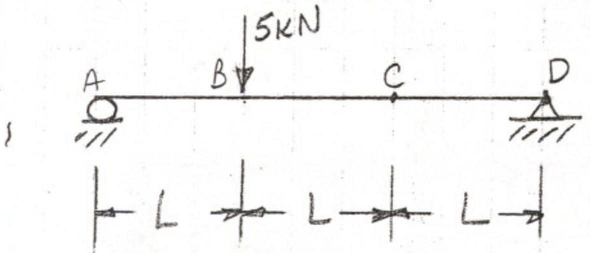
Chapitre 14 - Méthodes énergétiques (1)
ou Chapitre 11 - Énergie de déformation

Application du théorème de Castigliano à un problème <u>isostatique</u>.

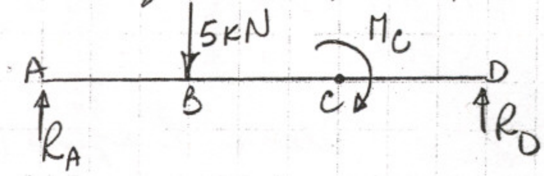


Question : déterminez la rotation de la poutre au point C ($\theta_C = ?$)

Solution : $\theta_C = \left.\dfrac{\partial U}{\partial M_C}\right|_{M_C=0}$

A) Équilibre avec chargement fictif :

- il faut appliquer un moment fictif en C ($M_C = 0$)



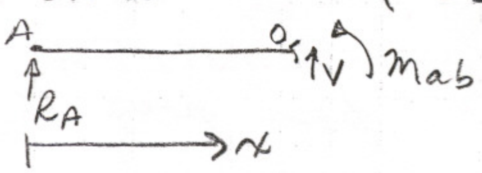
- il faut calculer les réactions en prenant en compte le chargement réel (5kN) et le chargement fictif (M_C) =>

- $\Sigma F_y = 0 = R_A - 5 + R_D = 0$ (1) ; $\overset{\curvearrowleft +}{\Sigma M_A^T} = 0 = -5L - M_C + R_D \cdot 3L$ (2)

- éqns (1) et (2) => $R_A = 10/3 - M_C/3L$; $R_D = \dfrac{5}{3} + \dfrac{M_C}{3L}$

B) Moments fléchissants

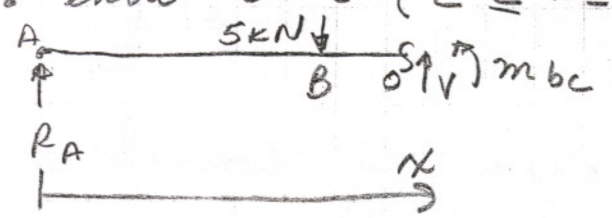
- entre A et B ($0 \le x \le L$) :



$\overset{\curvearrowleft +}{\Sigma M_O^T} = 0 = m_{ab} - R_A \cdot x = 0$

$m_{ab} = \left(\dfrac{10}{3} - \dfrac{M_C}{3L}\right) x$

- entre B et C ($L \le x \le 2L$)

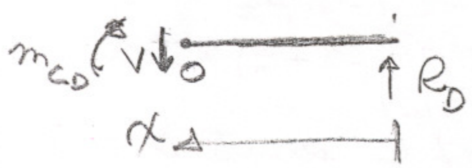


$\overset{\curvearrowleft +}{\Sigma M_O^T} = 0 = m_{BC} - R_A \cdot x + 5(x - L)$

$m_{bc} = R_A \cdot x - 5(x - L)$

$= \left(\dfrac{10}{3} - \dfrac{M_C}{3L}\right) x - 5(x - L)$

- entre C et D ($0 \le x \le L$) note : on change de repère



$\overset{\curvearrowright +}{\Sigma M_O^T} = 0 = m_{CD} - R_D \cdot x$

$m_{CD} = R_D \cdot x = \left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{M_C}{3L}\right) \cdot x$

$$\theta_c = \left.\frac{\partial U}{\partial M_c}\right|_{M_c=0} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^L m_{ab}\frac{\partial m_{ab}}{\partial M_c}\,dx + \int_L^{2L} m_{bc}\frac{\partial m_{bc}}{\partial M_c}\,dx + \int_0^L m_{co}\frac{\partial m_{co}}{\partial M_c}\,dx\right] \quad \text{avec } M_c = 0$$

$$\theta_c = \left.\frac{\partial U}{\partial M_c}\right|_{M_c=0} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^L \left(\frac{10}{3} - \frac{M_c}{3L}\right) x \left(\frac{-x}{3L}\right) dx + \int_L^{2L} \left[\left(\frac{10}{3} - \frac{M_c}{3L}\right) x - 5(x-L)\right]\left[\frac{-x}{3L}\right] dx + \int_0^L \left(\frac{5}{3} + \frac{M_c}{3L}\right) x \left(\frac{x}{3L}\right) dx\right\} \quad (3)$$

On peut maintenant poser $M_c = 0$ dans l'éqn (3) :

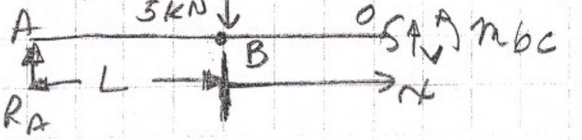
$$\theta_c = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^L \left(\frac{10}{3}x\right)\left(\frac{-x}{3L}\right) dx + \int_L^{2L} \left(\frac{10}{3}x - 5x + 5L\right)\left(-\frac{x}{3L}\right) dx + \int_0^L \left(\frac{5}{3}x\right)\left(\frac{x}{3L}\right) dx\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ \left.\frac{-10}{9L}\frac{x^3}{3}\right|_0^L + \left.\frac{5}{3\times 3L}\frac{x^3}{3}\right|_L^{2L} - \left.\frac{5L}{3L}\frac{x^2}{2}\right|_L^{2L} + \left.\frac{5}{9L}\frac{x^3}{3}\right|_0^L \right.$$

$$= \frac{-25}{18}\frac{L^2}{EI}$$ i.e dans le sens de rotation opposé à celui posé pour M_c

(unités : $N.\dfrac{m^2}{\frac{N}{m^2} * m^4}$ => non-dimensionnel car $\theta : \dfrac{dv}{dx}$)

Note : Nous aurions pu considérer un nouveau repère entre B et C (origine en B) :



$$\overset{\circlearrowleft +}{\Sigma M_O} = 0 = m_{bc} + 5\cdot x - R_A(x+L)$$

$$m_{bc} = R_A(x+L) - 5x = \left(\frac{10}{3} - \frac{M_c}{3L}\right)(x+L) - 5x$$

Dans ce cas, les bornes d'intégration entre B et C seront 0 et L