
MÉTHODES D'ANALYSE BASÉES SUR L'ÉNERGIE DE DÉFORMATION (MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES)

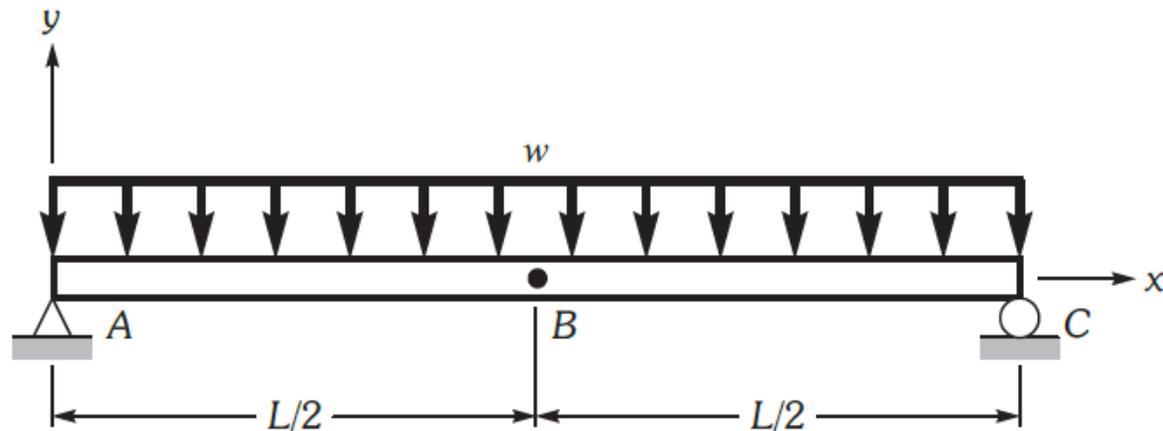
Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.1

Une poutre de longueur L est simplement supportée à ses deux extrémités et soumise à une charge w uniformément distribuée. Calculer le déplacement vertical de la section en B et l'angle de rotation de la section en A , en fonction des paramètres suivants : module d'élasticité E , second moment de section I par rapport à z et longueur L .

Réponses :

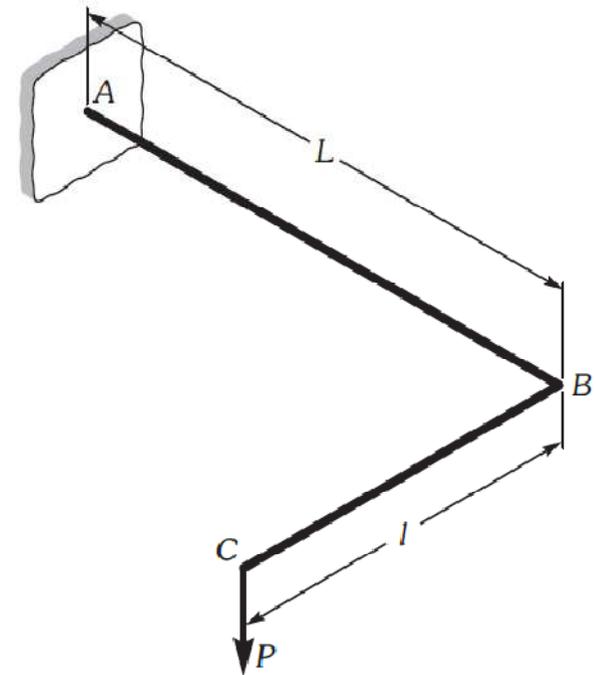
$$v_B = \frac{5wL^4}{384EI}; \theta_A = \frac{wL^3}{24EI}.$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.2

Le système illustré est composé de deux membrures ayant les mêmes propriétés : module d'élasticité E , module de cisaillement G , second moment de section I par rapport à un diamètre et second moment polaire J . Le joint B est rigide. Déterminer le déplacement vertical de l'extrémité C de cette structure, en fonction de la charge verticale P et des autres caractéristiques du système.



Réponses :

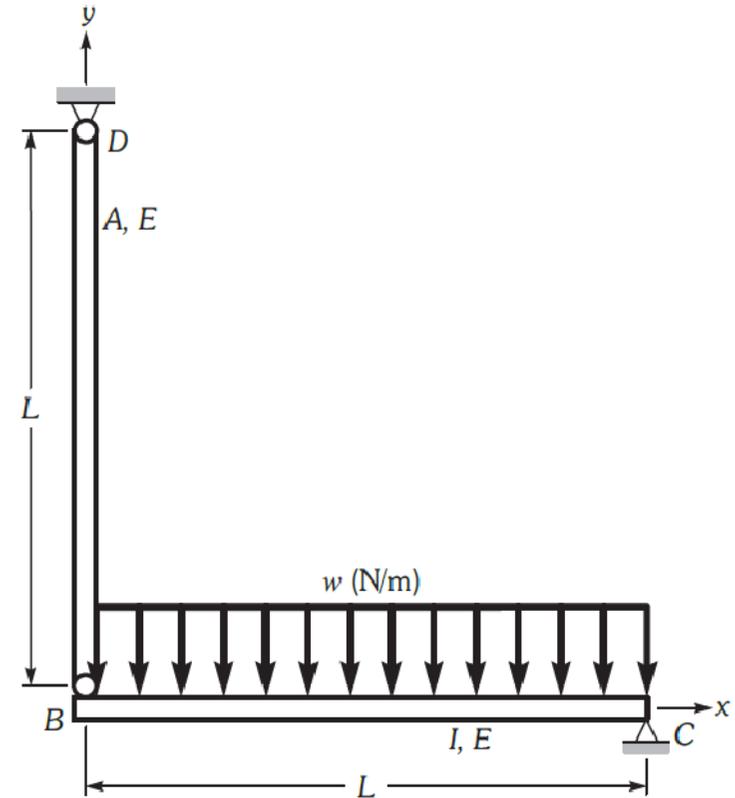
$$\delta_C = \frac{P(L^3 + l^3)}{3EI} + \frac{Pl^2}{GJ}$$

Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.3

La poutre BC (second moment de section I par rapport à z , module d'élasticité E) de longueur L est simplement supportée en C et retenue en B par un barreau BD (section A , module d'élasticité E). Les joints D et B sont des rotules. On soumet la poutre à une charge w uniformément distribuée.

Calculer, en fonction des paramètres w , A , I , E et L , le déplacement vertical de la section B et l'angle de rotation de la section C de la poutre.



Réponses :

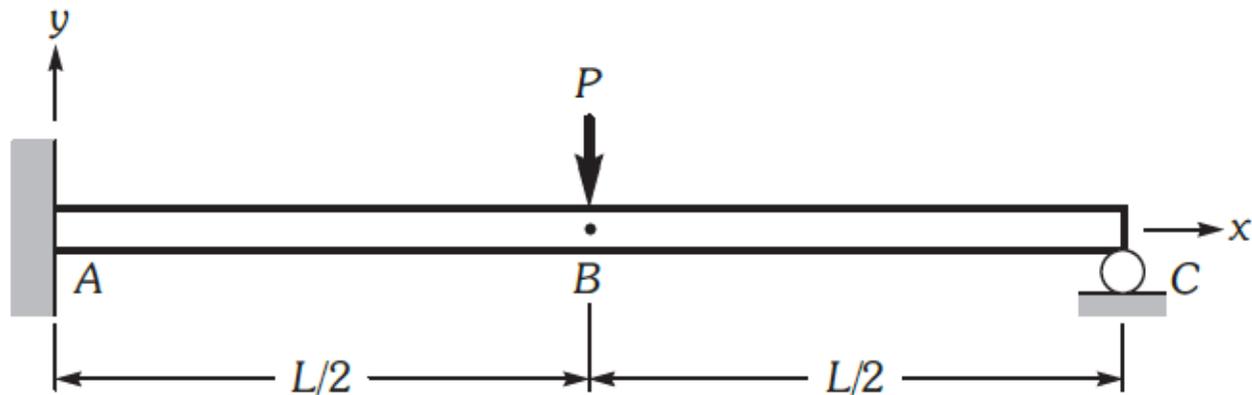
$$\delta_B = \frac{wL^2}{2AE}; \theta_C = \frac{wL^3}{24EI} + \frac{wL}{2AE} \text{ (sens antihoraire).}$$

Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.4

Une poutre ABC (module d'élasticité E , second moment de section I par rapport à z), encadrée en A et simplement supportée en C , est chargée au centre d'une force concentrée P . Calculer :

- les réactions aux appuis A et C ;
- la pente de la courbe élastique à la section en B .



Réponses :

a) $R_C = \frac{5P}{16}$; $R_A = \frac{11P}{16}$; $M_A = \frac{3PL}{16}$ (sens antihoraire).

b) $\theta_B = \frac{PL^2}{128EI}$ (sens horaire)

Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.5

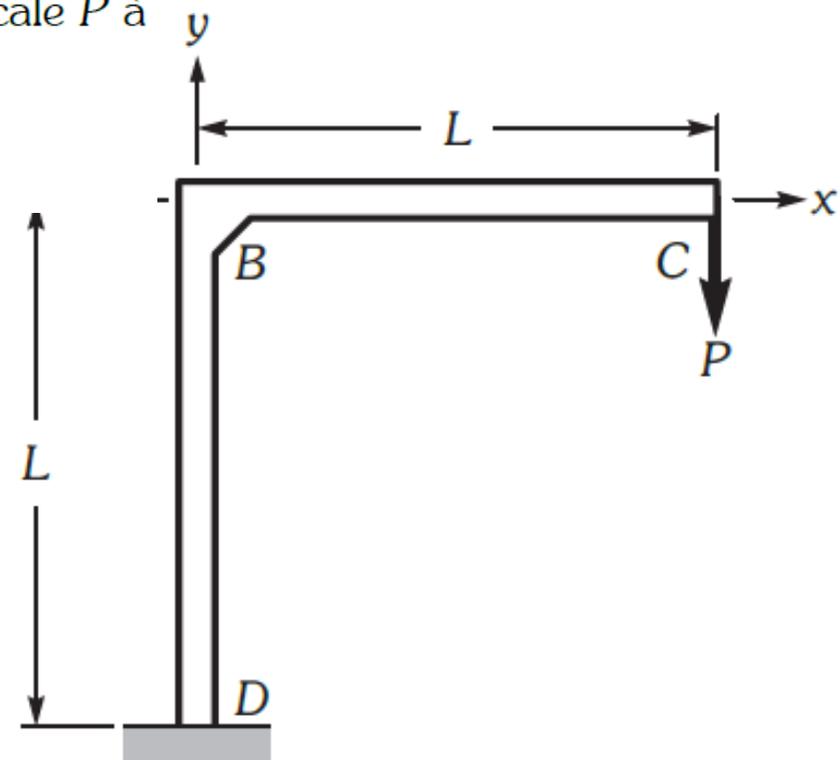
La structure illustrée est composée de deux membrures identiques DB et BC (section droite A , module d'élasticité E), reliées entre elles en B par un joint rigide. L'extrémité D est encastrée. La section des membrures a un second moment I par rapport à z . Si on applique une charge verticale P à l'extrémité C , calculer :

- l'angle de rotation de la section en C ;
- le déplacement vertical de l'extrémité C .

Réponses :

$$\text{a) } \theta_C = \frac{3PL^2}{2EI} \text{ (sens horaire)}$$

$$\text{b) } \delta_C = \frac{PL^3 \left(\frac{4}{3} + \frac{I}{AL^2} \right)}{EI} \text{ (vers le bas)}$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

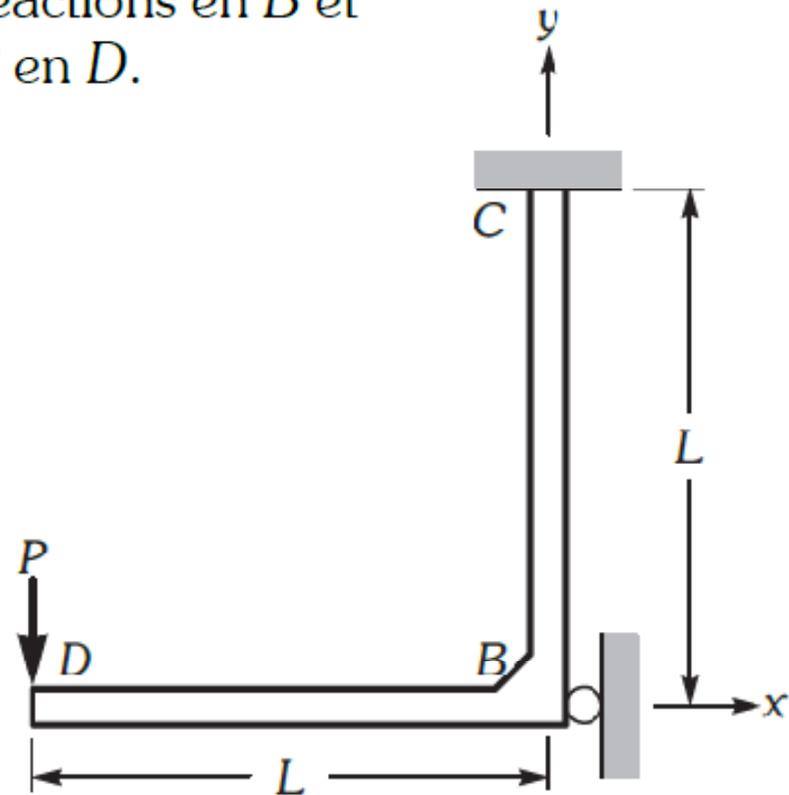
Problème 14.6

Deux membrures identiques BC et BD sont reliées solidement entre elles en B . L'extrémité C est encastree et l'ensemble prend appui en B . Déterminer les réactions en B et en C si on applique une charge verticale P en D .

Réponses :

$$R_{Bx} = \frac{3P}{2} \text{ (vers la gauche)}; R_{Cx} = \frac{3P}{2} \text{ (vers la droite)};$$

$$R_{Cy} = P \text{ (vers le haut)}; M_C = \frac{PL}{2} \text{ (sens antihoraire)}.$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.8

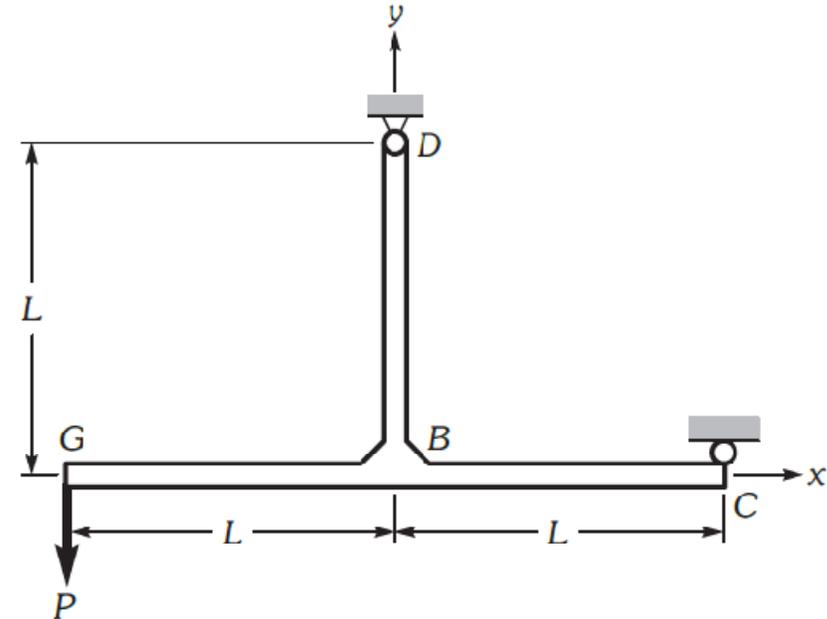
La structure illustrée est retenue par une rotule en D et par un appui simple en C . Le joint B est rigide. Les membrures, qui sont fabriquées du même matériau ayant un module d'élasticité E , ont les mêmes caractéristiques : section A , second moment de surface I par rapport à z et longueur L . Si on applique une charge verticale P à l'extrémité G , trouver, en fonction des caractéristiques de la structure :

- le déplacement horizontal de la section en G ;
- l'angle de rotation du joint B .

Réponses :

$$\text{a) } u_G = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{2PL}{AE} \text{ (vers la droite)}$$

$$\text{b) } \theta_B = \frac{PL^2}{3EI} + \frac{2P}{AE} \text{ (sens antihoraire)}$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.9

Le système illustré est composé d'un élément continu GBC et d'une tige BD . L'extrémité C est encastree et les joints aux extrémités B et D sont des rotules. Toutes les membrures, fabriquées du même matériau ayant un module d'élasticité E , ont les mêmes caractéristiques : A (section), I (second moment de surface par rapport à z) et L (longueur).

Calculer, en fonction des caractéristiques du système :

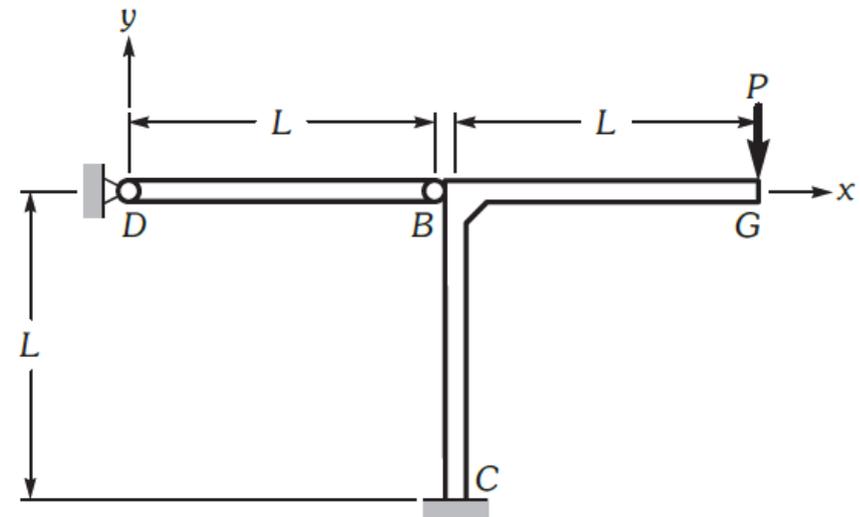
- la réaction en D ;
- l'angle de rotation du joint B de CBG .

Réponses :

$$\text{Posons } \alpha = \frac{I}{AL^2}.$$

$$\text{a) } R_D = \frac{3P}{2(1 + 3\alpha)} \text{ (vers la gauche)}$$

$$\text{b) } \theta_B = \frac{PL^2}{EI} \left[1 - \frac{3}{4(1 + 3\alpha)} \right] \text{ (sens horaire)}$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.10

La structure illustrée est supportée par une rotule en H et par un appui simple en B . Le joint C est rigide. Le matériau utilisé a un module d'élasticité E , et les membrures ont toutes la même section A et le même second moment de surface I par rapport à z .

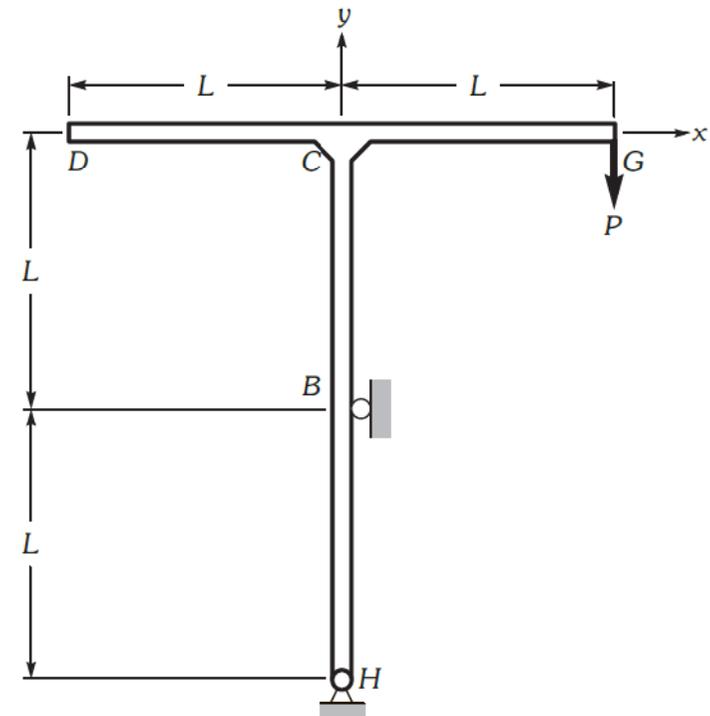
Si on applique une force verticale P en G , calculer, en fonction des caractéristiques de la structure :

- le déplacement horizontal de l'extrémité G ;
- l'angle de rotation de la section en G .

Réponses :

a) $u_G = \frac{5PL^3}{6EI}$ (vers la droite)

b) $\theta_G = \frac{11PL^2}{6EI}$ (sens horaire)



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

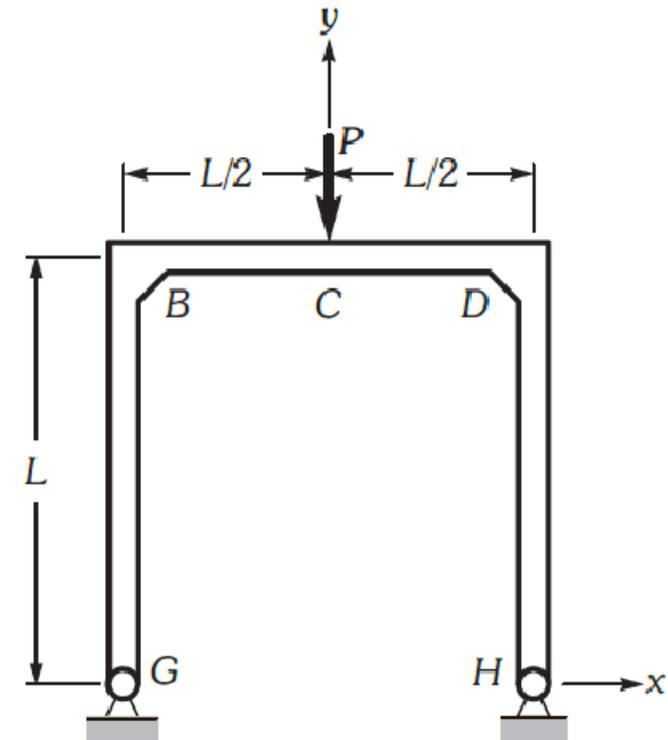
Problème 14.11

Le cadre illustré est composé de trois membrures identiques. Les joints B et D sont rigides, et les extrémités G et H sont supportées par des rotules. Les membrures ont une section A et un second moment de surface I par rapport à z , et le matériau a un module d'élasticité E .

Si on applique une charge P en C , calculer les réactions à l'appui G en fonction des caractéristiques du système.

Réponses :

$$R_y = \frac{P}{2} ; R_x = P \left(\frac{3}{40 + 24 \frac{I}{AL^2}} \right)$$

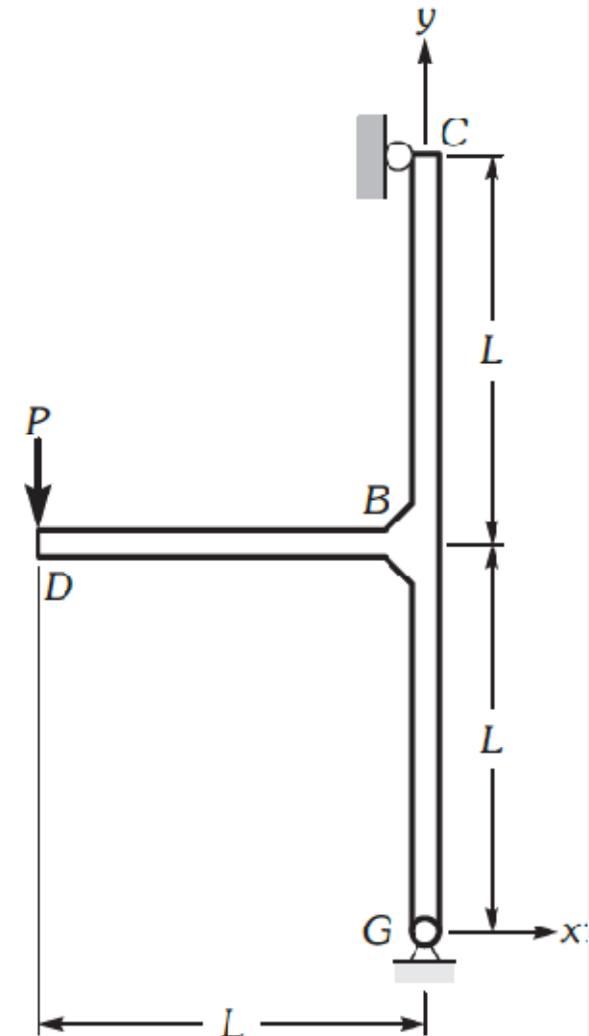


Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.12

Toutes les membrures de la structure illustrée sont identiques : section A , second moment de surface I par rapport à z , longueur L et module d'élasticité E . Le joint B est rigide; l'extrémité G est retenue par une rotule et l'extrémité C est simplement supportée.

Si on applique une charge P en D , calculer le déplacement vertical de l'extrémité D de la structure.



Réponses :

$$v_D = \frac{PL^3}{2EI} + \frac{PL}{AE}$$