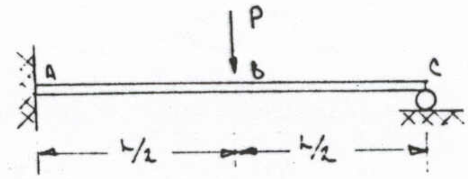
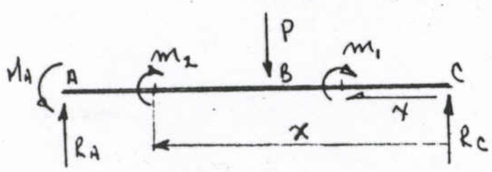
11.4 Une poutre encastrée à l'une de ses extrimités et simplement supportée à l'autre est chargée tel qu'illustré. Calculer:
a) les réactions aux appuis de cette poutre.
b) la pente de cette poutre au point B.



SOLUTION



$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M_A = \frac{1}{2}PL - R_C L$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A = P - R_C$

PROBLÈME HYPERSTATIQUE

$R_C \rightarrow$ INCONNUE À DÉTERMINER

$0 < x < L/2 \rightarrow m_1 = R_C x$

$L/2 < x < L \rightarrow m_2 = R_C x - P(x - L/2)$

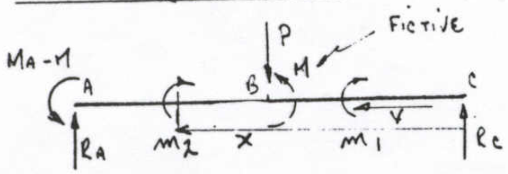
$$U = \int_0^L \frac{m^2}{2EI}\,dx \qquad \delta_C = 0 = \frac{\partial U}{\partial R_C} = \int_0^{L/2} \frac{m_1(\partial m_1/\partial R_C)}{EI}\,dx + \int_{L/2}^{L} \frac{m_2(\partial m_2/\partial R_C)}{EI}\,dx$$

$$\delta_C = 0 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}(R_C x)(x)\,dx + \int_{L/2}^{L}[R_C x - P(x - L/2)](x)\,dx\right]$$

$$\frac{R_C L^3}{24} + \frac{R_C L^3}{3} - \frac{R_C L^3}{24} - P\left(L^3/3 - L^3/24 - L^3/4 + L^3/16\right) = 0$$

$$\boxed{R_C = 5/16\,P \qquad M_A = 3/16\,PL \qquad R_A = 11/16\,P}$$

PENTE AU POINT B



$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2} m_1 \overset{0}{(\partial m_1/\partial M)}\,dx + \int_{L/2}^{L} m_2(\partial m_2/\partial M)\,dx\right]$$

$0 < x < L/2 \quad m_1 = R_C x$

$L/2 < x < L \quad m_2 = R_C x - P(x - L/2) + M$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}[R_C x - P(x - L/2) + \overset{0}{M}](1)\,dx$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{R_C}{2}\left(L^2 - L^2/4\right) - P\left[\frac{1}{2}\left(L^2 - L^2/4\right) - \frac{L}{2}(L - L/2)\right]\right]$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{3R_C L^2}{8} - \frac{PL^2}{8}\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{16}PL^2 - \frac{PL^2}{8}\right]$$

$$\boxed{\theta_B = -\frac{PL^2}{128EI}}$$

<u>REMARQUE SUR L'UTILISATION DES FORCES FICTIVES</u>

Dans le problème 11.4b nous avons fait appel à une astuce qui à considérablement simplifié la solution.

En considérant uniquement l'effet du moment fictif M, ce moment engendre les réactions hyperstatiques inconnues indiquées sur la figure (b). Normalement ces réactions devraient être déterminées en utilisant une méthode de calcul semblable à celle utilisée dans le problème 11.4a.

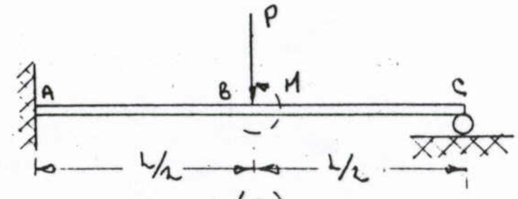
Pour éviter ces calculs laborieux nous avons ajouté, en plus du moment fictif M, les forces fictives F (inconnues) que nous avons choisies égales et opposées aux réactions hyperstatiques R inconnues (fig. c). Le résultat net de cette opération est illustré sur la figure d. Ainsi, seule la réaction M (connue) à l'encastrement A, suffit pour équilibrer toutes les charges fictives.

Cette astuce extrêmement utile peut être généralisée en formulant la règle suivante.

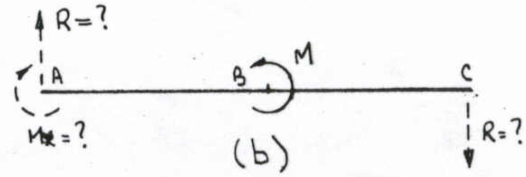
Les charges fictives appliquées sur un système hyperstatique, peuvent êtres équilibrées de plusieurs façons différentes, <u>aux points d'appuis du système</u>. On choisira évidemment la façon qui convient le mieu.

Il est à noter qu'à un point d'appui, le déplacement et la rotation, dans le cas d'un encastrement, sont nuls. Les réactions fictives à ces points ne contribuent donc pas à l'énergie de déformation du système.

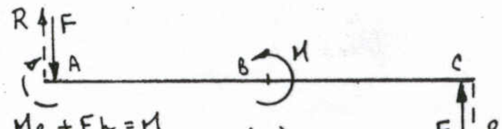
Pour illustrer davantage cette règle, reprenons le problème 11.4b, en équilibrant cette fois-ci le moment fictif au point B de la poutre, par des réactions égales à M/L aux points d'appui A et C. (fig. e)



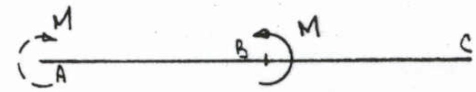
(a)



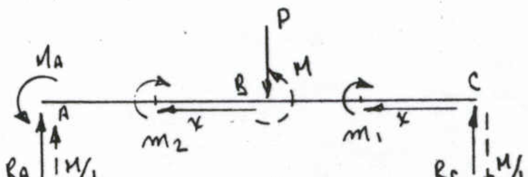
(b)



(c)



(d)



(e)

$$\theta_B = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2} m_1(\partial m_1/\partial M)\,dx + \int_{L/2}^{L} m_2(\partial m_2/\partial M)\,dx\right]$$

$$m_1 = (R_C - M/L)x \qquad 0<x<L/2$$

$$m_2 = (R_C - M/L)x + M - P(x - L/2) \qquad L/2<x<L$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left[(R_C - M/L)x\right](-x/L)\,dx + \int_{L/2}^{L}\left[(R_C - M/L)x + M - P(x-L/2)\right](-x/L+1)\,dx$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[-\frac{R_C L^2}{24} - \frac{7R_C L^2}{24} + \frac{3R_C L^2}{8} - P\left(-\frac{7L^2}{24} + \frac{3L^2}{16} + \frac{3L^2}{8} - \frac{L^2}{4}\right)\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{R_C L^2}{24} - \frac{PL^2}{48}\right]$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{5P}{16}\frac{L^2}{24} - \frac{PL^2}{48}\right] = -\frac{PL^2}{128\,EI}$$