



# Section 4 : Méthodes énergétiques

- **Objectifs**
  - Comprendre la définition de l'énergie de déformation
  - Savoir calculer l'énergie de déformation d'une structure soumise à différents chargements
  - Savoir utiliser le théorème de Maxwell-Betti
  - Comprendre la démonstration du théorème de Castigliano



# Énergie de déformation

## 4.1 Énergie de déformation

### 4.4.1 Expression de l'énergie pour un chargement uniaxial

### 4.4.2 Expression de l'énergie pour une force de cisaillement

### 4.4.3 Énergie de déformation élastique pour un chargement général

## Méthodes énergétiques

## 4.2 Cas particuliers

### 4.2.1 Tension

### 4.2.2 Flexion

### 4.2.3 Torsion

## 4.3 Théorème de la réciprocité, de *Maxwell-Betti*

## 4.4 Théorème de *Castigliano*

### 4.4.1 Application aux systèmes isostatiques

### 4.4.2 Application aux systèmes hyperstatiques

## 4.5 Effets de l'effort tranchant



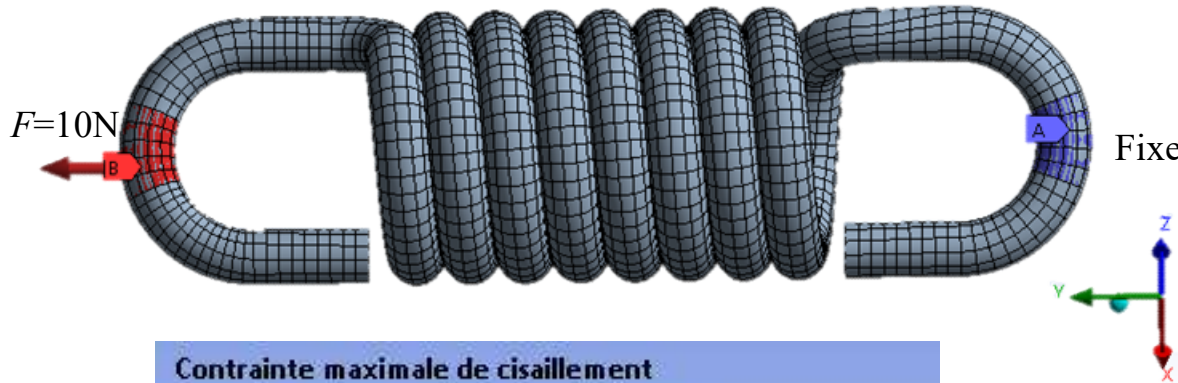
## Méthodes énergétiques

- Théorème de Castigliano est basé sur **l'énergie de déformation** pour calculer
  1. Déplacements (ou rotations) en traction, en flexion et en torsion d'une structure isostatique ou hyperstatique
  2. Réactions d'un système hyperstatique

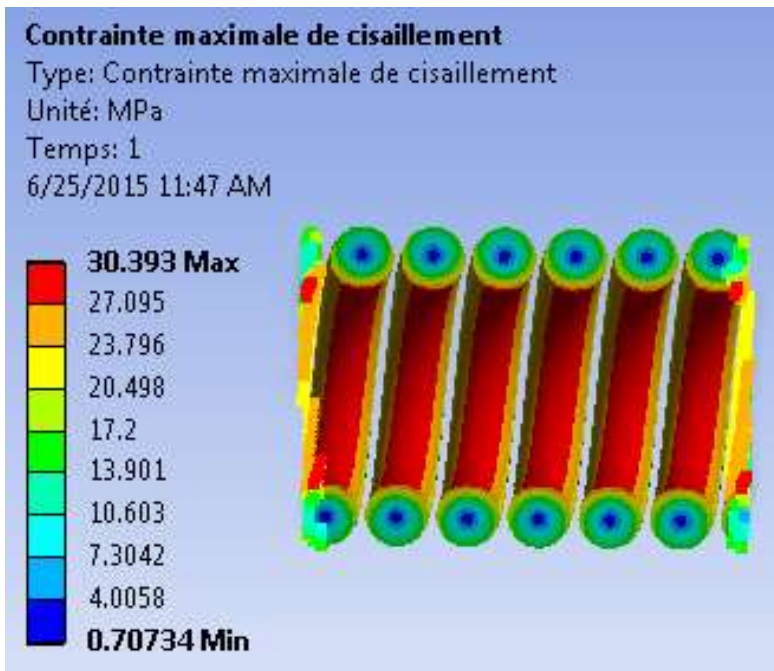
- L'énergie de déformation se calcule par

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) \cdot dV \quad (14.2)$$

# Contraintes dans un ressort de traction



Diamètre fil  $d = 2.2\text{mm}$   
 Diamètre d'enroulement  $D = 8.8\text{mm}$   
 Matériau: acier ( $G = 81500\text{ MPa}$ )



**Calcul du cisaillement maximal**  
 (Wikipédia: Formule donnée par Roever)

$$\tau_m = K \tau = K \frac{8 P D}{\pi d^3}$$

$$\text{soit } \frac{\tau_m}{K} = \frac{8 P D}{\pi d^3}$$

$$\text{avec } K = \frac{4m - 1}{4m - 4} + \frac{0,615}{m} \text{ en posant } m = D/d$$

$$\Rightarrow \tau_m = 29.54 \text{ MPa}$$

# Énergie de déformation

## Expression de l'énergie pour un chargement uniaxial

### Démonstration :

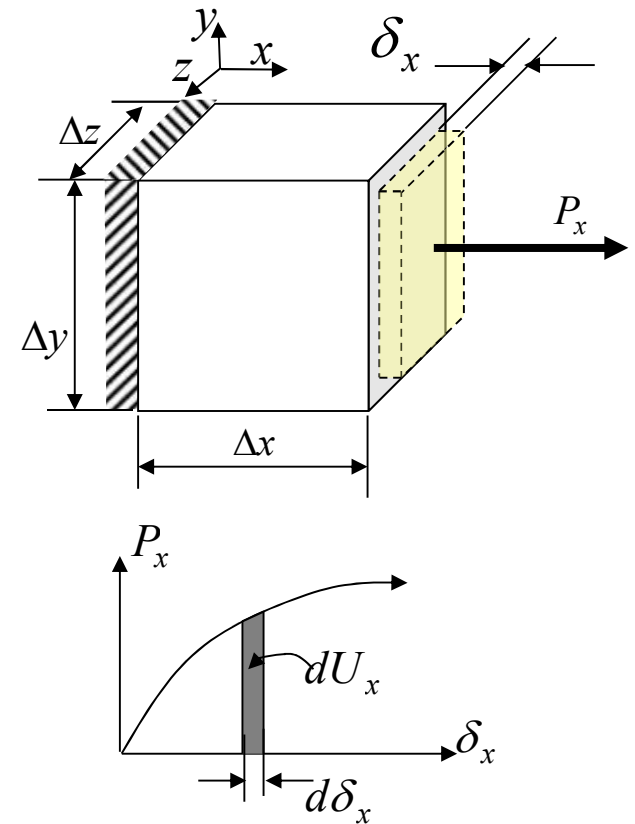
**Force normale**  $P_x$  sur un élément de dimensions  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  produit un allongement  $\delta_x$ .

L'énergie de déformation  $dU_x$  développée par la force  $P_x$  sur cet élément est :

$$dU_x = P_x \cdot d\delta_x$$

**Exprimée par unité de volume**, la densité d'énergie de déformation,  $U_{x0}$ , développée par la force  $P_x$  devient :

$$U_{x0} = \frac{1}{V} \int_0^{\delta_x} P_x d\delta_x = \int_0^{\delta_x} \frac{P_x}{\Delta y \Delta z} d \frac{\delta_x}{\Delta x} = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x$$



La notation adoptée ici est différente de celle utilisée dans le volume R des M.

# Énergie de déformation

## Expression de l'énergie pour un chargement uniaxial

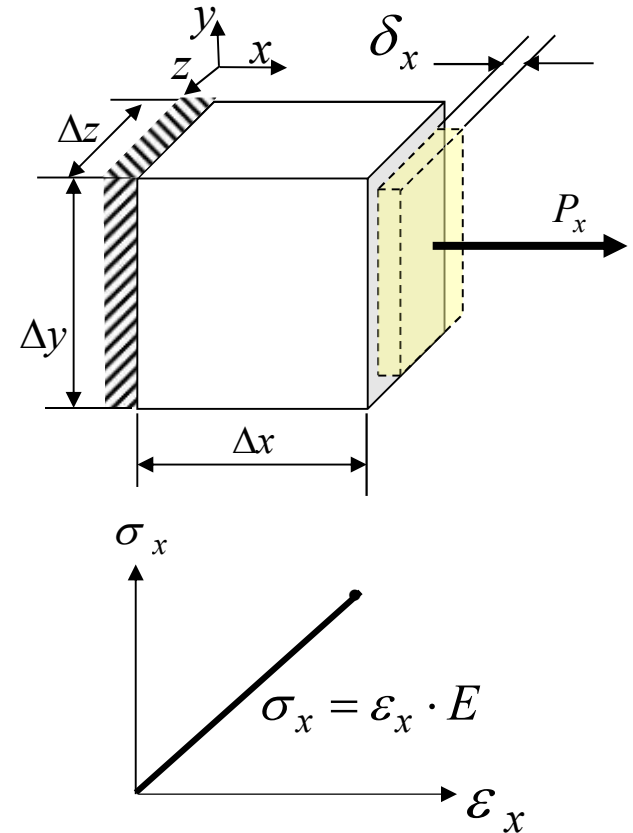
### Démonstration (suite) :

En supposant un comportement élastique linéaire

$$U_{x0} = \frac{1}{V} \int_0^{\delta_x} P_x d\delta_x = \int_0^{\delta_x} \frac{P_x}{\Delta y \Delta z} d\delta_x = \int_0^{\delta_x} \frac{P_x}{\Delta x} d\delta_x = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x$$

$$U_{x0} = \int_0^{\varepsilon_x} E \cdot \varepsilon_x \cdot d\varepsilon_x$$

$$U_{x0} = \frac{E \cdot \varepsilon_x^2}{2} = \frac{E \cdot \varepsilon_x}{2} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x \cdot \varepsilon_x}{2}$$

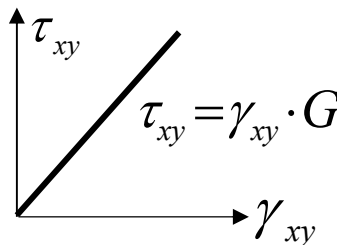
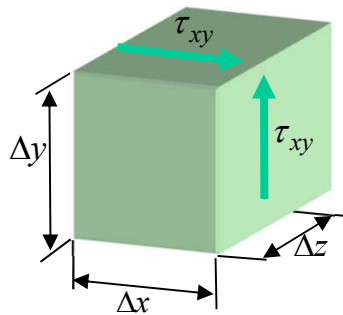
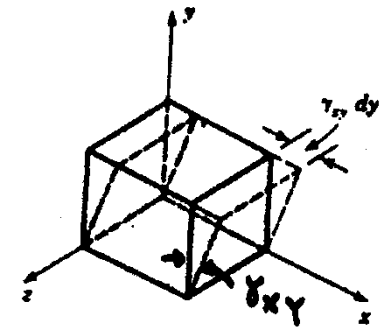
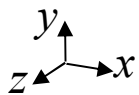


# Énergie de déformation

## Expression de l'énergie pour une force de cisaillement

- Démonstration :**

- Force de cisaillement appliquée parallèlement à l'axe  $x$  sur la face  $\Delta x - \Delta z$  (cause du cisaillement) développe une énergie



*Par analogie avec la contrainte normale*

$$U_{xy0} = \frac{1}{V} \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} \cdot dx \cdot dz \cdot d(\gamma_{xy} dy)$$

$$U_{xy0} = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} \frac{dx}{dx} \frac{dz}{dz} d(\gamma_{xy}) \frac{dy}{dy}$$

$$U_{xy0} = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}}{2}$$

# Énergie de déformation

## Énergie de déformation élastique pour un chargement général

- **Démonstration :**

- Forces normales et de cisaillement, appliquées successivement sur les faces  $x$ ,  $y$  et  $z$ , développent des énergies  $U_{x0}$ ,  $U_{xy0}$ ,  $U_{y0}$ ,  $U_{yz0}$ ,  $U_{z0}$ , et  $U_{zx0}$ .
- En appliquant le **principe de superposition** et la loi de Hooke (hypothèses de petites déformations et domaine linéaire)

$$U_{totale0} = \sum U_0$$

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx})$$

$$U = \int_V U_0 \cdot dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) \cdot dV$$



# Énergie de déformation

- **Cas particulier: chargement uniaxial**

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) \cdot dV$$

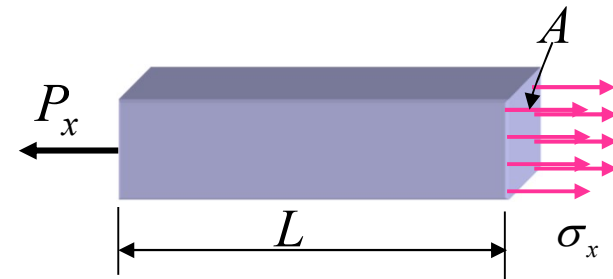
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$U = \int_V \frac{\sigma_x \cdot \varepsilon_x}{2} dV$$

$$U = \int_V \frac{\sigma_x}{2} \cdot \frac{\sigma_x}{E} dV = \frac{1}{2 \cdot E} \int_V \sigma_x^2 dV$$

$$U = \frac{1}{2 \cdot E} \int_0^L \left(\frac{P_x}{A}\right)^2 A \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot E} \left(\frac{P_x}{A}\right)^2 \cdot A \cdot L$$

$$U = \frac{P_x^2 \cdot L}{2 \cdot A \cdot E}$$



# Énergie de déformation

- **Cas particulier:** poutre en flexion ordinaire

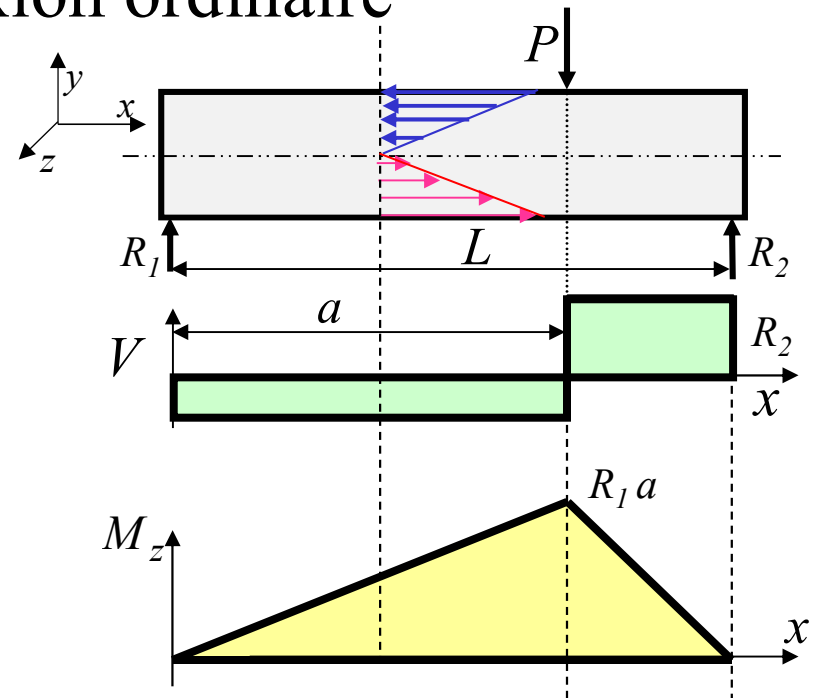
$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot dV \quad ; \sigma_x = \frac{-M_z \cdot y}{I}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$U = \int_0^L \int_A \frac{1}{2} \cdot \frac{M_z^2 \cdot y^2}{E \cdot I^2} dA \cdot dx$$

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I^2} dx \int_A y^2 dA$$

où, par définition  $\int_A y^2 dA = I \Rightarrow U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I} dx$



Pour le moment, on néglige l'énergie associée à la contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant

## 4.1 Énergie de déformation

- **Cas particulier:** barreau en torsion

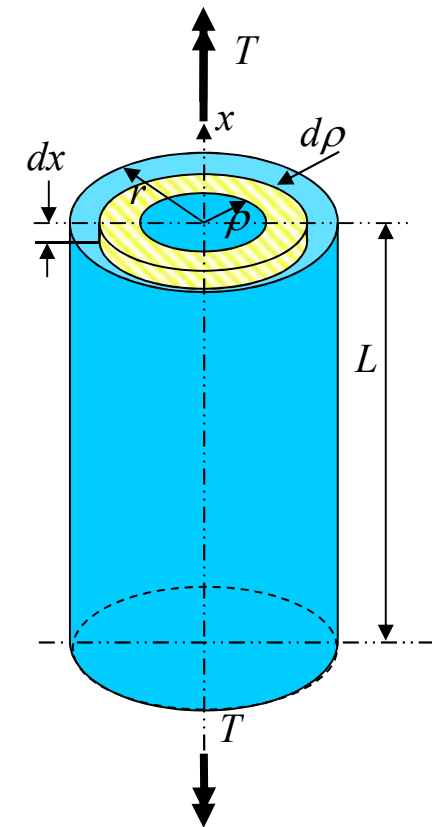
$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau_{x\theta} \cdot \gamma_{x\theta} dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^r \frac{T \cdot \rho}{J} \cdot \frac{T \cdot \rho}{G J} 2\pi \rho d\rho dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^r \frac{T^2}{G J^2} 2\pi \rho^3 d\rho dx$$

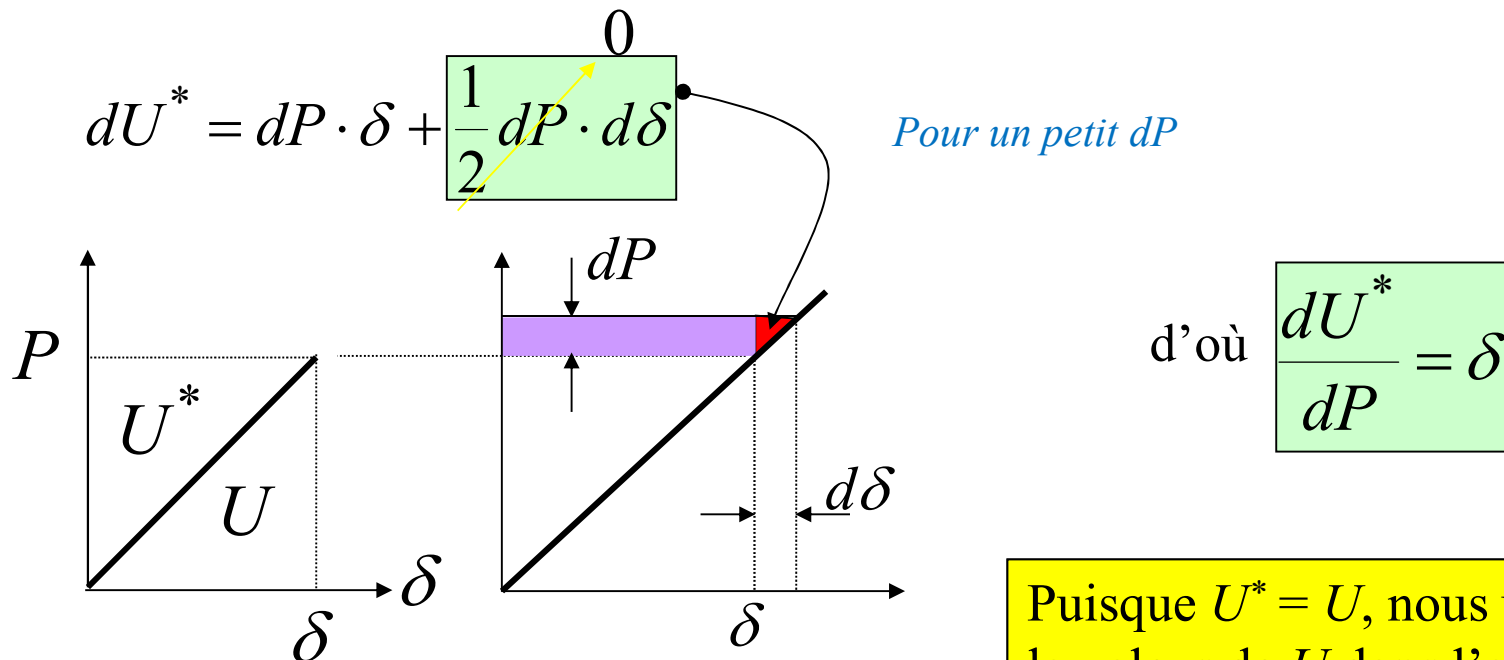
$$U = \int_0^L \frac{T^2}{G J^2} \frac{\pi r^4}{4} dx = \int_0^L \frac{T^2}{G J^2} \frac{J}{2} dx$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{T^2 L}{G J}$$



# Théorème de Castigliano

- Basé sur l'énergie de déformation complémentaire  $U^*$ 
  - Pour un matériau élastique linéaire, l'énergie de déformation complémentaire  $U^*$  est égale à l'énergie de déformation  $U$



Puisque  $U^* = U$ , nous utiliserons la valeur de  $U$  dans l'application du théorème de *Castigliano*

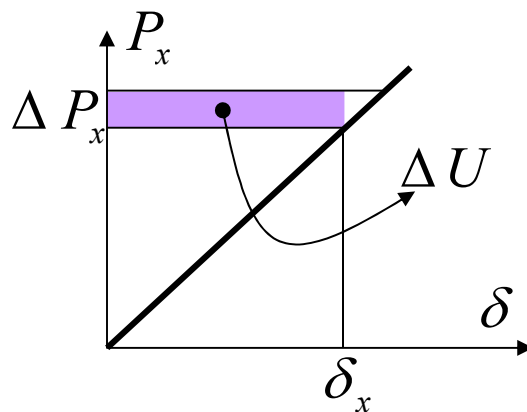
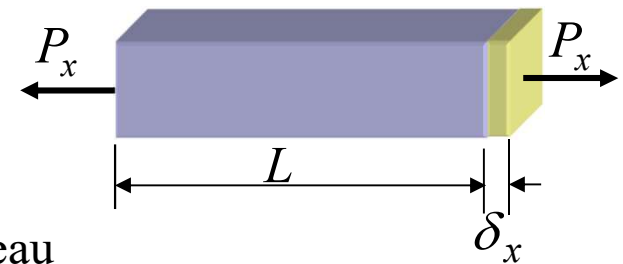
# Théorème de Castigliano

## Cas particulier: chargement uniaxial

$$U = \frac{P_x^2 \cdot L}{2 \cdot A \cdot E} = \frac{1}{2} P_x \left[ \frac{P_x L}{A E} \right]$$

$$U = \frac{1}{2} P_x \delta_x$$

$\delta_x$ , l'allongement du barreau



$$\Delta U = \delta_x \Delta P_x \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta P_x} = \delta_x \quad \text{Si } \Delta P_x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_x} = \delta_x$$

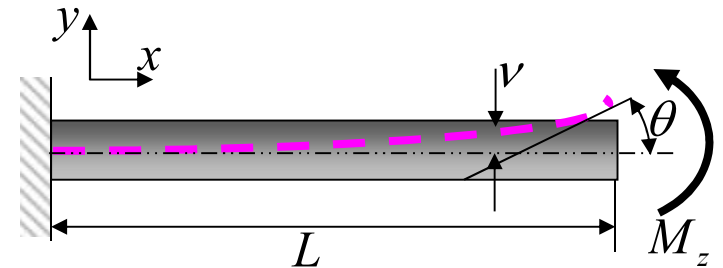
# Théorème de Castigliano

## Cas particulier: poutre en flexion pure

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I} dx$$

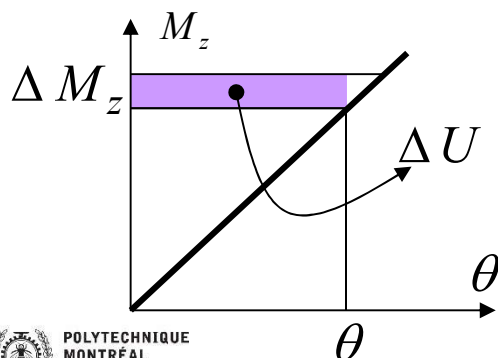
$$U = \frac{M_z}{2} \int_0^L \frac{M_z}{E \cdot I} dx = \frac{M_z}{2} \int_0^L \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

$$U = \frac{M_z}{2} \left[ \frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} - \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} \right] = \frac{M_z}{2} \theta$$



$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = \theta$$

*Conditions limites*



$$\Delta U = \theta \Delta M_z \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta M_z} = \theta \quad \text{Si } \Delta M_z \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial M_z} = \theta$$

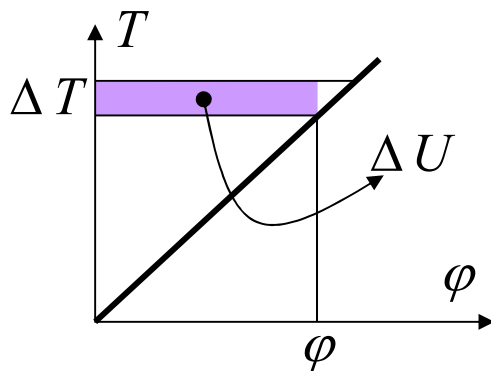
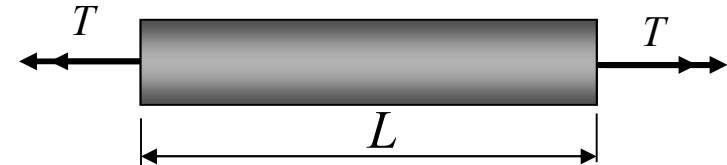
# Théorème de Castigliano

## Cas particulier: barre en torsion

$$U = \frac{1}{2} \frac{T^2 \cdot L}{J \cdot G}$$

$$U = \frac{1}{2} T \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$$

$$U = \frac{1}{2} T \varphi$$



$$\Delta U = \varphi \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta T} = \varphi$$

$$\text{Si } \Delta T \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial T} = \varphi$$



## Théorème de Maxwell-Betti

Le **travail** fait par un système de  $n$  charges  $P_i$  (système I) à la suite des déplacements  $(\delta_i)_Q$  causés par un second système de  $m$  charges  $Q_j$  (système II) est égal au travail fait par un système de  $m$  charges  $Q_j$  à la suite des déplacements  $(\delta_j)_P$  causés par le premier système de  $n$  charges  $P_i$  :

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot (\delta_i)_{\sum_{j=1}^m Q_j} = \sum_{j=1}^m Q_j \cdot (\delta_j)_{\sum_{i=1}^n P_i}$$

*Formule générale*

Lorsque  $n = m = 1$ , la formule devient

$$P \cdot (\delta_P)_Q = Q \cdot (\delta_Q)_P$$

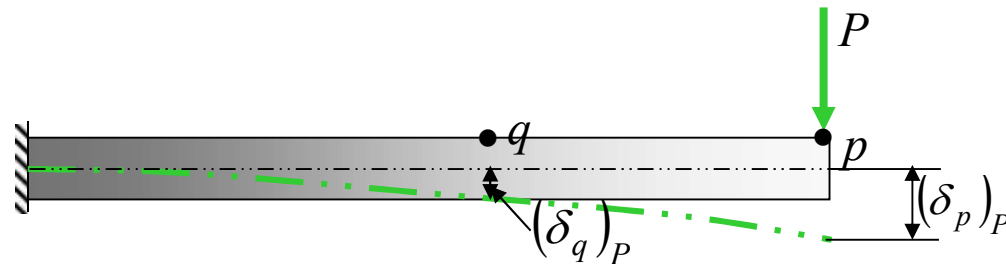
*Position*  
*Force*



# Théorème de Maxwell-Betti

## Démonstration

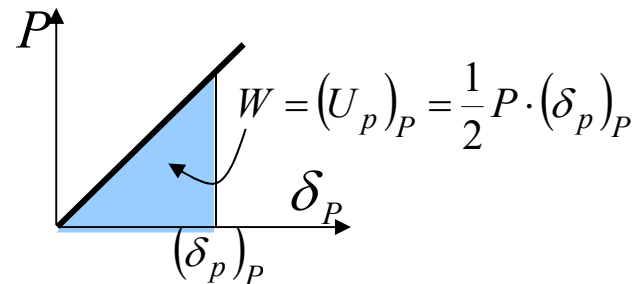
Séquence 1 :



Considérons la poutre encastree ci dessus. Une force  $P$  (système I) appliquée en  $p$  causera une flèche  $(\delta_p)_P$  au point  $p$  et une flèche  $(\delta_q)_P$  au point  $q$ .

Si le matériau de la poutre demeure dans le domaine élastique, le travail  $W$  fait par la force  $P$  en  $p$  est égal à l'énergie de déformation  $U$  mise dans la poutre et vaut :

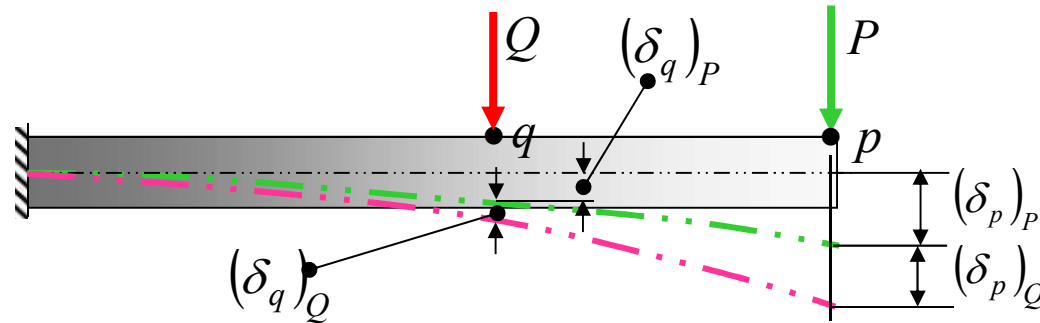
$$W = (U_p)_P = \frac{1}{2} P \cdot (\delta_p)_P$$



# Théorème de Maxwell-Betti

## Démonstration

Séquence 1 (suite):

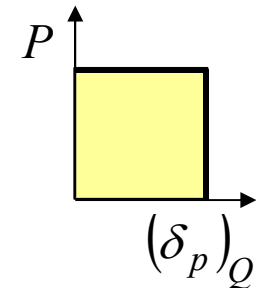
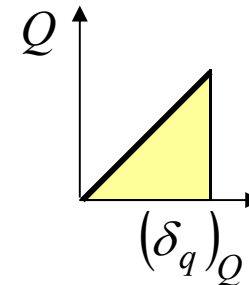
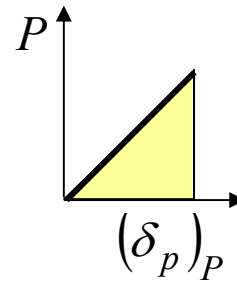


Si on ajoute une force  $Q$  (système II) en  $q$ , cette force causera un déplacement supplémentaire de la poutre de  $(\delta_p)_Q$  en  $p$  et de  $(\delta_q)_Q$  en  $q$ .

L'énergie maintenant emmagasinée dans la poutre est la somme du travail de la force  $Q$  en  $q$  et de celui de la force  $P$  en  $p$ , soit :

$$U = (U_p)_P + (U_q)_Q + (U_p)_Q$$

$$U_1 = \frac{1}{2} P (\delta_p)_P + \frac{1}{2} Q (\delta_q)_Q + P (\delta_p)_Q$$



# Théorème de Maxwell-Betti

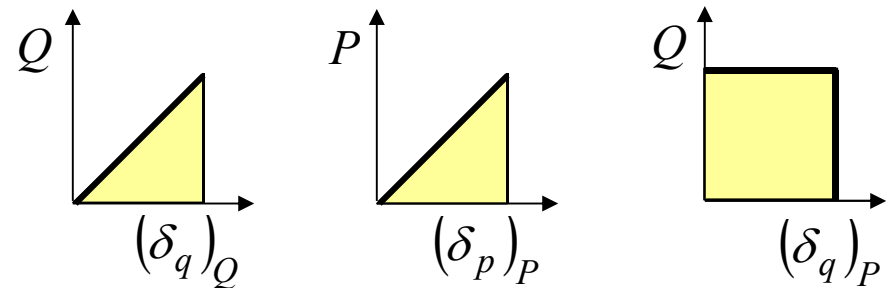
## Démonstration

### Séquence 2 :

Reprenons la même poutre que précédemment, mais en appliquant d'abord la force  $Q$  en  $q$  et ensuite le force  $P$  en  $p$ .

Par une démarche similaire à la précédente, on obtient que l'énergie élastique  $U_2$  emmagasinée dans la poutre est :

$$U_2 = \frac{1}{2} Q (\delta_q)_Q + \frac{1}{2} P (\delta_p)_P + Q (\delta_q)_P$$



Il faut que  $U_1 = U_2$ , ce qui implique

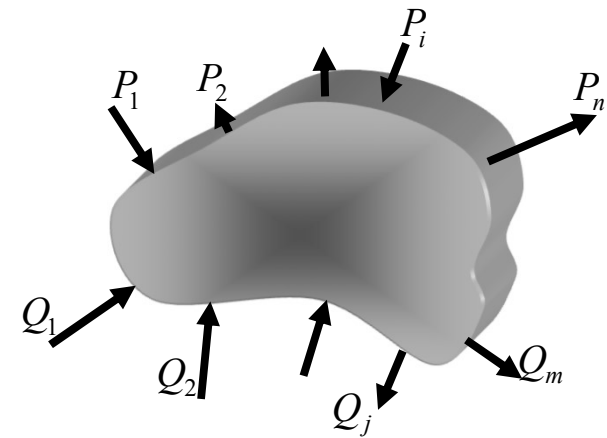
$$P (\delta_p)_Q = Q (\delta_q)_P$$

*Rappel de  $U_1$*  
$$U_1 = \frac{1}{2} P (\delta_p)_P + \frac{1}{2} Q (\delta_q)_Q + P (\delta_p)_Q$$

## Théorème de Maxwell-Betti

**Généralisation** du théorème à un ensemble de  $n$  forces  $P_i$  et de  $m$  forces  $Q_j$  sur un corps de forme générale (patatoïde)

Le travail fait par un système de  $n$  charges  $P_i$  (système I) à la suite des déplacements  $(\delta_i)_Q$  causés par un second système de  $m$  charges  $Q_j$  (système II) est égal au travail fait par un système de  $m$  charges  $Q_j$  à la suite des déplacements  $(\delta_j)_P$  causés par le premier système de  $n$  charges  $P_i$



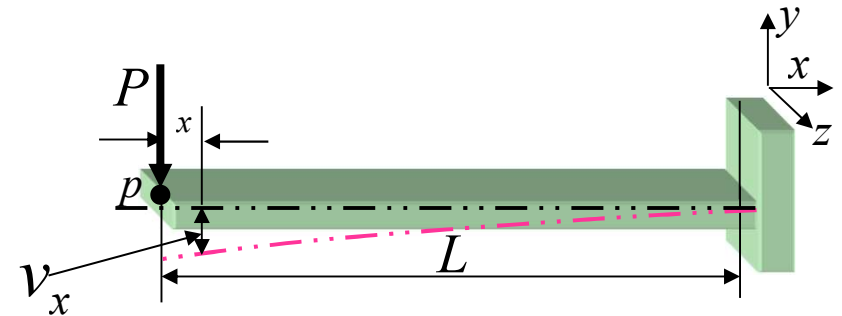
$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot (\delta_i)_{\sum_{j=1}^m Q_j} = \sum_{j=1}^m Q_j \cdot (\delta_j)_{\sum_{i=1}^n P_i}$$

# Théorème de Maxwell-Betti

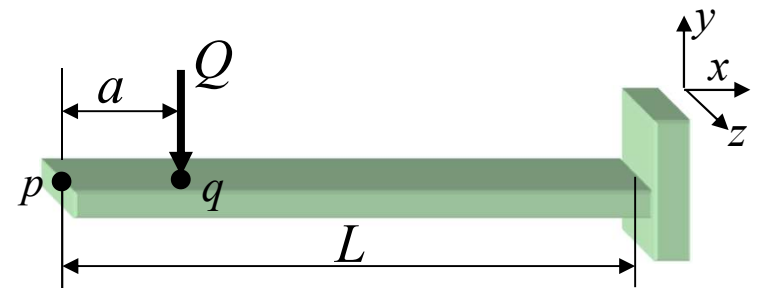
## Exemple 1

L'expression  $v_x$  de la déformée de cette poutre lorsqu'une force  $P$  agit à une distance  $L$  de l'encastrement est :

$$v_x = \frac{-P}{6 \cdot E \cdot I} (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot x + x^3)$$



On demande de trouver l'expression du déplacement du point  $p$  lorsqu'une force  $Q$  agit en  $q$ .



# Théorème de Maxwell-Betti

## Exemple 1 (suite)

On connaît  $(\delta_p)_P$  et  $(\delta_q)_P$  ; on cherche  $(\delta_p)_Q$

Du théorème de *Maxwell-Betti*,  
on peut écrire :  $P(\delta_p)_Q = Q(\delta_q)_P$

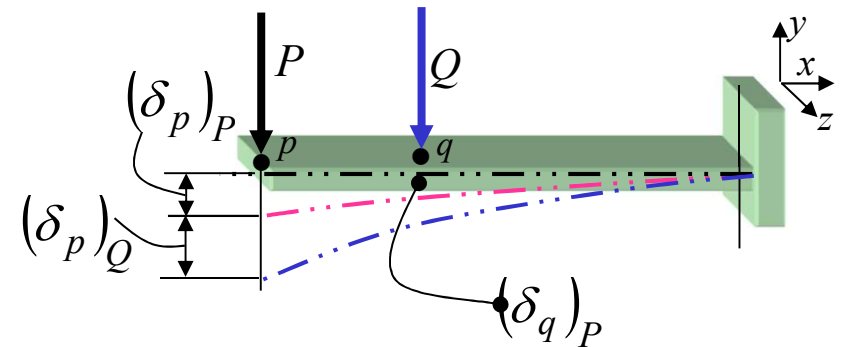
D'où :

$$(\delta_p)_Q = \frac{Q}{P}(\delta_q)_P$$

à  $x = a$   $v_x = (\delta_q)_P$

$$(\delta_p)_Q = \frac{Q}{P} \left[ \frac{-P}{6 \cdot E \cdot I} (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot a + a^3) \right]$$

$$(\delta_p)_Q = \frac{-Q}{6 \cdot E \cdot I} (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot a + a^3)$$



## Théorème de Maxwell-Betti

### Exemple 2

Un camion stationné en un point  $c$  d'un pont cause une flèche de  $\delta_c = 52$  mm au point  $c$  et  $\delta_v = 38$  mm au point  $v$ . Par la suite, une voiture de 1000 kg s'amène au point  $v$  du pont. On mesure les flèches à nouveau et on trouve  $\delta_c = 53$  mm et  $\delta_v = 40$  mm.

On demande quelle est la masse du camion?

### Solution

$C$  est la masse du camion et

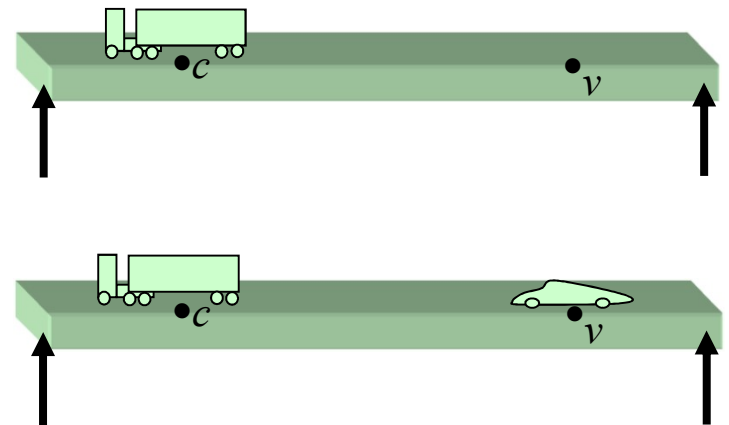
$V$  est celle de la voiture

$$(\delta_c)_C = 52\text{mm} \quad ; \quad (\delta_v)_C = 38\text{mm}$$

$$(\delta_c)_C + (\delta_c)_V = 53\text{mm} \quad ; \quad (\delta_v)_C + (\delta_v)_V = 40\text{mm}$$

$$C(\delta_c)_V = V(\delta_v)_C$$

$$C = V \frac{(\delta_v)_C}{(\delta_c)_V} = 1000 \cdot \frac{38}{53 - 52} = 38000\text{kg}$$



## Théorème de Maxwell-Betti

### Exemple 3

Sur la poutre suivante, lorsque  $P = 10$  kN on mesure le déplacement au point  $p$ ,  $(\delta_p)_P = 12$  mm et le déplacement au point  $q$ ,  $(\delta_q)_P = 9$  mm.

Si, par la suite, on ajoute une force  $Q = 5$  kN en  $q$ , sans rien mesurer à nouveau. On demande de trouver  $(\delta_p)_{total}$

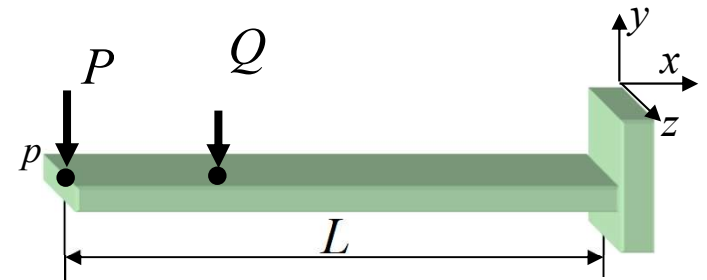
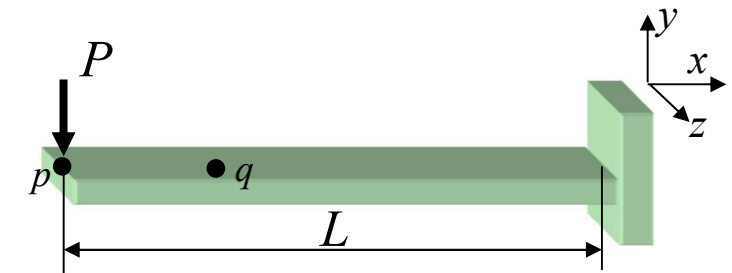
### Solution

$$(\delta_p)_Q = ?$$

$$P(\delta_p)_Q = Q(\delta_q)_P \text{ où } (\delta_q)_P = 9 \text{ mm}$$

$$P = 10 \text{ kN et } Q = 5 \text{ kN}$$

$$(\delta_p)_Q = \frac{Q}{P}(\delta_q)_P = \frac{5}{10} \cdot 9 = 4,5 \text{ mm}$$



$$(\delta_p)_{total} = (\delta_p)_P + (\delta_p)_Q$$

$$(\delta_p)_{total} = 12 + 4,5 = 16,5 \text{ mm}$$





# Théorème de Castigliano

- Au delà de ces quelques petites utilités, le théorème de *Maxwell-Betti* intervient dans la démonstration du théorème de *Castigliano*.
  - Du théorème de *Castigliano* on déduit une **technique puissante** basée sur l'énergie de déformation pour faire le calcul du déplacement (ou rotation, ou déplacement angulaire) en divers points d'une structure supportant plus d'un chargement (ex. tension, torsion et flexion superposées).
- Th. de *Castigliano* n'est valide que pour des **structures en équilibre**
  - Taux de variation de l'énergie de déformation d'un corps, par rapport à toute force indépendante  $P$ , est égal à la flèche au point d'application de cette force, suivant la direction de la force

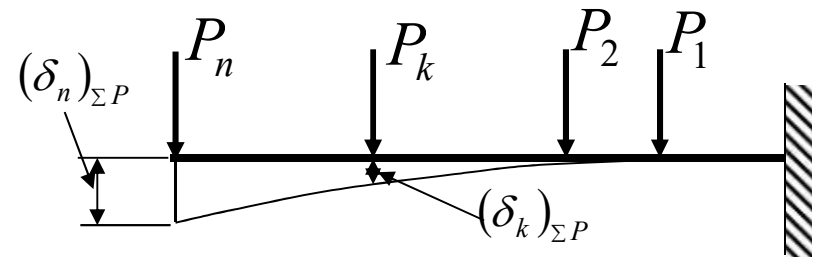
$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_P$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \varphi$$

## Démonstration du Th. de Castigliano

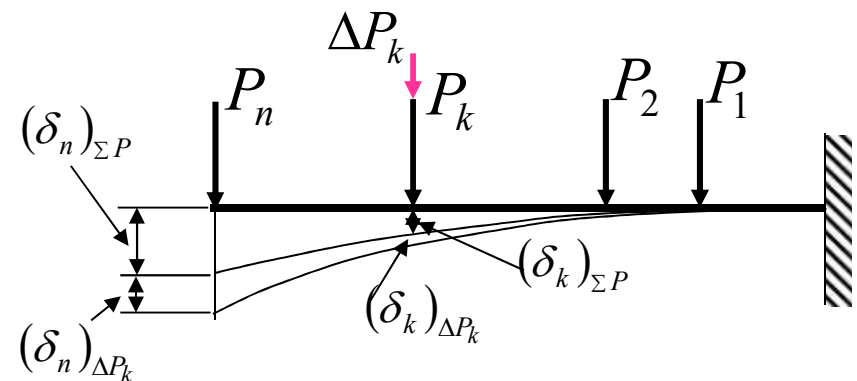
Une poutre encadrée est en *équilibre* sous l'effet de  $n$  forces. Sous la force  $P_n$ , la flèche est  $(\delta_n)_{\Sigma P}$  due à toutes les forces  $P_i$ ; **les forces  $P_i$  constituent le système I**. En particulier, sous la force  $P_k$ , la flèche est  $(\delta_k)_{\Sigma P}$ .



a) Équilibre sous système I

Si on ajoute une force  $\Delta P_k$  (**système II**) à la force  $P_k$ , la nouvelle position d'*équilibre* de la poutre est comme à la figure (b)

Entre les positions a) et b), l'énergie emmagasinée dans la poutre change d'une quantité  $\Delta U$



b) Équilibre sous systèmes I et II

# Démonstration du Th. de Castigliano

L'énergie emmagasinée dans la poutre change d'une quantité  $\Delta U$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \cdot \Delta P_k \cdot (\delta_k)_{\Delta P_k} + \sum_{i=1}^n P_i \cdot (\delta_i)_{\Delta P_k}$$

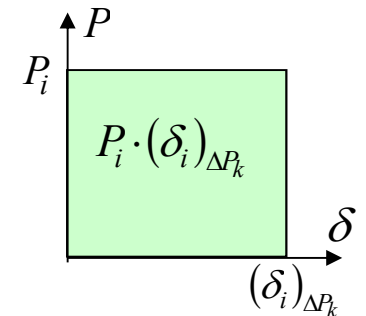
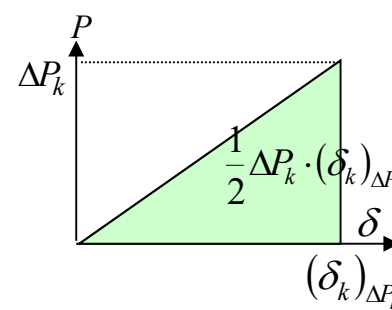
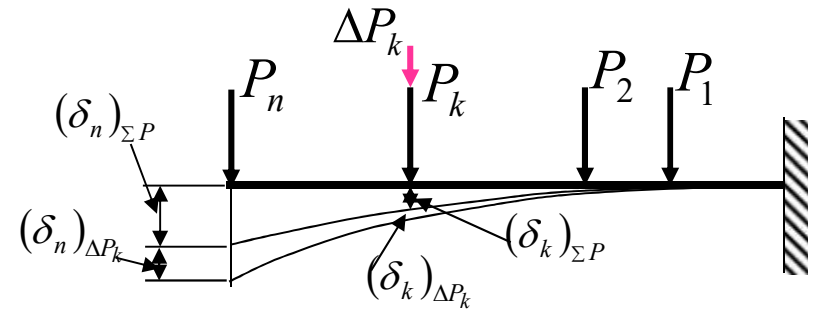
*Selon le Th. de Maxwell-Betti*

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot (\delta_i)_{\Delta P_k} = \Delta P_k \cdot (\delta_k)_{\sum P_i}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \cdot \Delta P_k \cdot (\delta_k)_{\Delta P_k} + \Delta P_k \cdot (\delta_k)_{\sum P_i}$$

En divisant des deux côtés par  $\Delta P_k$

$$\frac{\Delta U}{\Delta P_k} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_k)_{\Delta P_k} + (\delta_k)_{\sum P_i}$$

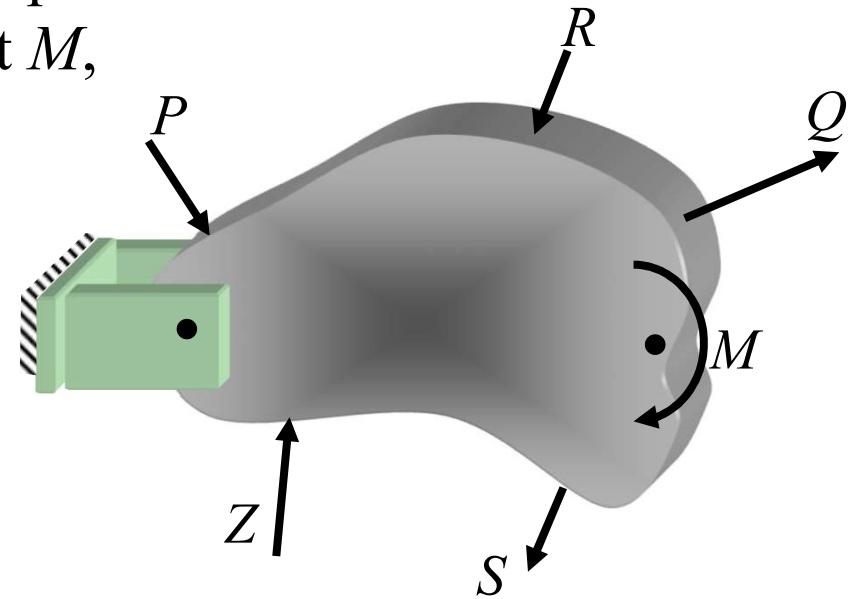


À la limite,  $\Delta P_k \rightarrow 0$ ,  $(\delta_k)_{\Delta P_k} \rightarrow 0$  et

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = (\delta_k)_{\sum P_i}$$

## Théorème de Castigliano

Pour un **systeme en équilibre**, sollicité par des forces  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $Z$  et un moment  $M$ , le théorème de *Castigliano* devient :



$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_p$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \theta \quad \text{où } U = U(P, R, Q, M, S \text{ et } Z)$$



# Méthodes énergétiques

- **Objectifs**
  - Utiliser le théorème de Castigliano pour calculer des déplacements, rotations ou rotations angulaires de structures isostatiques
    - Faire l'équilibre de structures isostatiques
    - Trouver les efforts internes dans une structures
    - Appliquer le théorème de Castigliano



# Énergie de déformation

- 4.1 Énergie de déformation
  - 4.4.1 Expression de l'énergie pour un chargement uniaxial
  - 4.4.2 Expression de l'énergie pour une force de cisaillement
  - 4.4.3 Énergie de déformation élastique pour un chargement général

## Méthodes énergétiques

- 4.2 Cas particuliers
  - 4.2.1 Tension
  - 4.2.2 Flexion
  - 4.2.3 Torsion
- 4.3 Théorème de la réciprocité, de *Maxwell-Betti*

### 4.4 Théorème de *Castigliano*

- 4.4.1 Application aux systèmes isostatiques
  - 4.4.2 Application aux systèmes hyperstatiques
- 4.5 Effets de l'effort tranchant

# Système isostatique

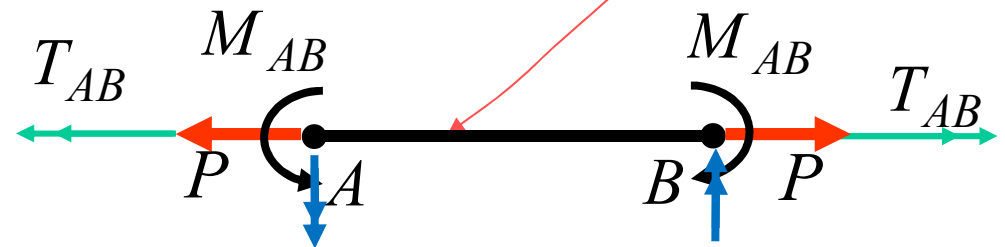
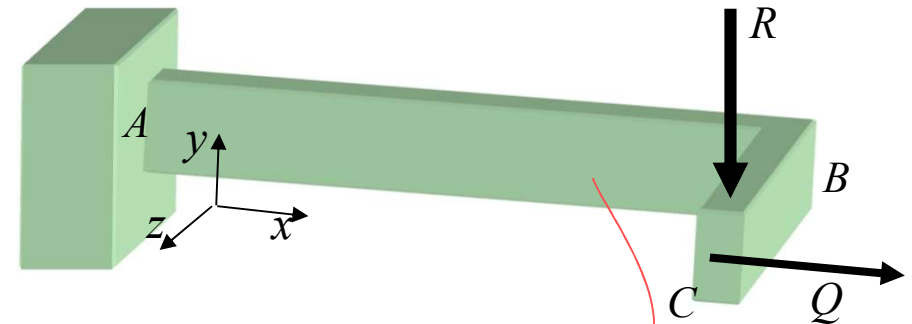
## Méthode de calcul

Soit une structure sollicitée par un ensemble de forces  $R$  et  $Q$ .

Les efforts internes sur la membrure AB seront

un moment  $M_{zAB}$  (autour de  $z$ )  
 et  $M_{yAB}$  (autour de  $y$ ),  
 un moment de torsion  $T_{AB}$

et une force axiale,  
 montrée en tension  
 ici,  $P$  où.



$$M_{zAB} = M_{zAB}(R) ; M_{yAB} = M_{yAB}(Q)$$

$$P = P(Q)$$

$$T_{AB} = T_{AB}(R)$$

# Systeme isostatique

Selon Castigliano, le déplacement du point  $c$  sous la force  $R$  s'exprime :

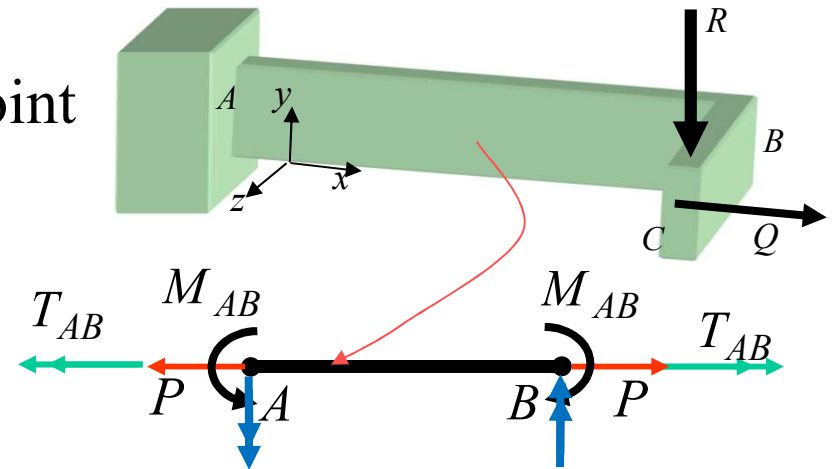
$$\delta_c = \frac{\partial U}{\partial R}$$

Or,

$$U = \sum \frac{P_i^2 \cdot L_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i} + \sum \frac{T_i^2 \cdot L_i}{2 \cdot G_i \cdot J_i} + \sum \int_0^{L_i} \frac{M_i^2 \cdot dx}{2 \cdot E_i \cdot I_i}$$

En exécutant la dérivée de  $U$  par rapport à  $R$ , on obtient :

$$\delta_c = \sum \frac{\frac{\partial}{\partial R} (P_i^2) \cdot L_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i} + \sum \frac{\frac{\partial}{\partial R} (T_i^2) \cdot L_i}{2 \cdot G_i \cdot J_i} + \sum \int_0^{L_i} \frac{\frac{\partial}{\partial R} (M_i^2) \cdot dx}{2 \cdot E_i \cdot I_i}$$





## Systeme isostatique

$$\delta_c = \sum \frac{\frac{\partial P_i^2}{\partial R} \cdot L_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i} + \sum \frac{\frac{\partial T_i^2}{\partial R} \cdot L_i}{2 \cdot G_i \cdot J_i} + \sum \int_0^{L_i} \frac{\frac{\partial M_i^2}{\partial R} \cdot dx}{2 \cdot E_i \cdot I_i}$$

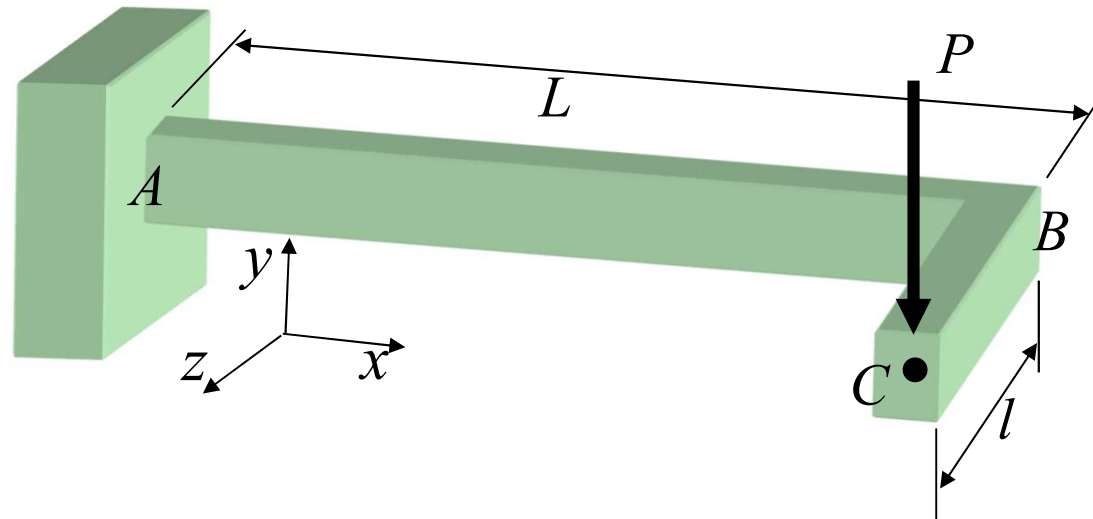
$$\delta_c = \sum \frac{2 \cdot P_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial R} \cdot L_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i} + \sum \frac{2 \cdot T_i \cdot \frac{\partial T_i}{\partial R} \cdot L_i}{2 \cdot G_i \cdot J_i} + \sum \int_0^{L_i} \frac{2 \cdot M \cdot \frac{\partial M_i}{\partial R} \cdot dx}{2 \cdot E_i \cdot I_i}$$

$$\delta_c = \sum \frac{P_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial R} \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} + \sum \frac{T_i \cdot \frac{\partial T_i}{\partial R} \cdot L_i}{G_i \cdot J_i} + \sum \int_0^{L_i} \frac{M \cdot \frac{\partial M_i}{\partial R} \cdot dx}{E_i \cdot I_i}$$

## Systeme isostatique

### Problème:

On demande de calculer le déplacement vertical du point C sous la force  $P$  à l'aide du théorème de *Castigliano*.



Dans la solution de ce problème, on ne tiendra pas compte de l'énergie de déformation associée à l'effort tranchant

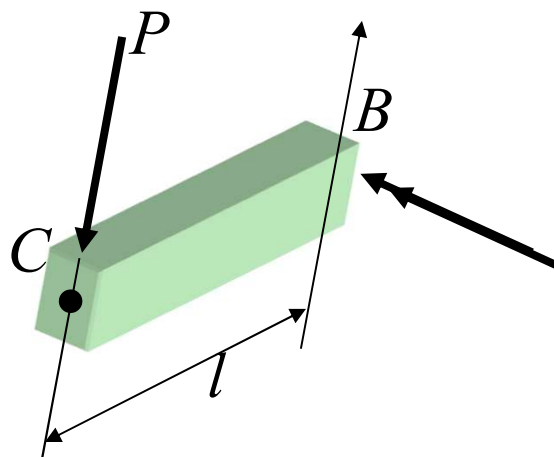
Solution selon la méthode de *Castigliano* :

$$\delta_c = \sum \frac{P_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial R} \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} + \sum \frac{T_i \cdot \frac{\partial T_i}{\partial R} \cdot L_i}{G_i \cdot J_i} + \sum \int_0^{L_i} \frac{M \cdot \frac{\partial M_i}{\partial R} \cdot dx}{E_i \cdot I_i}$$

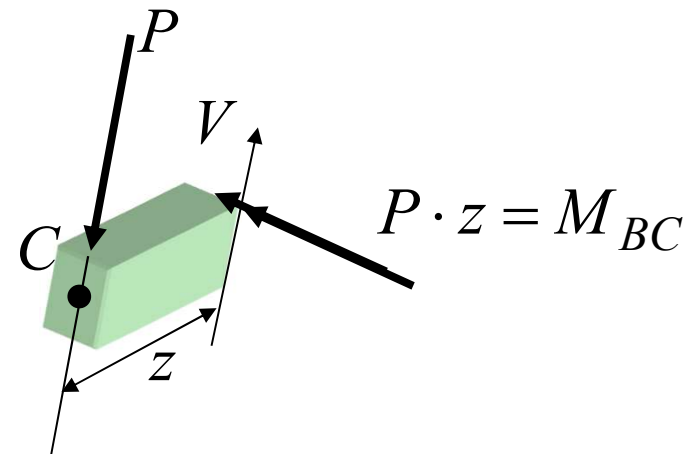
Membrure BC

où  $P_i = 0$ , il n'y a pas de force interne axiale

$T_{BC} = 0$ , il n'y a pas de moment de torsion interne



$$M_{BC} = P \cdot z$$



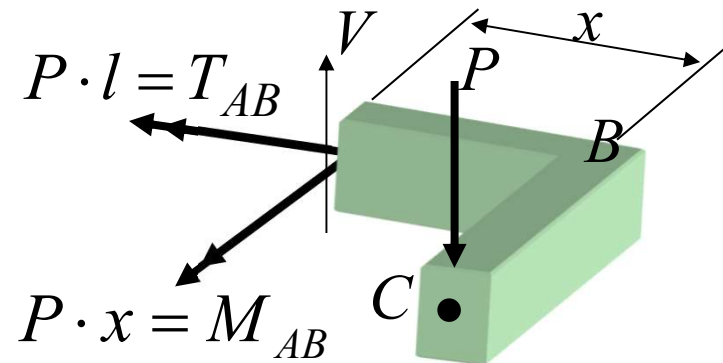
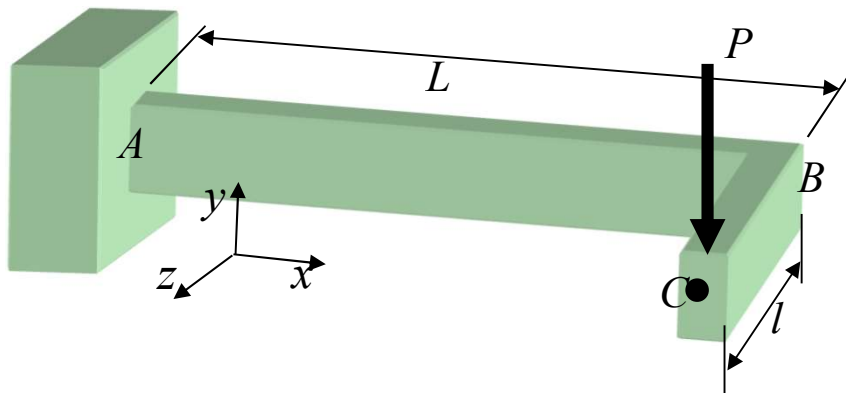
Solution selon la méthode de *Castigliano* :

$$\delta_c = \sum \frac{P_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial R} \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} + \sum \frac{T_i \cdot \frac{\partial T_i}{\partial R} \cdot L_i}{G_i \cdot J_i} + \sum \int_0^{L_i} \frac{M \cdot \frac{\partial M_i}{\partial R} \cdot dx}{E_i \cdot I_i}$$

Membrure AB

où  $P_i = 0$ , il n'y a pas de force interne axiale

$$M_{AB} = P \cdot x \quad T_{AB} = P \cdot l$$





$$\delta_c = \sum \frac{P_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial P} \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} + \sum \frac{T_i \cdot \frac{\partial T_i}{\partial P} \cdot L_i}{G_i \cdot J_i} + \sum \int_0^{L_i} \frac{M \cdot \frac{\partial M_i}{\partial P} \cdot dx}{E_i \cdot I_i}$$

$$M_{BC} = P \cdot z$$

$$M_{AB} = P \cdot x$$

$$T_{AB} = P \cdot l$$

AB

BC

$$\delta_c = \frac{P \cdot l \cdot \frac{\partial(P \cdot l)}{\partial P} \cdot L}{G \cdot J} + \int_0^L \frac{P \cdot x \cdot \frac{\partial(P \cdot x)}{\partial P} \cdot dx}{E \cdot I} + \int_0^l \frac{P \cdot z \cdot \frac{\partial(P \cdot z)}{\partial P} \cdot dz}{E \cdot I}$$

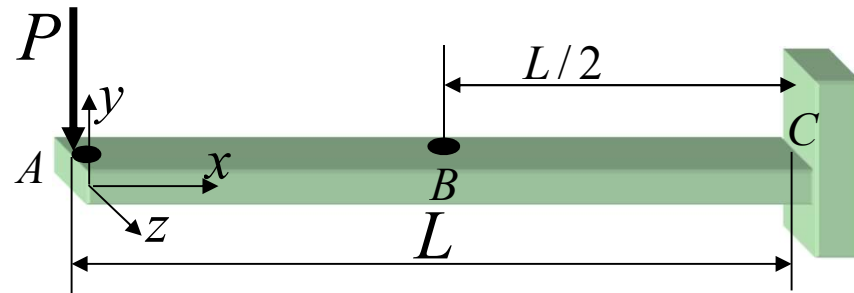
$$\delta_c = \frac{P \cdot l \cdot l \cdot L}{G \cdot J} + \int_0^L \frac{P \cdot x \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} + \int_0^l \frac{P \cdot z \cdot z \cdot dz}{E \cdot I}$$

$$\delta_c = \frac{P \cdot l^2 \cdot L}{G \cdot J} + \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{P}{3 \cdot E \cdot I} (l^3 + L^3) + \frac{P \cdot l^2 \cdot L}{G \cdot J}$$

# Application aux systèmes isostatiques

## Exemple :

- Trouver la flèche en A
- Trouver la flèche en B
- Trouver la rotation en A

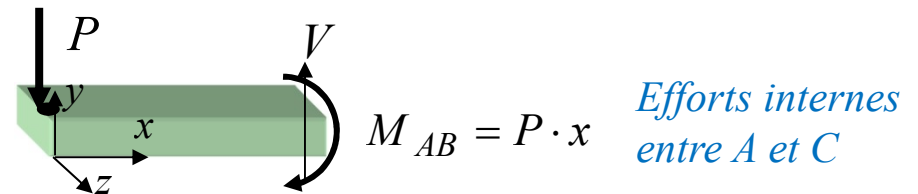


## Solution :

### a) Calcul de flèche en A

À l'aide de Castigliano  $\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_A$

$$\delta_A = \int_0^L \frac{M_{AC}}{E \cdot I} \frac{\partial M_{AC}}{\partial P} \cdot dx = \int_0^L \frac{Px}{EI} x dx$$



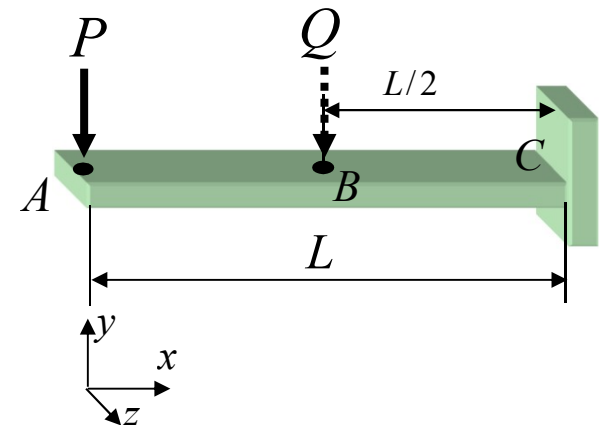
$$\delta_p = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

## Application aux systèmes isostatiques

### b) Flèche en B

Si on veut appliquer le théorème de Castigliano pour évaluer  $\delta_B$  il faut qu'il y ait une force en B. Puisqu'il n'y en a pas sur la poutre étudiée, nous appliquerons une **force fictive** égale à Q, et nous poserons sa **valeur égale à zéro** une fois que la dérivée de U par rapport à Q aura été obtenue.

Il faut établir l'équation du moment fléchissant entre A et B et entre B et C

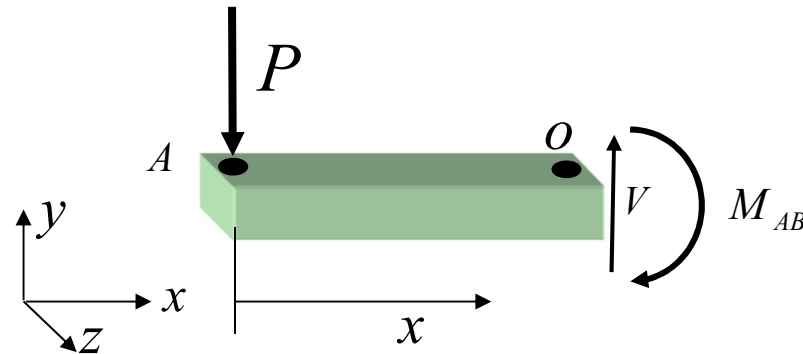


$$\delta_B = \left. \frac{\partial U}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_{AB}}{EI} \frac{\partial M_{AB}}{\partial Q} dx + \int_{x_B}^{x_C} \frac{M_{BC}}{EI} \frac{\partial M_{BC}}{\partial Q} dx$$

de A à B ( $0 \leq x \leq L/2$ )

$$\sum M_o = M_{AB} - P \cdot x = 0$$

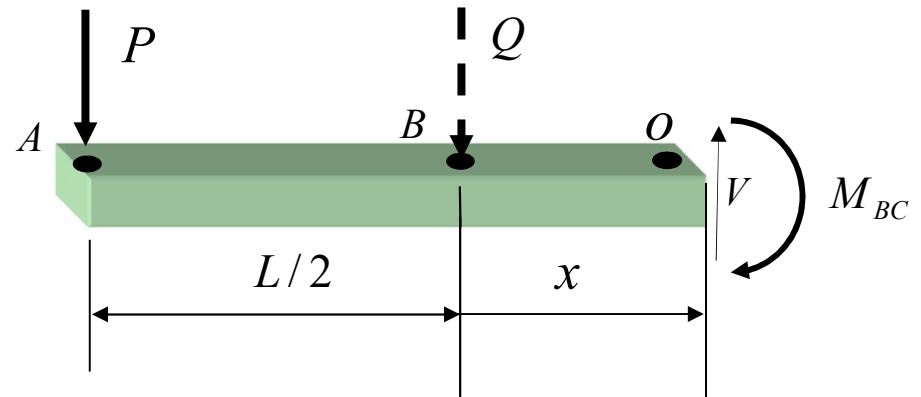
$$M_{AB} = P \cdot x$$



de B à C ( $0 \leq x \leq L/2$ )

$$\sum M_o = M_{BC} - P \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right) - Q \cdot x = 0$$

$$M_{BC} = P \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right) + Q \cdot x$$



Note: on change de repère pour x





$$M_{AB} = P \cdot x$$

$$M_{BC} = P \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right) + Q \cdot x$$

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial Q} \Big|_{Q=0} = \int_0^{L/2} \frac{M_{AB}}{EI} \frac{\partial M_{AB}}{\partial Q} dx + \int_0^{L/2} \frac{M_{BC}}{EI} \frac{\partial M_{BC}}{\partial Q} dx$$

$$\delta_B = \int_0^{L/2} \frac{(P \cdot x)}{EI} \frac{\partial(P \cdot x)}{\partial Q} \cdot dx + \int_0^{L/2} \frac{[P \cdot (\frac{L}{2} + x) + Q \cdot x]}{EI} \frac{\partial[P \cdot (\frac{L}{2} + x) + Q \cdot x]}{\partial Q} \cdot dx$$

$$\delta_B = \int_0^{L/2} \frac{(P \cdot x) \cdot 0}{EI} \cdot dx + \int_0^{L/2} \frac{[P \cdot (\frac{L}{2} + x) + Q \cdot x]}{EI} \cdot x \cdot dx$$

Avec Q = 0

$$\delta_B = 0 + \int_0^{L/2} \frac{[P \cdot (\frac{L}{2} + x)]}{EI} x \cdot dx = \left[ \int_0^{L/2} P \cdot \frac{L}{2} \cdot x \cdot dx + \int_0^{L/2} P \cdot x^2 \cdot dx \right] \frac{1}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{P}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{P}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3$$

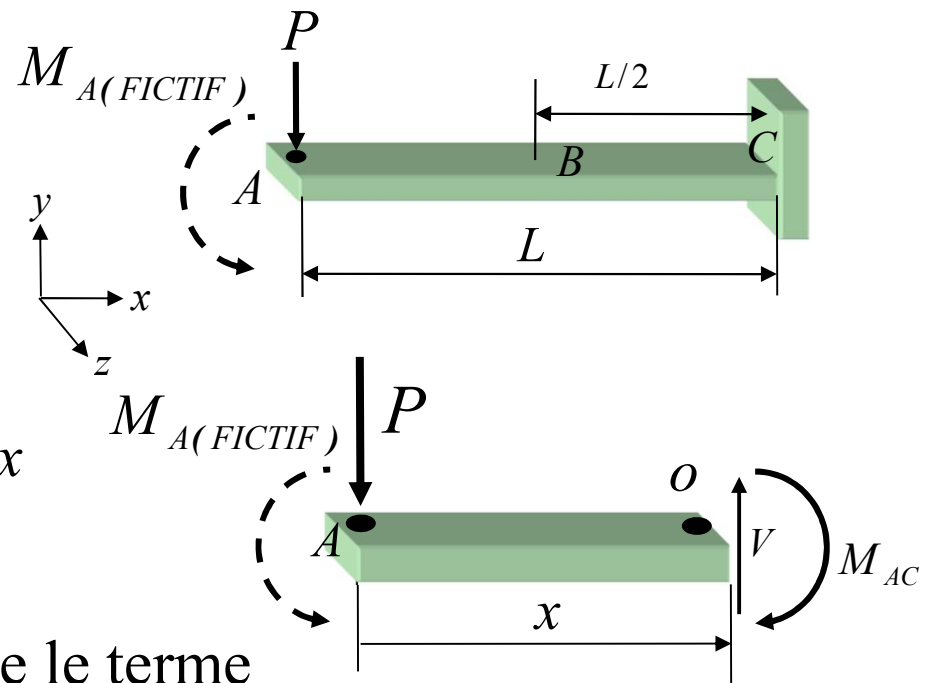
$$\delta_B = \frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

c) **Rotation en A**  $= \theta_A$

Pour calculer la rotation de la poutre en A, il faut qu'il y ait un **moment concentré** appliqué à ce point. Nous appliquerons un moment  $M_A$  fictif au point A.

Une seule équation est nécessaire pour évaluer le moment fléchissant entre A et C.

$$\theta_A = \left. \frac{\partial U}{\partial M_A} \right|_{M_A=0} = \int_0^L \frac{M_{AC}}{E \cdot I} \left( \frac{\partial M_{AC}}{\partial M_A} \right) dx$$



Nous poserons  $M_A = 0$  une fois que le terme de droite de l'équation aura été complètement développé.

**de A à C ( $0 \leq x \leq L$ )**

$$\sum M_o = -M_{AC} + P \cdot x + M_A = 0$$

$$M_{AC} = P \cdot x + M_A$$

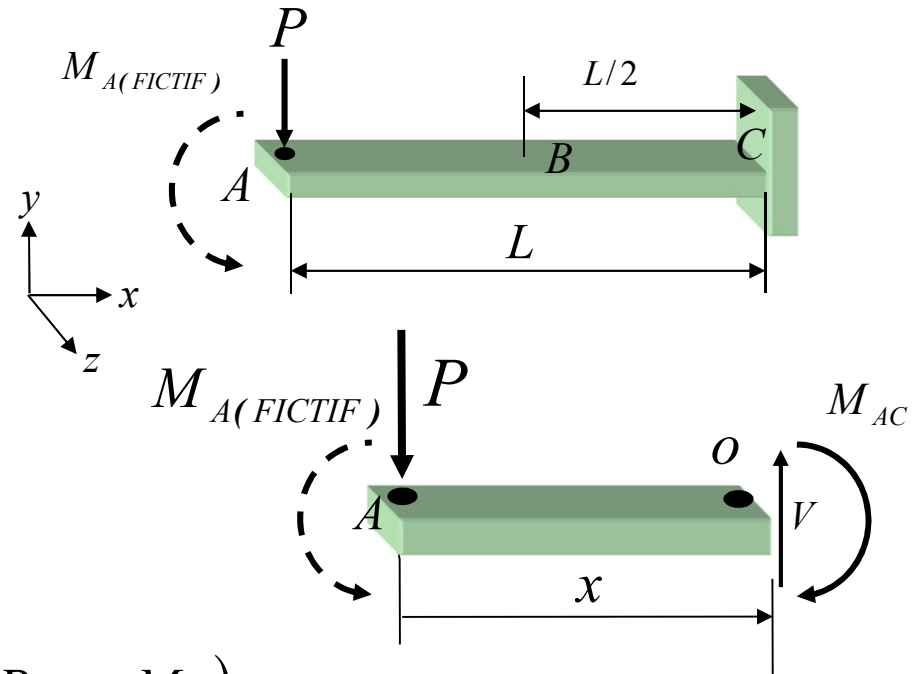
$$\theta_A = \left. \frac{\partial U}{\partial M_A} \right|_{M_A=0} = \int_0^L \frac{M_{AC}}{E \cdot I} \left( \frac{\partial M_{AC}}{\partial M_A} \right) dx$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{(P \cdot x + M_A)}{E \cdot I} \left( \frac{\partial (P \cdot x + M_A)}{\partial M_A} \right) dx = \int_0^L \frac{(P \cdot x + M_A)}{E \cdot I} \cdot (1) \cdot dx$$

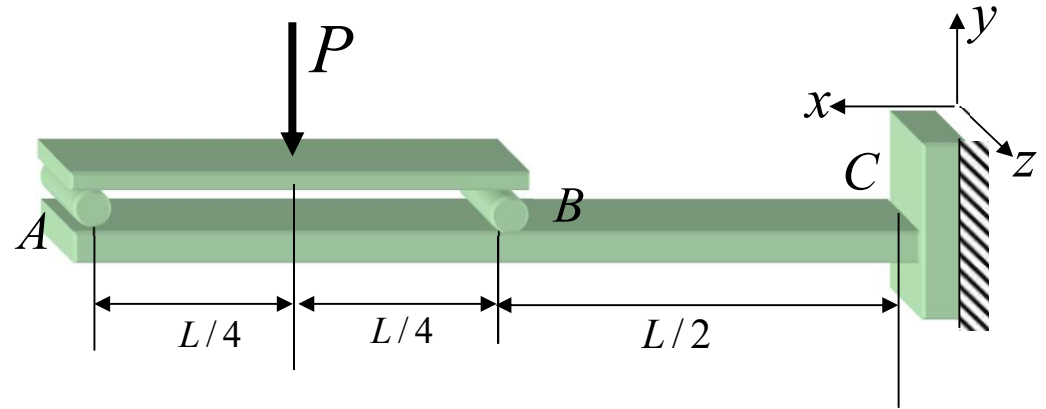
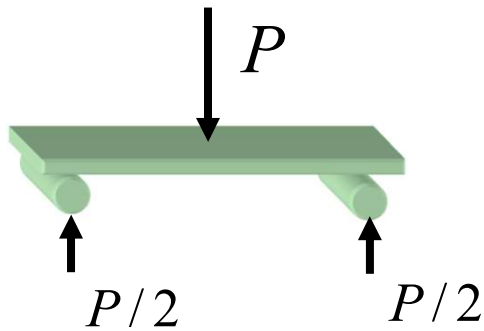
Avec  $M_A = 0$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{P \cdot x \cdot dx}{E \cdot I}$$

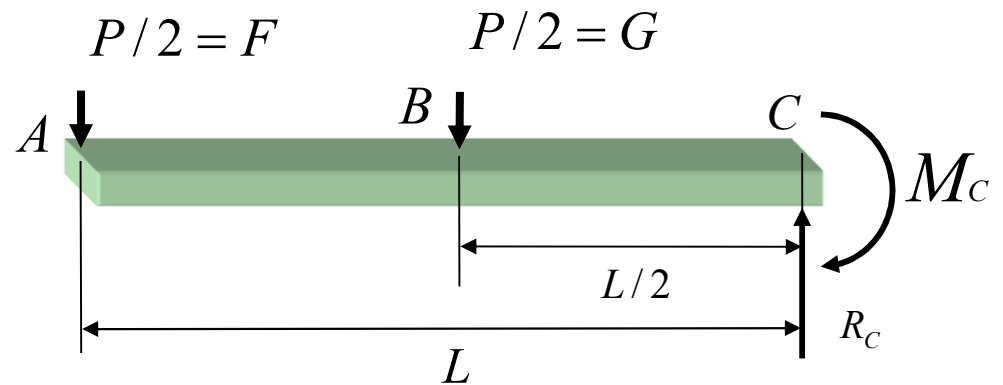
$$\theta_A = \frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$



**Exemple:**  $\delta_A = \frac{\partial U}{\partial F}$        $\delta_B = \frac{\partial U}{\partial G}$



$F$  étant une variable qui remplace  $P/2$  pour enlever la confusion

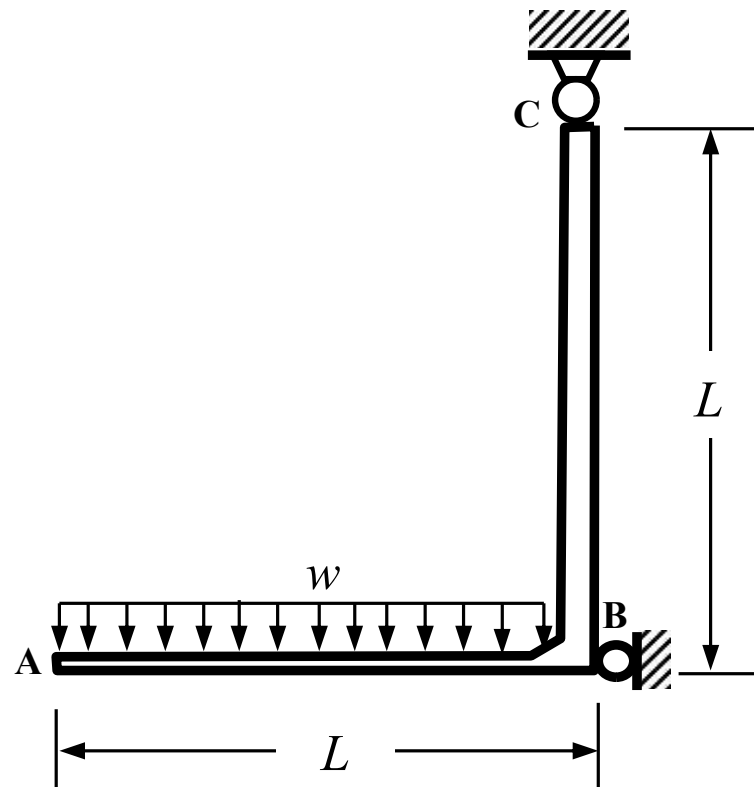




# Application aux systèmes isostatiques (exercice 1)

La structure ABC, simplement supportée au point B et articulée au point C, est soumise à une charge uniformément distribuée  $w$  entre les points A et B. Le joint en B est rigide. Les deux membrures AB et BC ont des aires identiques ( $A$ ) et une rigidité en flexion égale à  $EI$ .

**Déterminez la rotation au point C; dans vos calculs, négligez l'énergie de déformation associée à l'effort tranchant.**





# Méthodes énergétiques

- **Objectifs**

- Utiliser le théorème de Castigliano pour calculer les réactions aux appuis de structures hyperstatiques
- Utiliser le théorème de Castigliano pour calculer des déplacements, rotations ou rotations angulaires de structures hyperstatiques
- Savoir la définition de l'aire effective en cisaillement
- Calculer l'énergie de déformation en tenant compte de l'effort tranchant



# Énergie de déformation

- 4.1 Énergie de déformation
  - 4.4.1 Expression de l'énergie pour un chargement uniaxial
  - 4.4.2 Expression de l'énergie pour une force de cisaillement
  - 4.4.3 Énergie de déformation élastique pour un chargement général

## Méthodes énergétiques

- 4.2 Cas particuliers
  - 4.2.1 Tension
  - 4.2.2 Flexion
  - 4.2.3 Torsion
- 4.3 Théorème de la réciprocité, de *Maxwell-Betti*
- 4.4 Théorème de *Castigliano*
  - 4.4.1 Application aux systèmes isostatiques
  - 4.4.2 Application aux systèmes hyperstatiques
- 4.5 Effets de l'effort tranchant

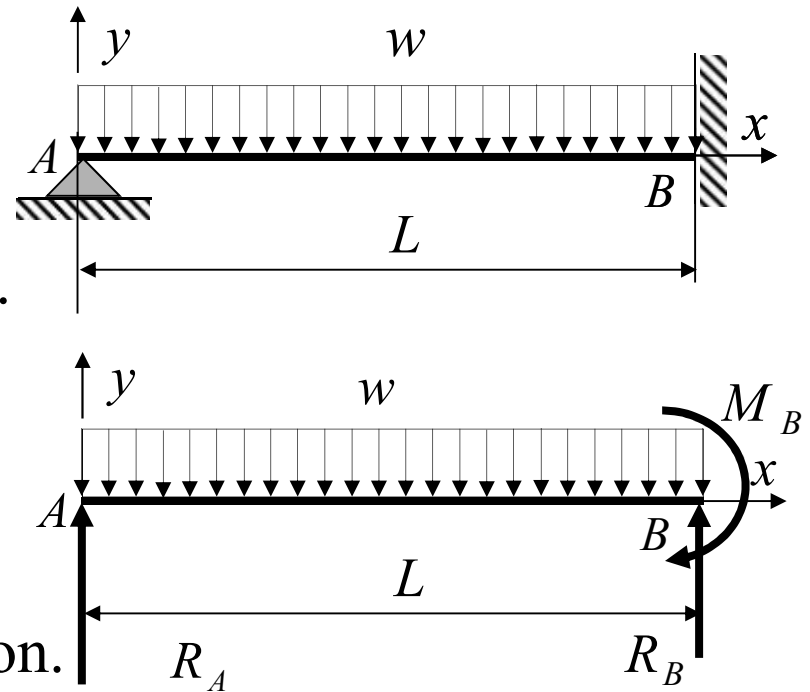
## Applications aux systèmes hyperstatiques

Cette poutre est *hyperstatique*:  
il n'y a pas suffisamment d'équations  
d'équilibre pour calculer les réactions.

Il y a trois inconnues:  $R_a$ ,  $R_b$  et  $M_b$ .

Deux équations d'équilibre sont  
disponibles:  $\sum F_y = 0$  ;  $\sum M_z = 0$

Par conséquent, il manque une équation.

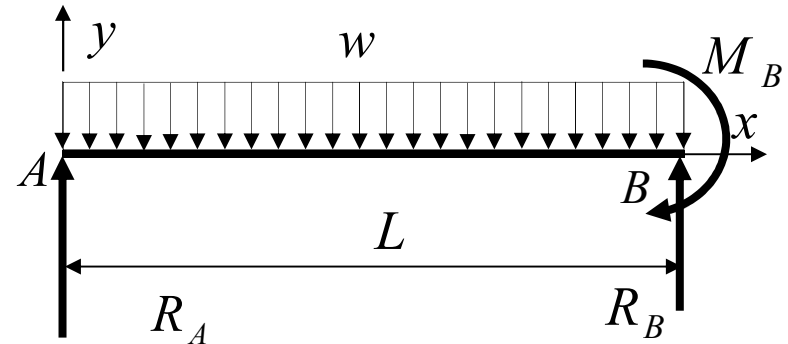


On peut lever l'indétermination en posant une **équation de compatibilité** et en transformant cette équation en équation de forces ou de moments à l'aide du **théorème de Castigliano**.



## *Méthode de solution d'un système hyperstatique*

- poser les équations d'équilibre disponibles
- déterminer le nombre d'équation(s) d'équilibre manquante(s),  $N$   
 $N = \text{degré d'hyperstaticité}$  ( $N = 1$  pour notre cours)

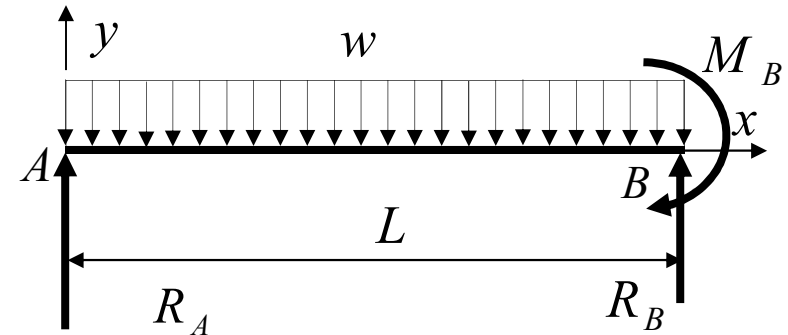


Pour la poutre montrée, il manque une équation;  
 le système est hyperstatique du premier degré

## *Méthode de solution (suite)*

- établir  $N$  équations de compatibilité
  - Pour la poutre montrée, on connaît trois conditions de compatibilité:

$$\delta_A = 0 \quad \delta_B = 0 \quad \theta_B = 0$$



- Le système étant hyperstatique du premier degré, on choisit une seule condition de compatibilité et la réaction correspondante est appelée **surabondante ( $R$ )**

## Méthode de solution (suite)

a) si on choisit  $\delta_A = 0$ ,  $R_A$  est la réaction *surabondante*

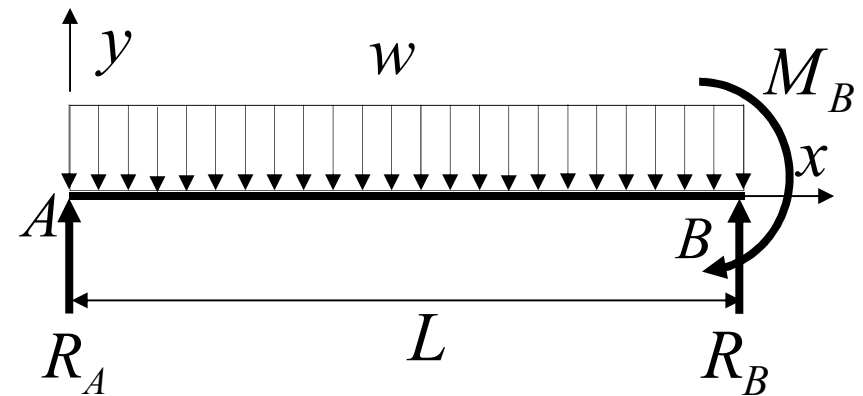
$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{\partial U}{\partial R} = \delta_A$$

b) si on choisit  $\delta_B = 0$ ,  $R_B$  est la réaction *surabondante*

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{\partial U}{\partial R} = \delta_B$$

c) si on choisit  $\theta_B = 0$ ,  $M_B$  est la réaction *surabondante*

$$\frac{\partial U}{\partial M_B} = \theta_B$$





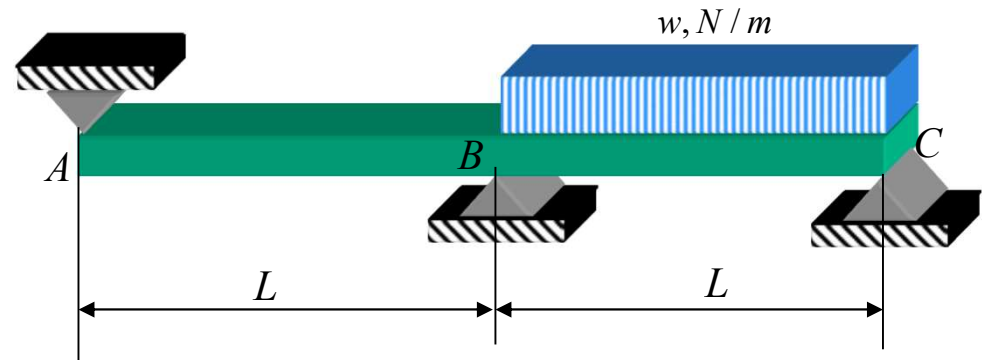
## *Méthode de solution (suite)*

- Exprimer toutes les réactions en fonction de la *réaction surabondante et du chargement*.
- Appliquer Castigliano:  
Les efforts internes et l'énergie de déformation doivent être exprimés en fonction de la *réaction surabondante et du chargement seulement*.

**Exemple :**

On demande de calculer

- a) les réactions aux appuis
- b) l'angle de rotation  $\theta_A$  au point A de cette poutre.



Cette poutre est **hyperstatique** car elle est appuyée sur trois appuis simples A, B et C:

- 3 réactions inconnues, soit  $R_A$ ,  $R_B$  et  $R_C$
- 2 équations d'équilibre disponibles, soit  $\sum F_y = 0$  ;  $\sum M_z = 0$

La solution est d'utiliser le théorème de *Castigliano*.



## Résumé

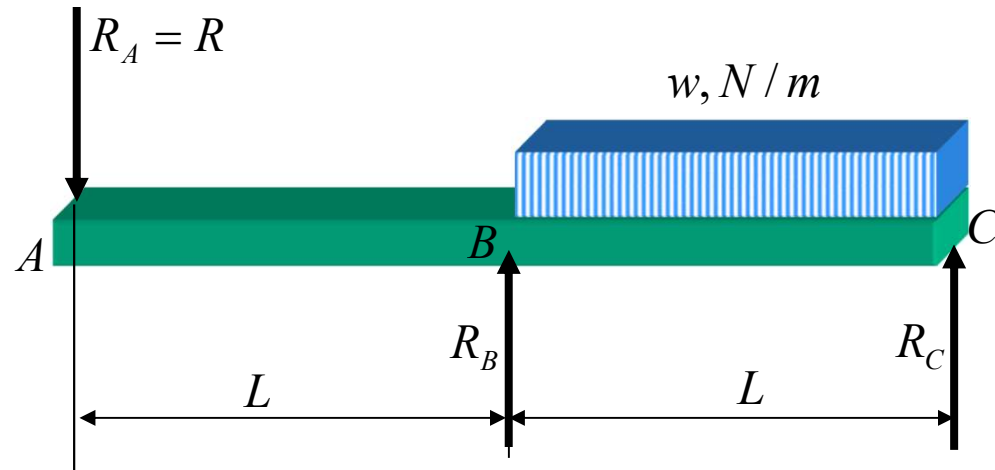
**Procédure pour trouver les réactions aux appuis d'un problème hyperstatique est :**

1. Choisir une condition de compatibilité et déclarer la réaction correspondante *surabondante* ( $R$ )
2. Établir les équations d'équilibre. Les réactions sont exprimées en **fonction du chargement et de la force surabondante**
3. Établir les équations des efforts internes et les exprimer en **fonction du chargement et de la surabondante**
4. Appliquer le théorème de *Castigliano* à la condition de compatibilité choisie
  - Permet de déterminer la surabondante ( $R$ )
  - Déterminer les autres réactions aux appuis à l'aide des équations d'équilibre

1. Réactions aux appuis

On choisit  $\delta_A$  comme condition de compatibilité

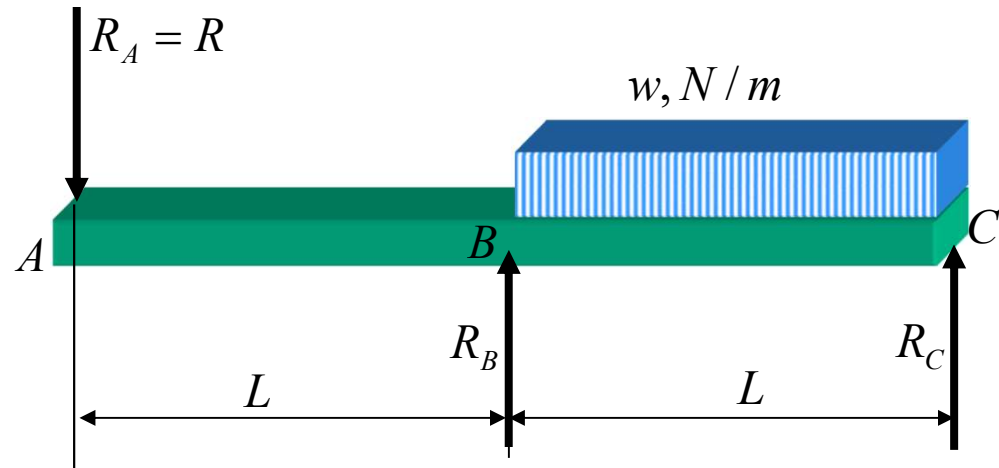
$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \delta_A = 0$$



La force  $R_A$  est déclarée *surabondante*

2. Équilibre

$$R_A = R$$



$$\sum M_C = 0$$

$$R_B \cdot L = \frac{w \cdot L^2}{2} + 2 \cdot R \cdot L$$

$$R_B = \frac{w \cdot L}{2} + 2 \cdot R$$

$$\sum F_y = 0$$

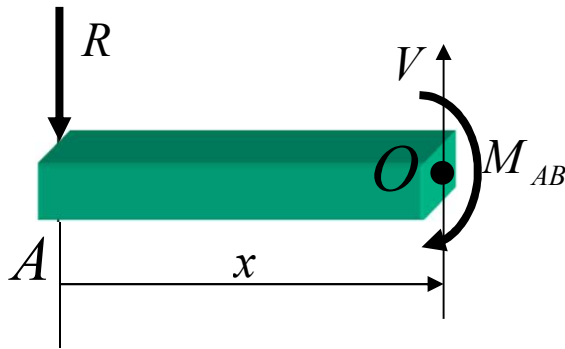
$$R_C = w \cdot L + R - R_B$$

$$R_C = \frac{w \cdot L}{2} - R$$

Les réactions sont exprimées en fonction de **R** et du **chargement** seulement



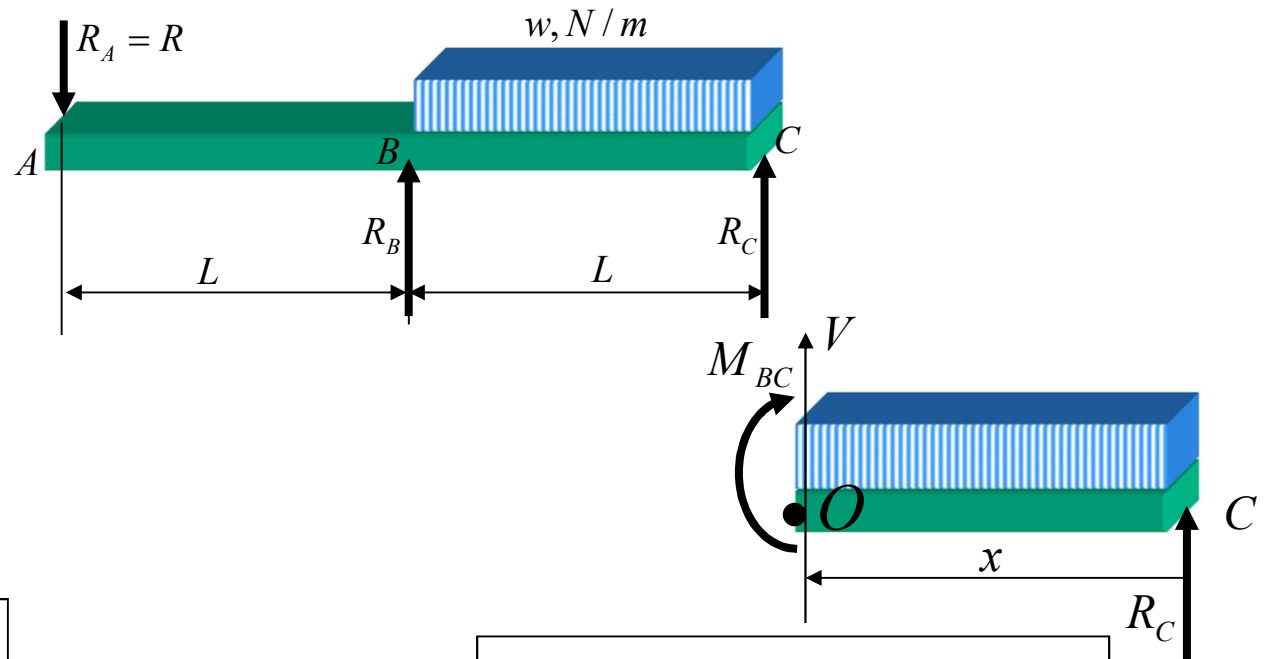
3. Efforts internes



De A à B :  $0 < x < L$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M_{AB} = R \cdot x$$

Les efforts internes sont exprimées en fonction de **R** et du **chargement** seulement



De B à C :  $0 < x < L$

$$\sum M_O = M_{BC} - R_C \cdot x + \frac{w \cdot x^2}{2} = 0$$

$$M_{BC} = \left( \frac{w \cdot L}{2} - R \right) \cdot x - \frac{w \cdot x^2}{2}$$



4. Appliquer la condition de compatibilité

$$M_{AB} = R \cdot x$$

$$M_{BC} = \left( \frac{w \cdot L}{2} - R \right) \cdot x - \frac{w \cdot x^2}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \delta_A = \int_0^L \frac{M_{AB} \left( \frac{\partial M_{AB}}{\partial R} \right)}{E \cdot I} \cdot dx + \int_0^L \frac{M_{BC} \left( \frac{\partial M_{BC}}{\partial R} \right)}{E \cdot I} \cdot dx = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \int_0^L (R \cdot x) \cdot (x) \cdot dx + \int_0^L \left[ \left( \frac{w \cdot L}{2} - R \right) \cdot x - \frac{w \cdot x^2}{2} \right] \cdot (-x) \cdot dx = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{R \cdot L^3}{3} - \frac{w \cdot L \cdot L^3}{2 \cdot 3} + \frac{R \cdot L^3}{3} + \frac{w \cdot L^4}{2 \cdot 4} = 0$$

$$R = \frac{w \cdot L}{16}$$

Avec les équations d'équilibre

$$R_C = \frac{7 \cdot w \cdot L}{16}$$

$$R_B = \frac{5 \cdot w \cdot L}{8}$$

b) Rotation  $\theta_A$  de la poutre en A

La tâche est facile avec *Castigliano*, sachant que

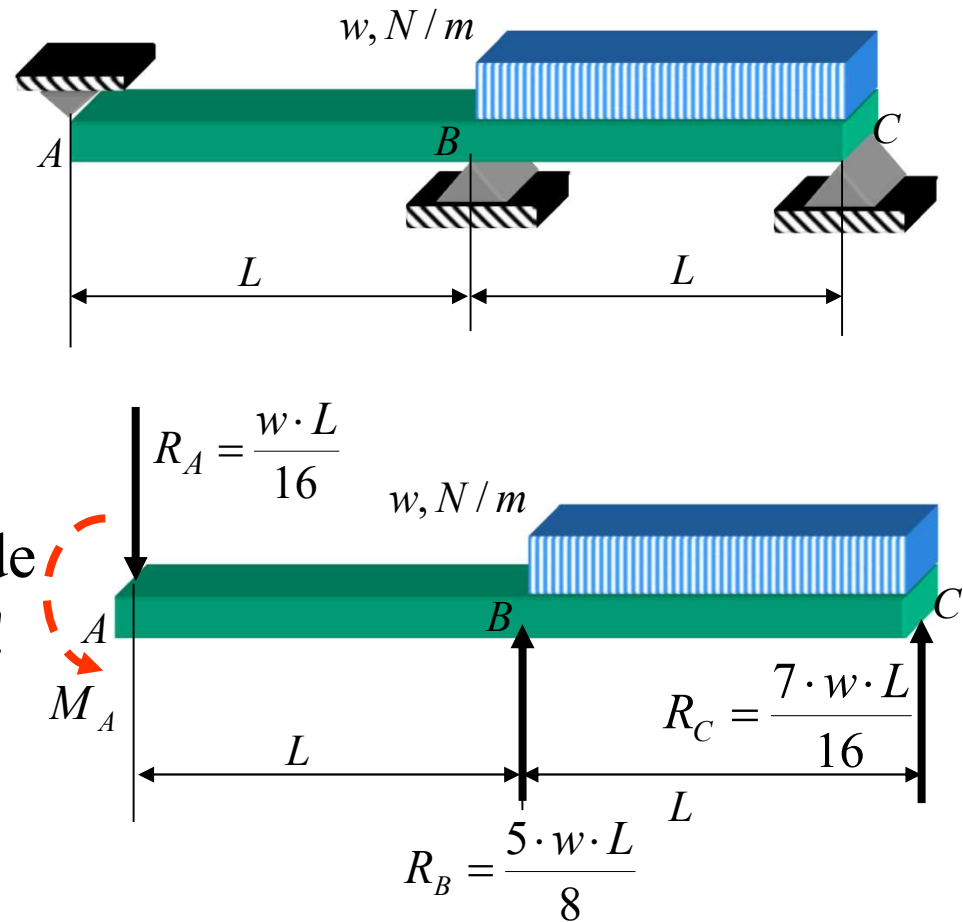
$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}$$

Le problème est qu'il n'y a pas de moment concentré  $M_A$  au point A!

Que fait-on?

On ajoute un moment fictif.

Mais, par le fait même, on perturbe l'équilibre de la poutre

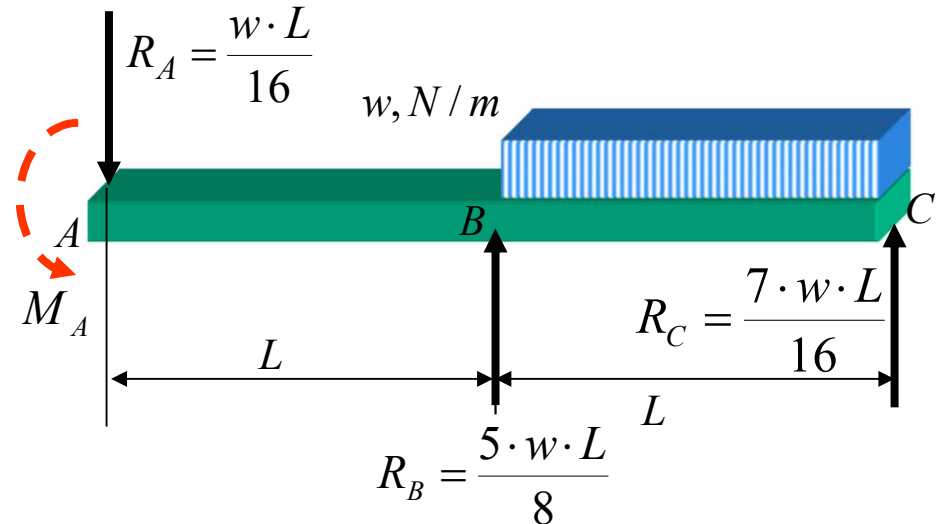


## Truc pour restaurer l'équilibre

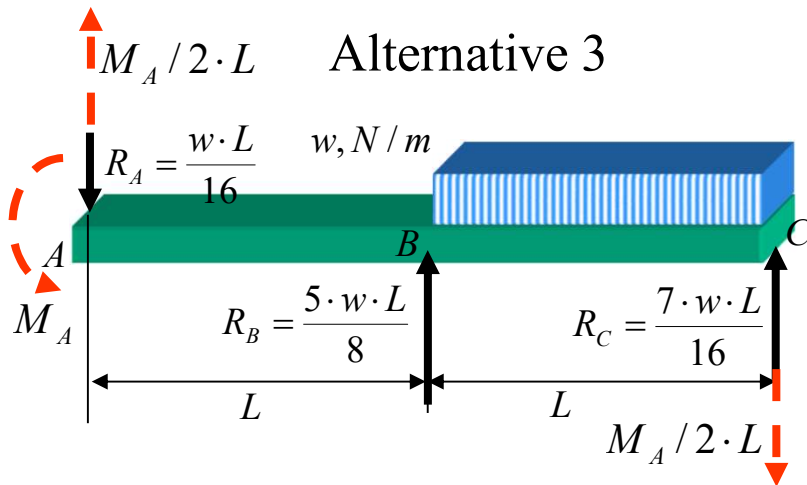
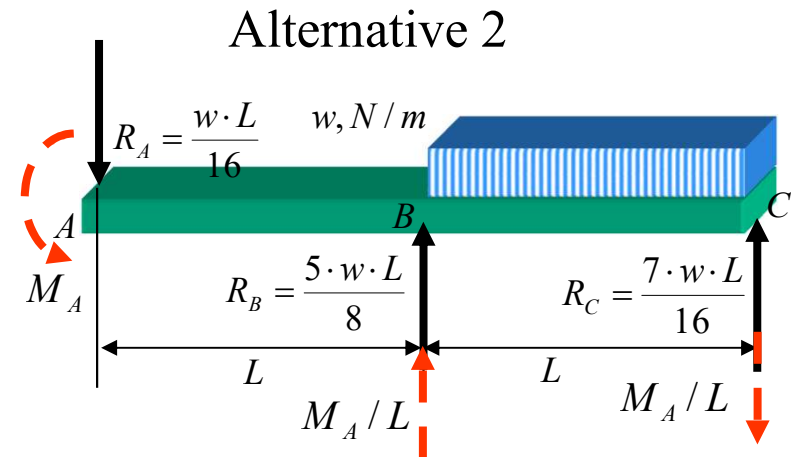
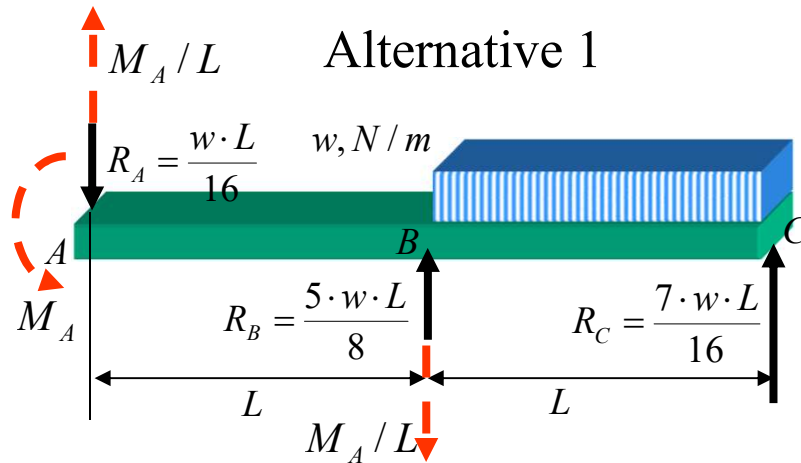
### Comment ?

On garde les réactions calculées précédemment

On équilibre seulement le moment fictif  $M_A$  en ajoutant des forces :



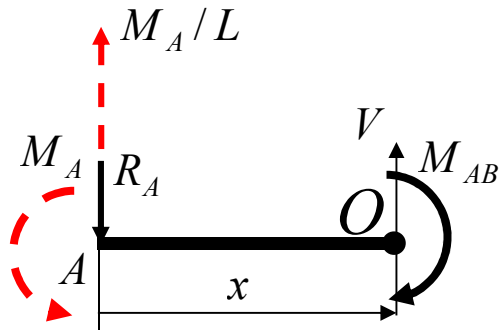
- qui ont un moment égal et opposé à celui du moment ajouté
- qui sont d'intensité égale et opposée pour ne pas perturber l'équilibre de la poutre dans la direction  $y$
- qui s'appliquent aux **points d'appui** de la poutre pour ne pas perturber la déformée de la poutre et pour ne pas ajouter de l'énergie de déformation dans la poutre



- Les trois alternatives permettent d'annuler  $M_A$  et de garder la poutre en équilibre en  $y$ .
- Le choix d'une alternative plutôt qu'une autre est basé sur une question d'expérience.
- Ici, c'est l'alternative 1 qui semble et s'avérera la plus avantageuse.

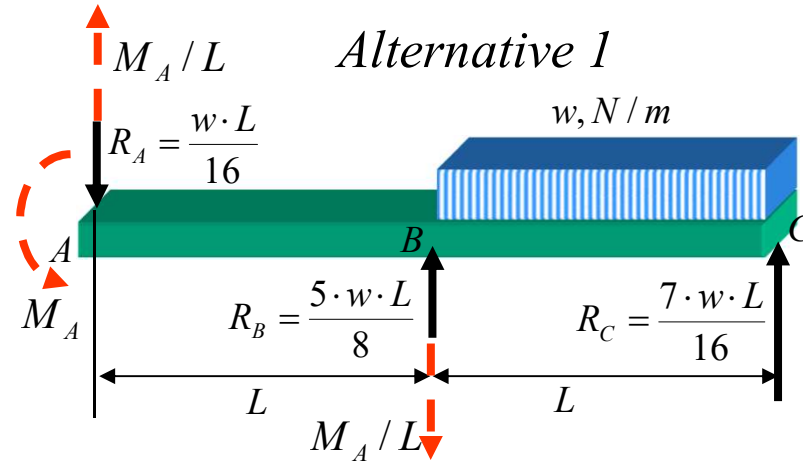
Les efforts internes

De A à B :  $0 < x < L$

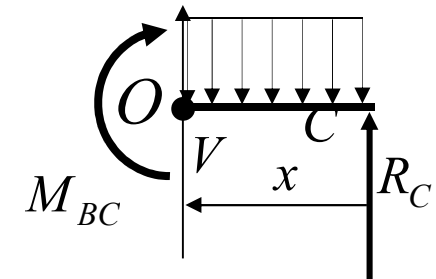


$$\sum M_O = 0 \Rightarrow$$

$$M_{AB} = M_A + R_A \cdot x - \frac{M_A}{L} \cdot x$$



De B à C :  $0 < x < L$



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow$$

$$M_{BC} = R_C \cdot x - \frac{w \cdot x^2}{2}$$



Selon *Castigliano*

$$M_{AB} = M_A + R_A \cdot x - \frac{M_A}{L} \cdot x$$

$$M_{BC} = R_C \cdot x - \frac{w \cdot x^2}{2}$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} \Big|_{M_A=0} = \int_0^L \frac{M_{AB} \left( \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_A} \right)}{E \cdot I} \cdot dx + \int_0^L \frac{M_{BC} \left( \frac{\partial M_{BC}}{\partial M_A} \right)}{E \cdot I} \cdot dx$$

$$\theta_A = \frac{1}{E \cdot I} \left[ \int_0^L \left( M_A + R_A \cdot x - \frac{M_A}{L} \cdot x \right) \cdot \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \cdot dx + \int_0^L \left( R_C \cdot x - \frac{w \cdot x^2}{2} \right) \cdot (0) \cdot dx \right]$$

$$R_A = \frac{w \cdot L}{16}$$

$$R_C = \frac{7 \cdot w \cdot L}{16}$$

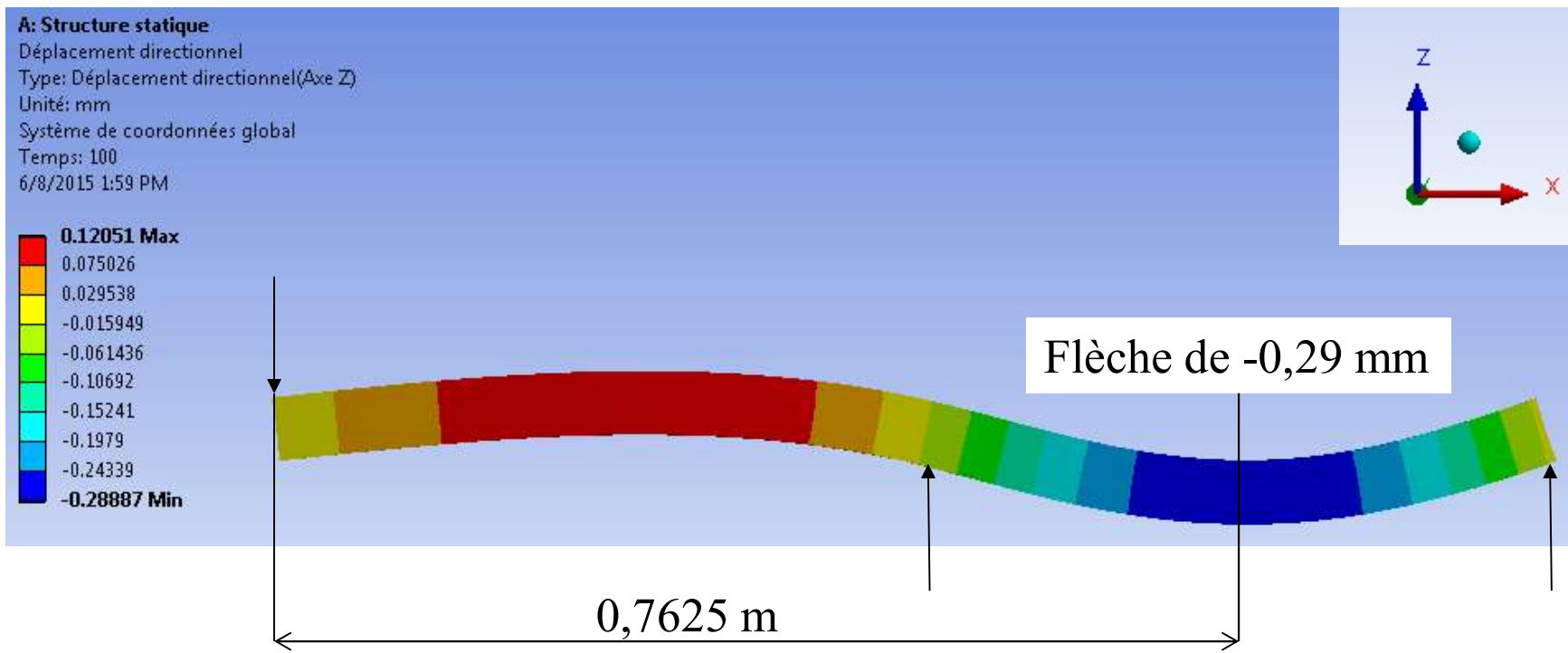
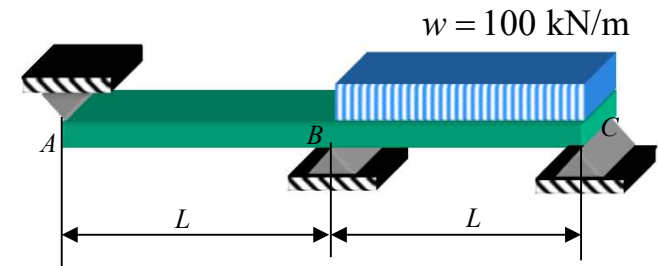
En posant  $M_A = 0$

$\Rightarrow$

$$\theta_A = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( \frac{R_A \cdot L^2}{6} \right) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{w L^3}{96}$$

# Simulation ÉF de l'exemple précédent

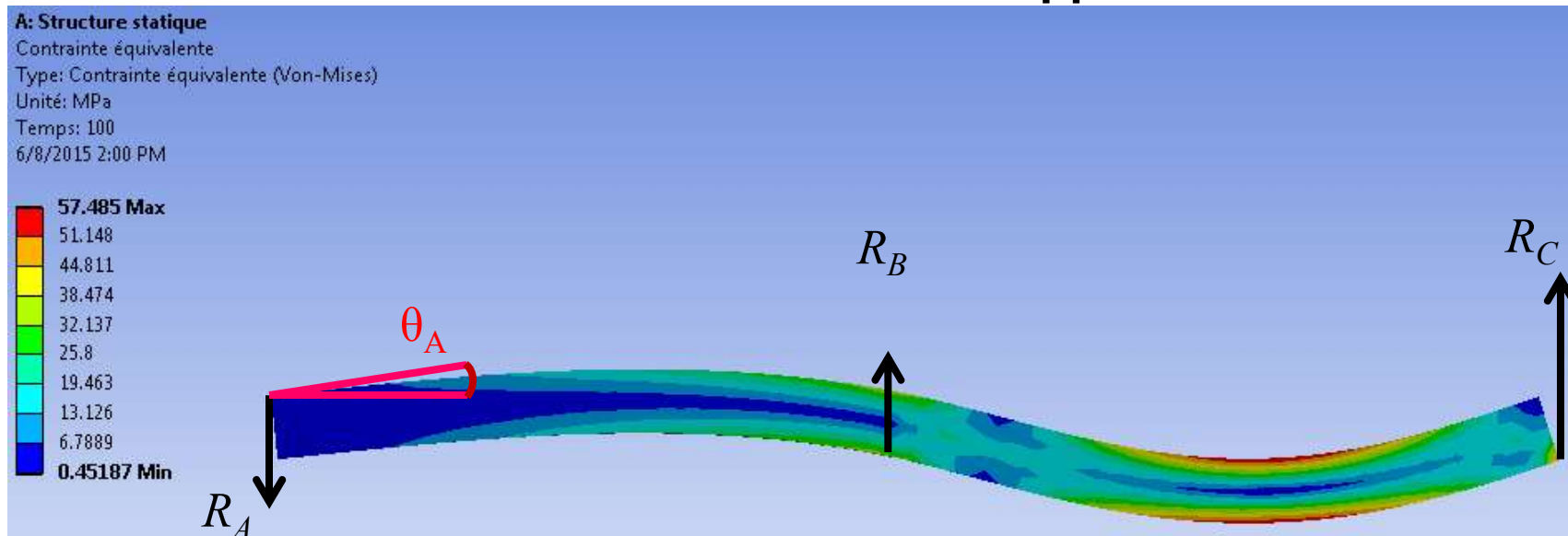
- Dimensions:  $50 \times 100 \times 1000$  mm
  - $I_y = 1.042 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
- Force résultante de 50 kN sur le tronçon [BC]





# Simulation ÉF de l'exemple précédent

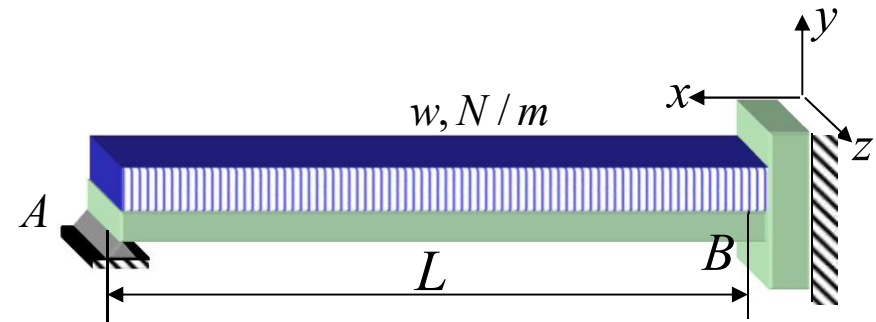
## Contraintes de Von Mises et réactions aux appuis



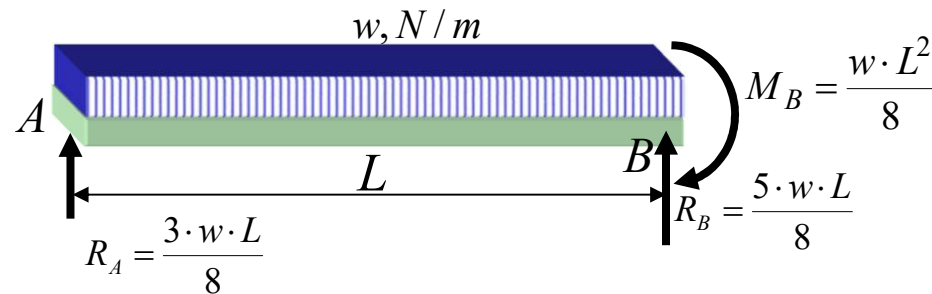
	Valeurs théoriques	Résultats ÉF
$R_A$	-3.125 kN	-3.114 kN
$R_B$	3.125 kN	3.123 kN
$R_C$	21.875 kN	21.886 kN
$\theta_A$	0.03581°	0.03594°

### Exemple:

On demande de calculer  $\theta_A$  pour la poutre illustrée ci-contre

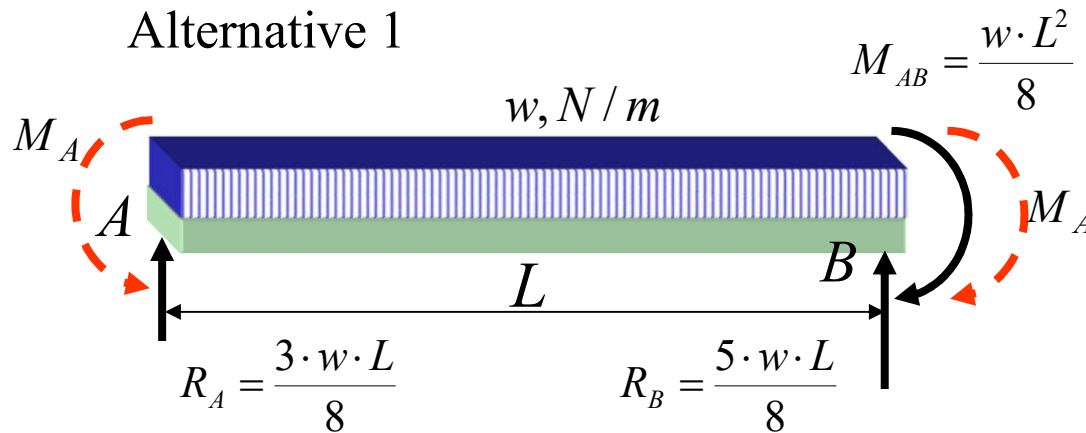


Les réactions  $R_A$ ,  $R_B$  et le moment  $M_B$  sont déjà connus.

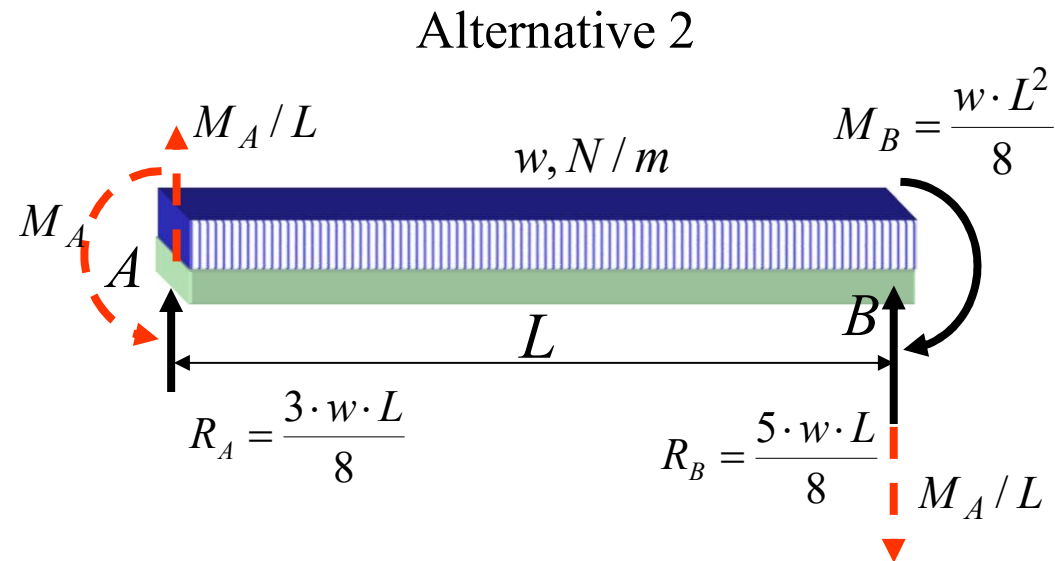


Pour pouvoir calculer  $\theta_A$ , il faut **ajouter un moment fictif** concentré en  $A$  et ensuite **restaurer l'équilibre**.

## Deux alternatives sont possibles



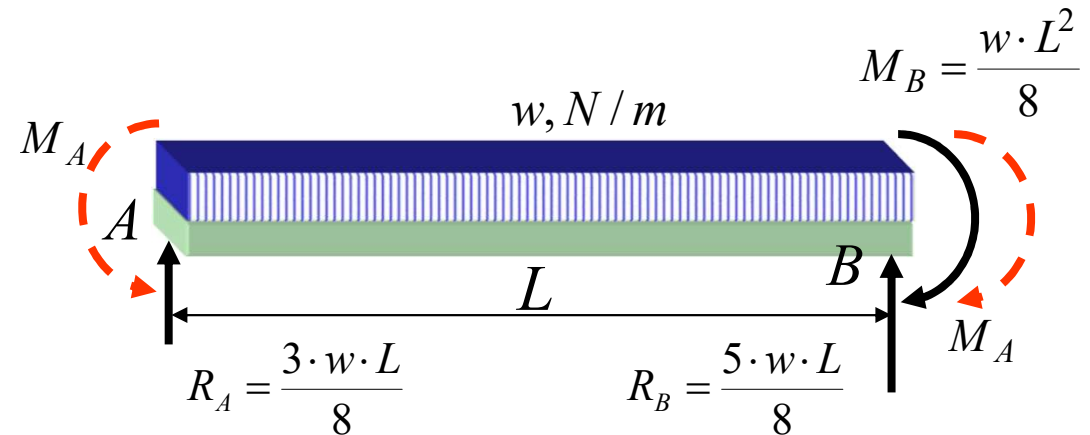
L'alternative 1 est possible parce que l'encastrement B peut reprendre un moment sans que de l'énergie de déformation soit ajoutée au système.



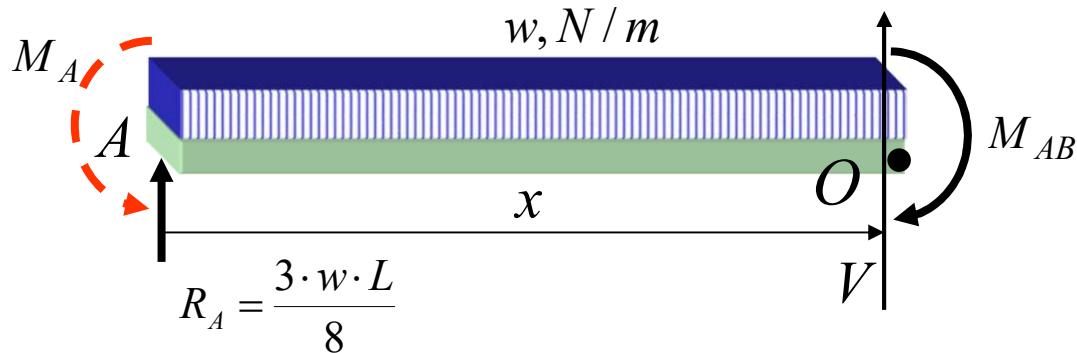
On choisit l'alternative 1.

Efforts internes

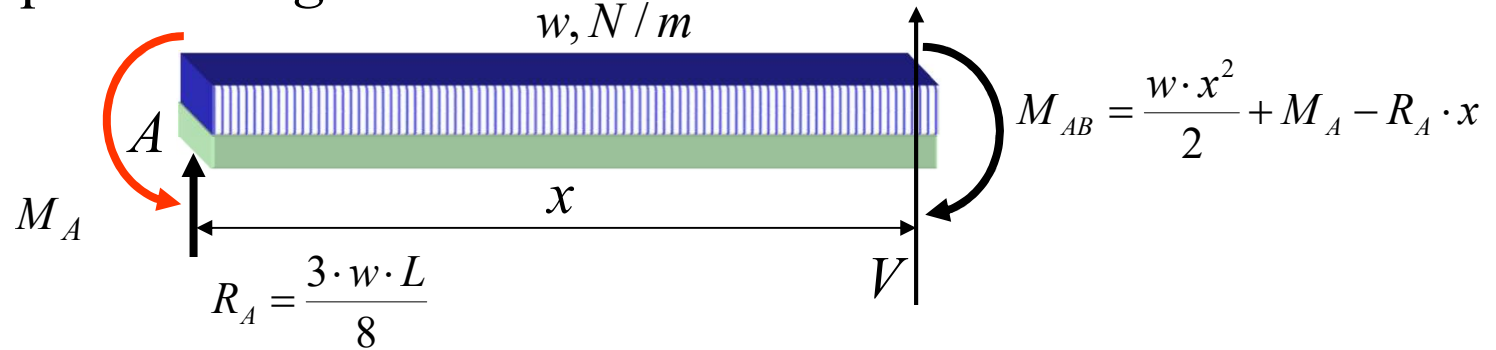
De A à B :



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M_{AB} = \frac{w \cdot x^2}{2} + M_A - R_A \cdot x$$



Appliquant *Castigliano* :



$$\theta_A = \left. \frac{\partial U}{\partial M_A} \right|_{M_A=0} = \int_0^L \frac{M_{AB}}{E \cdot I} \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_A} dx = \int_0^L \frac{M_A + \frac{w \cdot x^2}{2} - R_A \cdot x}{E \cdot I} \cdot (1) \cdot dx$$

En posant  $M_A = 0$ ,  $\Rightarrow$   $\theta_A = -\frac{w \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$

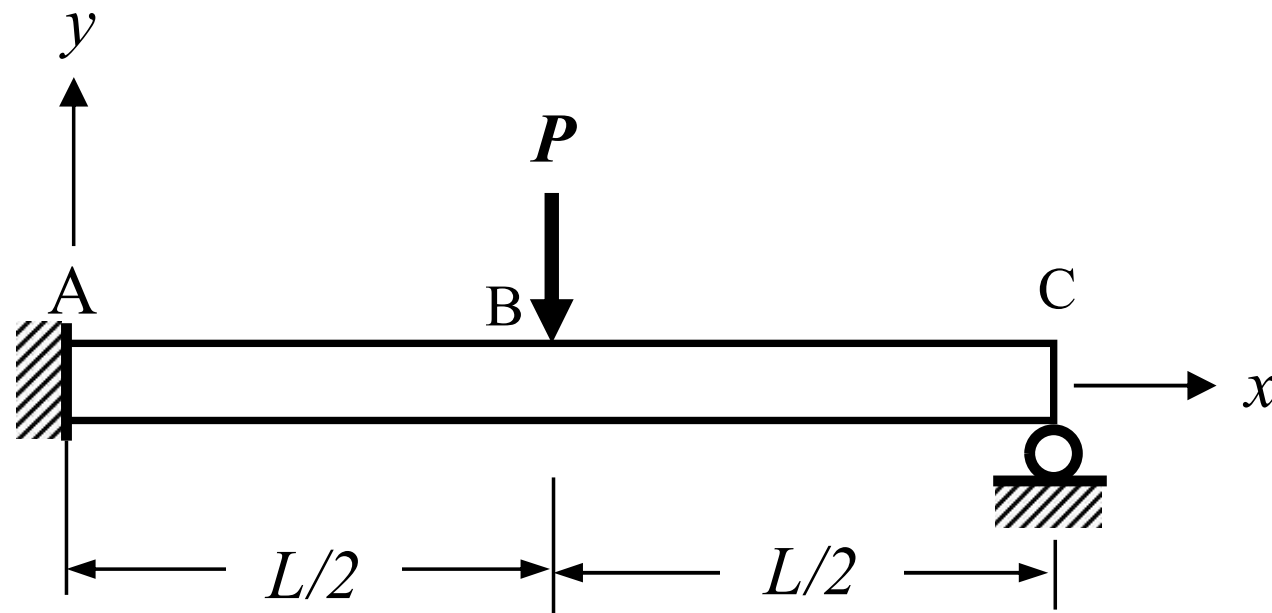
dans le sens inverse de  $M_A$  fictif



## Applications aux systèmes hyperstatiques (exercice 2)

Une poutre encastrée à l'une de ses extrémités et simplement supportée à l'autre et chargée tel qu'illustré. Calculer :

- les réactions aux appuis de cette poutre ;
- la pente de cette poutre au point B.





# Énergie de déformation

## 4.1 Énergie de déformation

### 4.4.1 Expression de l'énergie pour un chargement uniaxial

### 4.4.2 Expression de l'énergie pour une force de cisaillement

### 4.4.3 Énergie de déformation élastique pour un chargement général

## Méthodes énergétiques

## 4.2 Cas particuliers

### 4.2.1 Tension

### 4.2.2 Flexion

### 4.2.3 Torsion

## 4.3 Théorème de la réciprocité, de *Maxwell-Betti*

## 4.4 Théorème de *Castigliano*

### 4.4.1 Application aux systèmes isostatiques

### 4.4.2 Application aux systèmes hyperstatiques

## 4.5 Effets de l'effort tranchant



## Effets de l'effort tranchant

Jusqu'ici, on a négligé l'apport de l'énergie de déformation associée à l'*effort tranchant* dans le calcul de la flèche ou de l'angle de rotation.

La notion de *l'aire effective en cisaillement*  $A_c$  simplifie considérablement le calcul de l'énergie de déformation due à l'effort tranchant et permet ainsi de tenir compte de l'effort tranchant dans le calcul de la flèche et de l'angle de rotation.

$A_c$  devient une propriété de la section au même titre que les moments d'aire et que la constante de torsion





## Aire effective de cisaillement

$A_c$  est déterminée de façon à ce que l'énergie de déformation,

- calculée en utilisant la distribution *moyenne* de la contrainte de cisaillement agissant sur l'aire  $A_c$  par :

$$\tau_m = \frac{V}{A_c}$$

au lieu de la distribution réelle:  $V = \int \tau dA$

- soit équivalente à l'énergie de déformation calculée en utilisant la distribution réelle de la contrainte de cisaillement sur la section



Ainsi, pour une contrainte de cisaillement  $\tau$ , l'énergie de déformation  $U$  est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau \cdot \gamma \cdot dV$$

Puisque :

$$\gamma = \tau / G$$

on peut écrire :

$$U = \frac{1}{2 \cdot G} \int_L \int_A \tau^2 \cdot dA \cdot dx \quad (\text{a})$$



En considérant la contrainte de cisaillement moyenne agissant sur l'aire *effective de cisaillement*, l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2 \cdot G} \int_L \int_A \tau_m^2 \cdot dA \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot G} \int_L \tau_m^2 \cdot A_c \cdot dx$$

Puisque  $\tau_m = V / A_c$

$$U = \frac{1}{2 \cdot G} \int_L \frac{V^2}{A_c} \cdot dx \quad (b)$$



$$U = \frac{1}{2 \cdot G} \int_L \int_A \tau^2 \cdot dA \cdot dx \quad (\text{a})$$

$$U = \frac{1}{2 \cdot G} \int_L \frac{V^2}{A_c} \cdot dx \quad (\text{b})$$

En comparant (a) et (b), on tire :

$$\frac{V^2}{A_c} = \int_A \tau^2 \cdot dA$$

$$A_c = \frac{V^2}{\int_A \tau^2 \cdot dA} \quad (\text{c})$$



L'aire *effective de cisaillement*  $A_c$  d'une section est déterminée en utilisant (c). Lorsque sa valeur est connue, l'énergie de déformation due à l'effort tranchant peut alors être calculée facilement en utilisant (b).

$$U = \frac{1}{2 \cdot G} \int_L \frac{V^2}{A_c} \cdot dx \quad (b)$$

$$A_c = \frac{V^2}{\int_A \tau^2 \cdot dA} \quad (c)$$

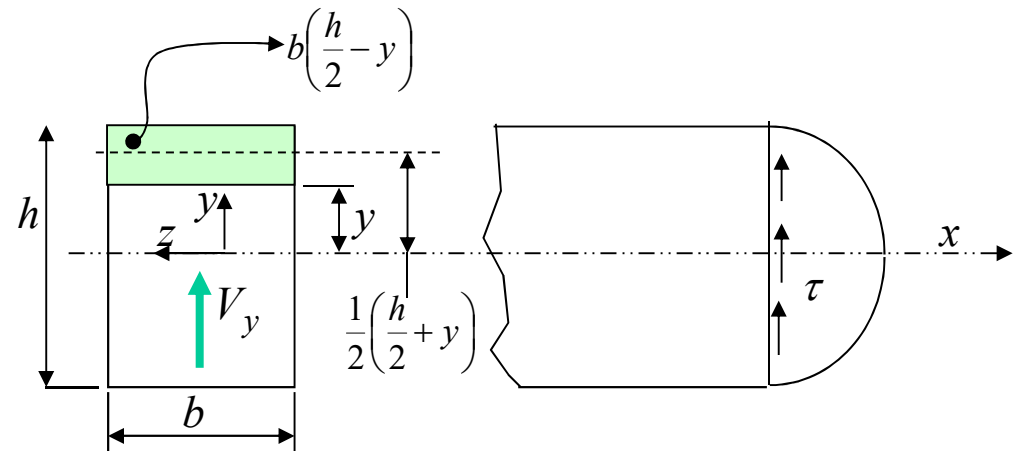
# Aire effective de cisaillement

**Exemple :** Déterminer l'aire effective de cisaillement  $A_C$  d'une poutre de section rectangulaire.

$$\tau = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot b}$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$Q_z = \overline{A \cdot y} = \left[ b \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} + y \right) \right]$$



$$\tau = \frac{6 \cdot V_y}{b \cdot h^3} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

## Aire effective de cisaillement

Exemple (suite) : Section rectangulaire

$$\int_A \tau^2 \cdot dA = 2 \cdot b \int_0^{h/2} \frac{36 \cdot V_y^2}{b^2 \cdot h^6} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]^2 \cdot dy$$

$$A_c = \frac{V^2}{\int_A \tau^2 \cdot dA}$$

$$\int_A \tau^2 \cdot dA = \frac{72 \cdot V_y^2}{b \cdot h^6} \int_0^{h/2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^4 - 2 \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot y^2 + y^4 \right] \cdot dy$$

$$\int_A \tau^2 \cdot dA = \frac{72 \cdot V_y^2}{b \cdot h^6} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^5 - \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^5 + \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^5 \right] = \frac{6 \cdot V^2}{5 \cdot b \cdot h}$$

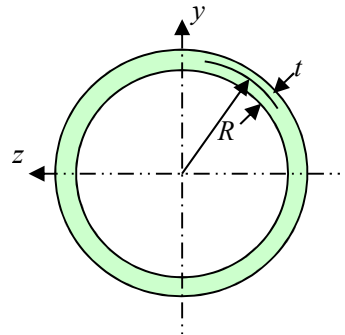
$$A_c = \frac{5 \cdot b \cdot h}{6} = \frac{5 \cdot A}{6}$$

# Aire effective de cisaillement ( $A_c$ )

## Exemples de section

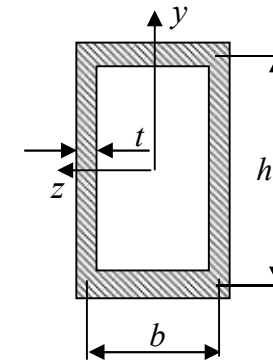
Tube rond à paroi mince

$$A_c = \pi \cdot R \cdot t = \frac{A}{2}$$



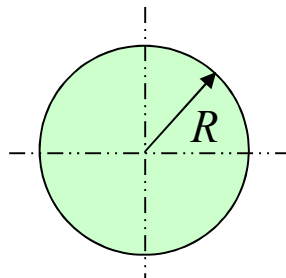
Tube rectangulaire à paroi mince

$$A_c \approx 2 \cdot h \cdot t$$



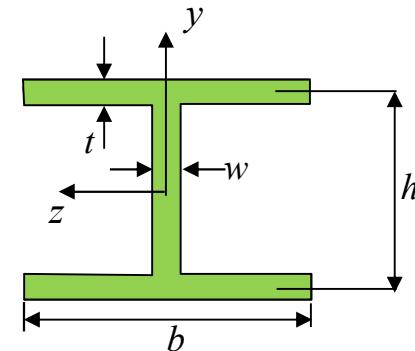
Tube rond plein

$$A_c = \frac{9}{10} \cdot \pi \cdot R^2$$



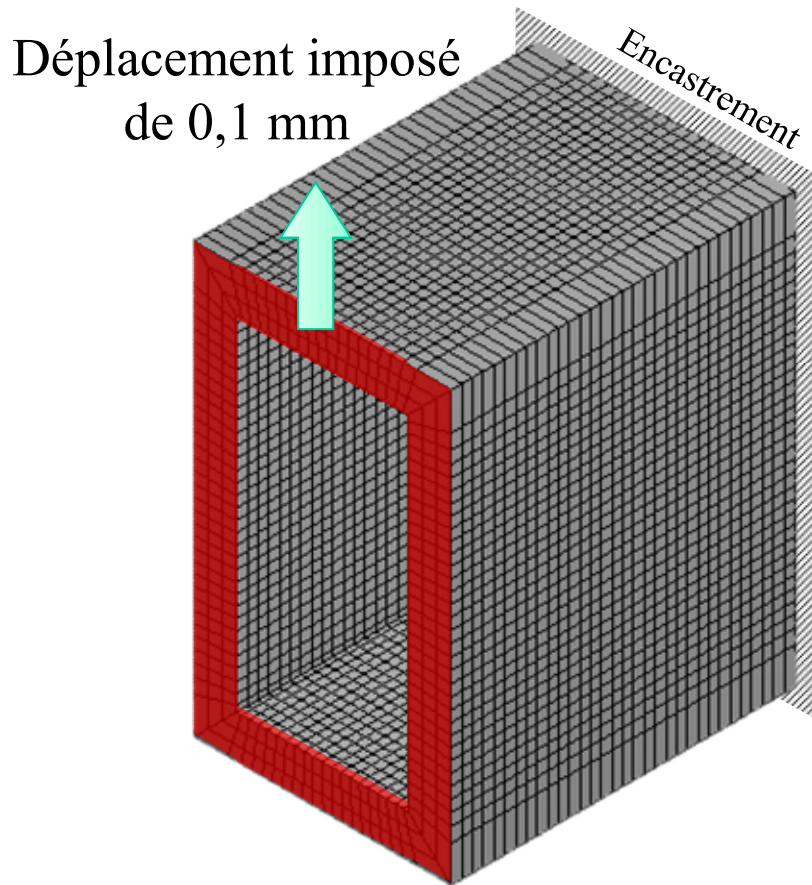
Poutre en I

$$A_c \approx w \cdot h$$

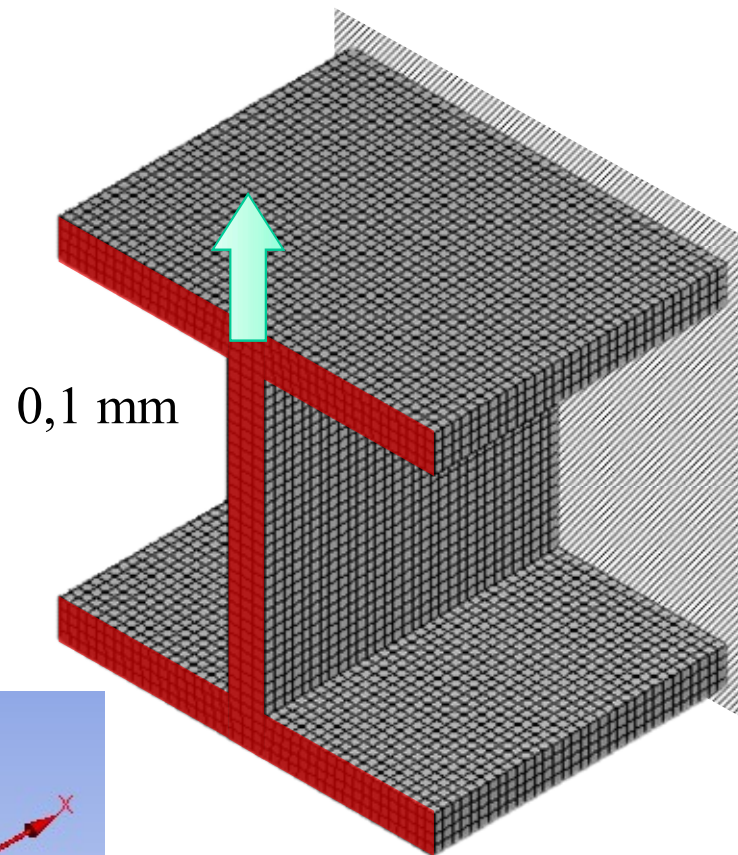




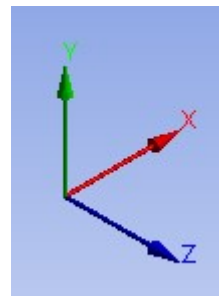
# Illustration par ÉF de l'aire effective de cisaillement $\tau_{xy}$



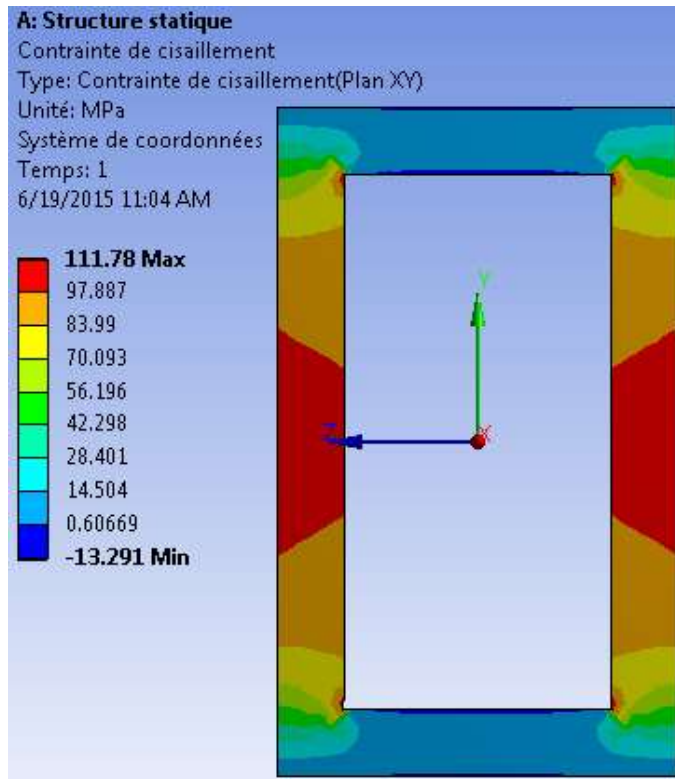
Poutre courte – section rectangulaire mince



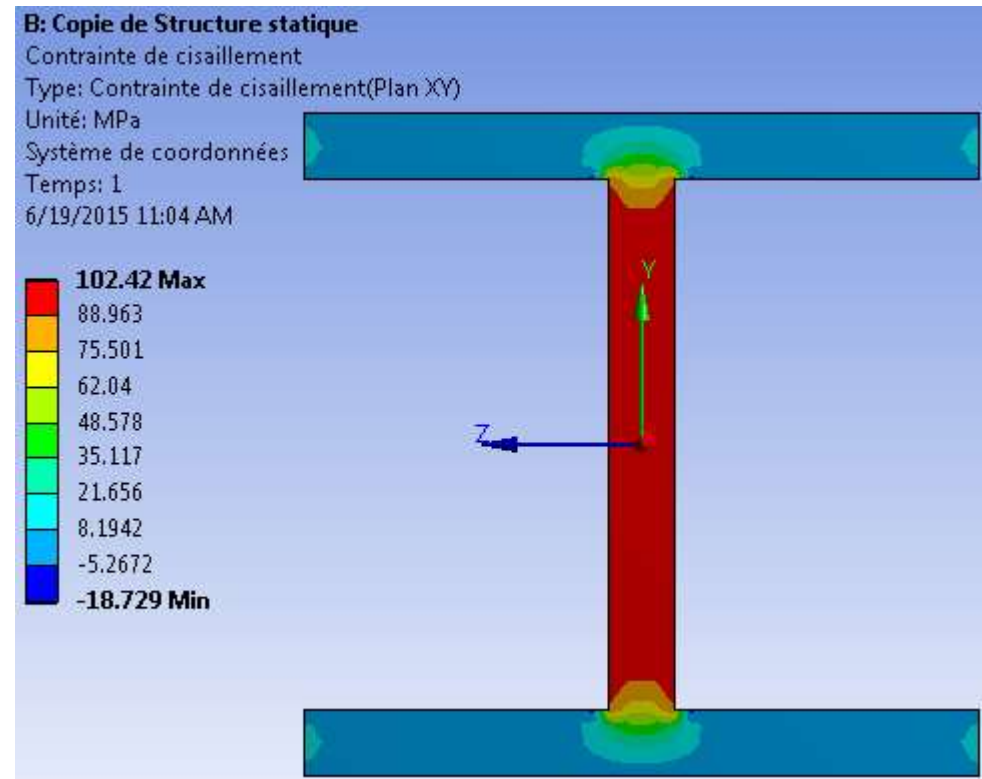
Poutre courte – section en I



# Illustration par ÉF de l'aire effective de cisaillement $\tau_{xy}$



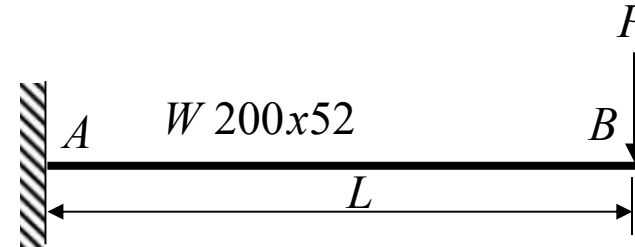
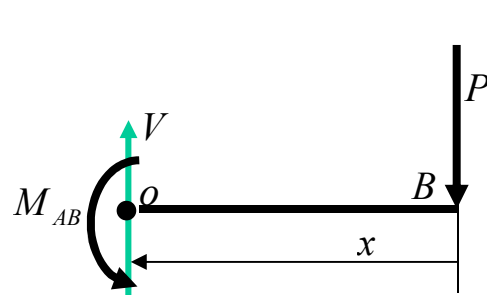
Poutre courte – section rectangulaire mince



Poutre courte – section en I

## Théorème de Castigliano

**Exemple :** Déterminer la contribution de l'effort tranchant à la flèche au point d'application de la force  $P$



De A à B :  $0 < x < L$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{AB} = P \cdot x$$

$$V = P$$

$$E = 200 \times 10^3 \text{ MPa} \quad ; \quad G = 77 \times 10^3 \text{ MPa}$$

$$I = 52,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A_c = w \times h = 7,9 \text{ mm} \times 206 \text{ mm} = 1627 \text{ mm}^2$$

$$\text{Selon Castigliano : } \delta_B = \frac{\partial U}{\partial P}$$



$$U = \int_0^L \frac{M_{AB}^2}{2 \cdot E \cdot I} dx + \int_0^L \frac{V^2}{2 \cdot G \cdot A_c} dx$$

$$M_{AB} = P \cdot x$$

$$V = P$$

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M_{AB} (\partial M_{AB} / \partial P)}{E \cdot I} dx + \int_0^L \frac{V (\partial V / \partial P)}{G \cdot A_c} dx$$

$$\delta_B = \int_0^L \frac{P \cdot x(x)}{E \cdot I} dx + \int_0^L \frac{P(1)}{G \cdot A_c} dx = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{P \cdot L}{G \cdot A_c}$$

$$\delta_B = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left[ 1 + \frac{3 \cdot E \cdot I}{G \cdot A_c \cdot L^2} \right]$$

Plus la poutre est courte, plus la contribution de l'effort tranchant à la flèche est importante.

$$\delta_B = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot [1 + \alpha]$$

$$\alpha = \frac{253 \times 10^3}{L^2} \quad L \text{ en mm}$$

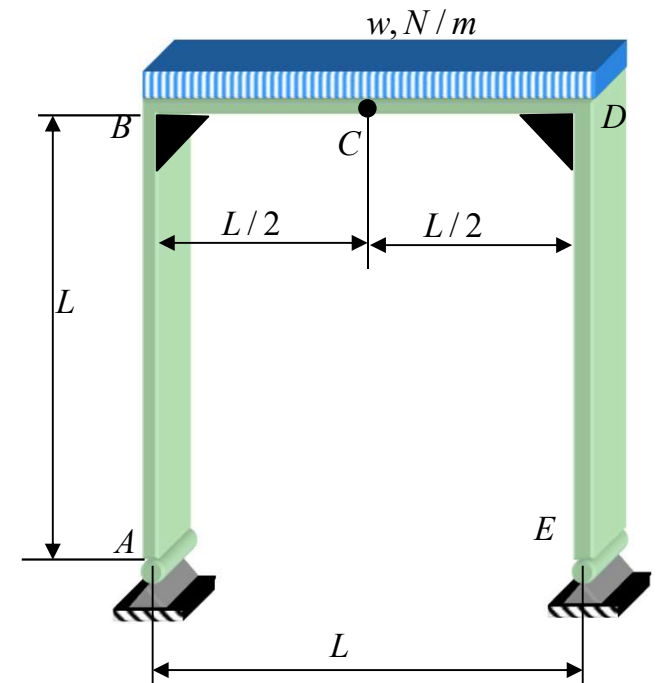
L, mm	α	$\frac{\alpha}{1 + \alpha}$
500	1,012	0,503
1000	0,253	0,202
2000	0,063	0,059
4000	0,016	0,016

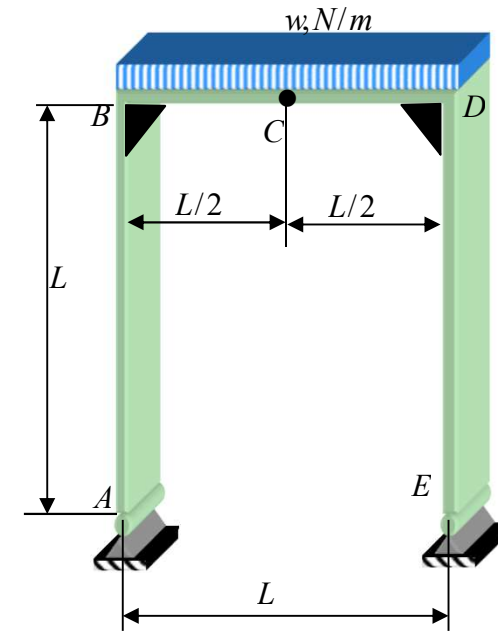
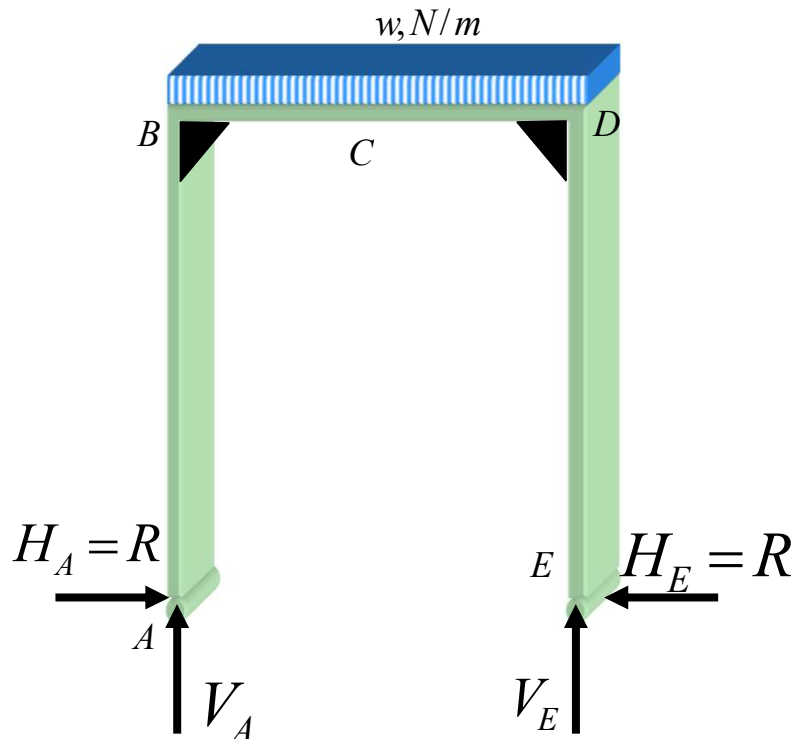
# Théorème de Castigliano

## Problème synthèse: Portique

Déterminer les réactions aux appuis de ce portique

Les joints en B et D sont rigides; les attaches en A et E sont des rotules

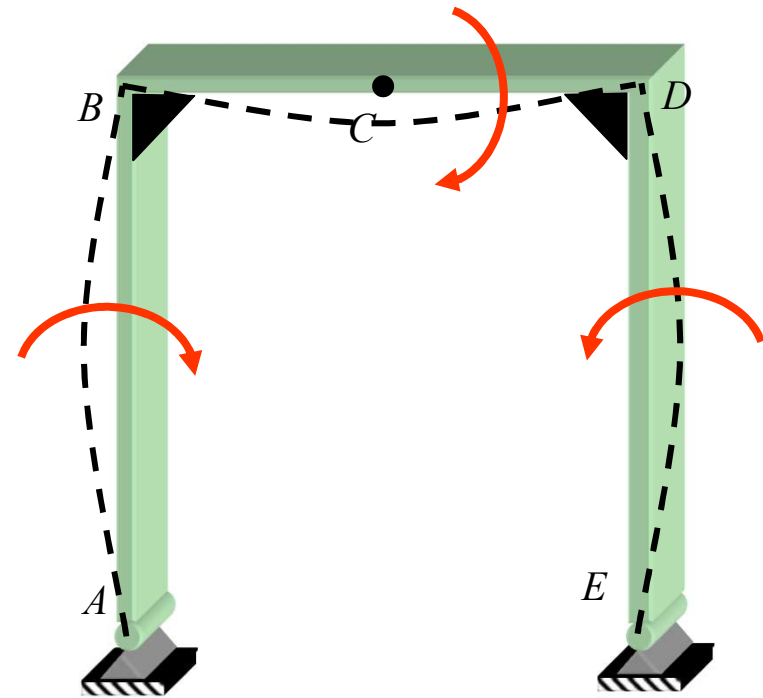
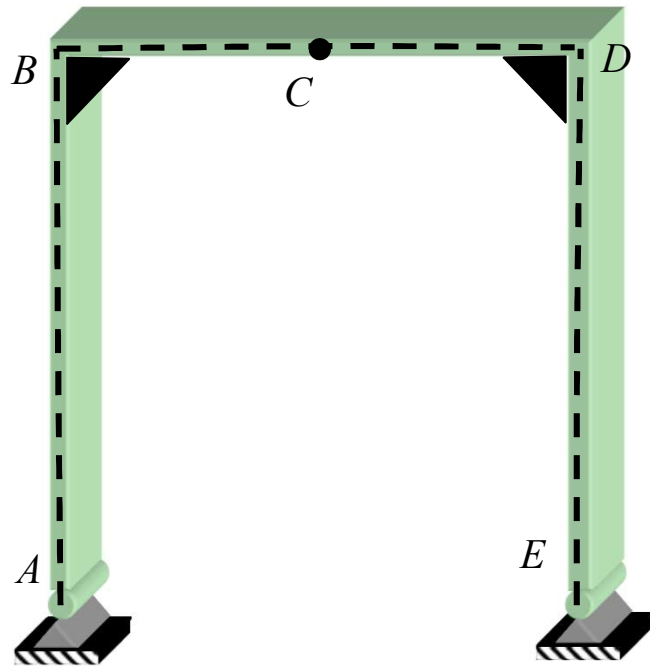




- Quatre réactions inconnues et trois équations d'équilibre disponibles

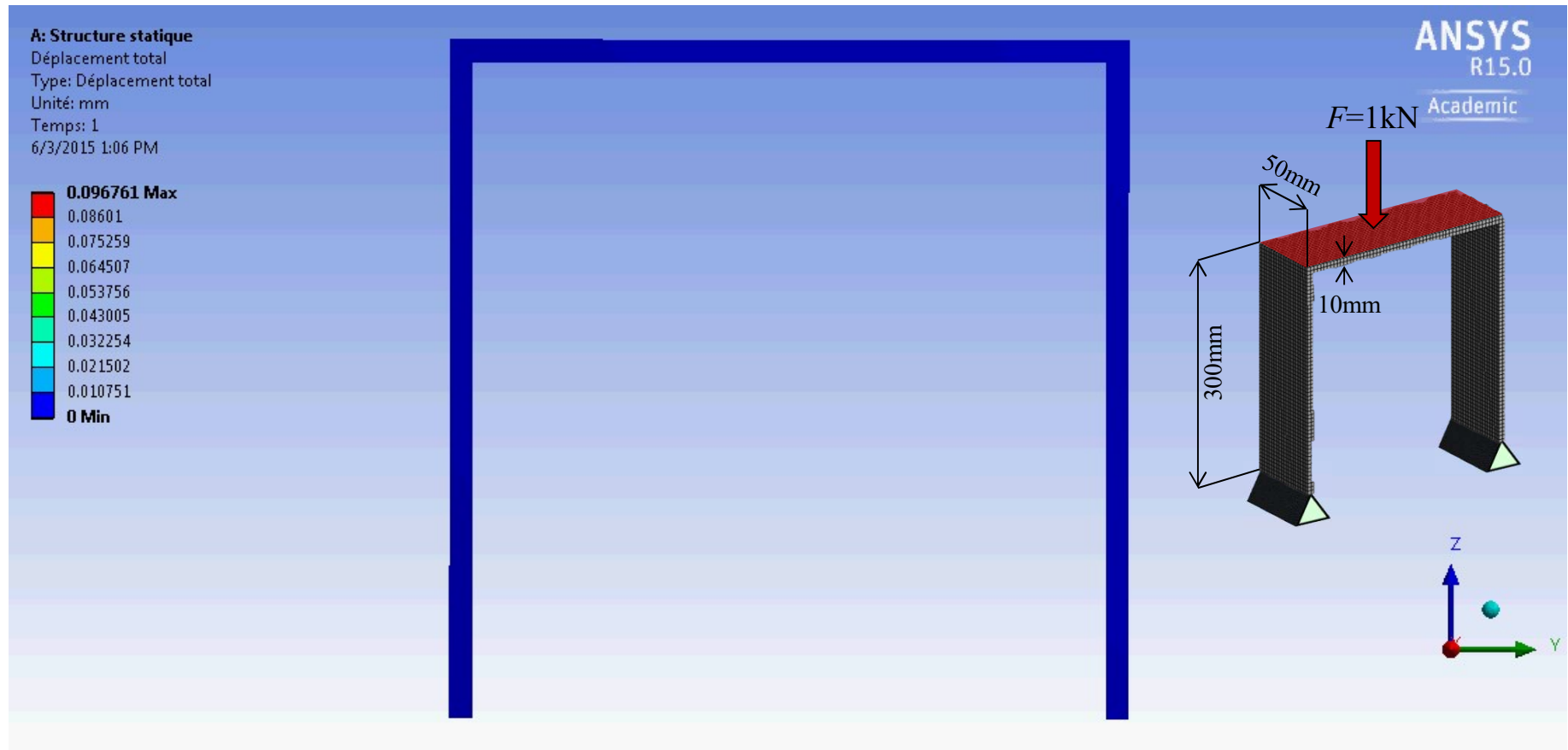
$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_z = 0$$

- Problème hyperstatique du premier degré; on choisit une équation de compatibilité :  $\delta_{AH} = \delta_A = 0$
- $H_A$  est la réaction surabondante



# Flexion d'un portique

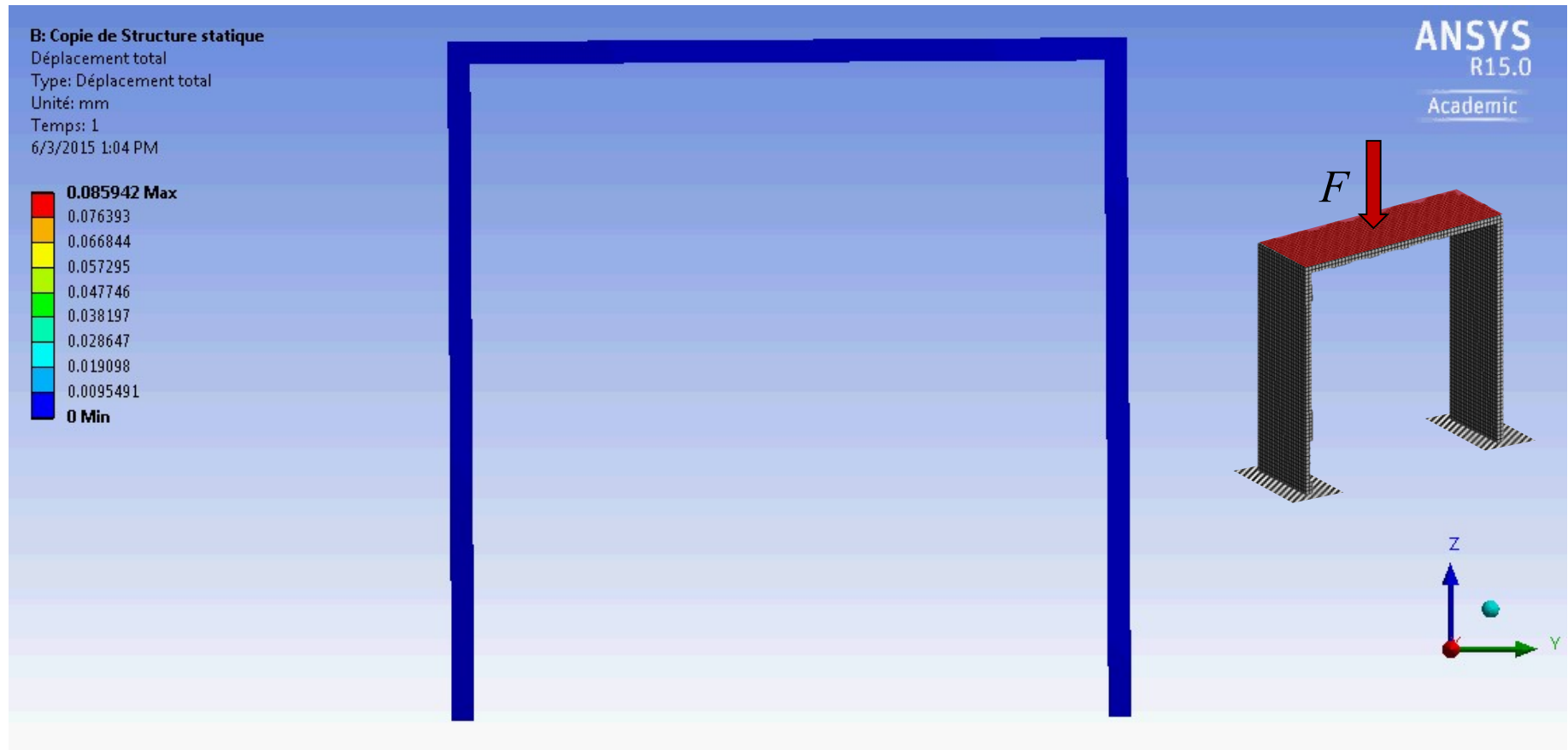
Simply supported at A and E

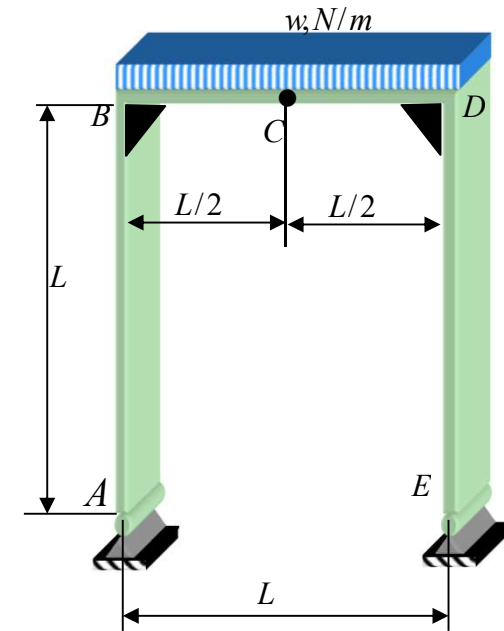
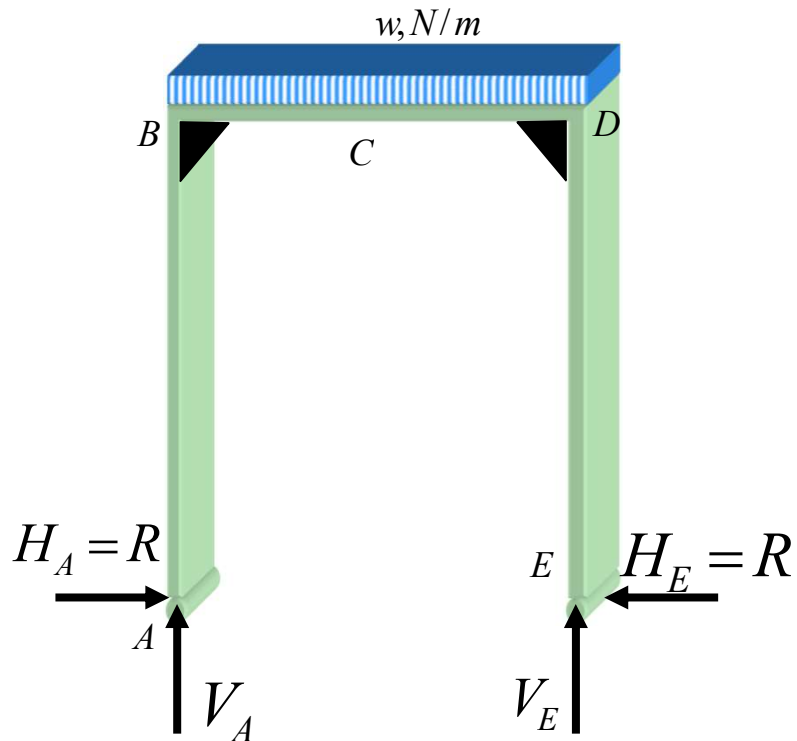




# Flexion d'un portique

Encastré en A et E





Par symétrie, on peut poser  $V_A = V_E = (wL)/2$ .

La valeur de  $H_A$  et  $H_E$  sera obtenue à l'aide de :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = H_E$$

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial H_A} = 0$$

Efforts internes

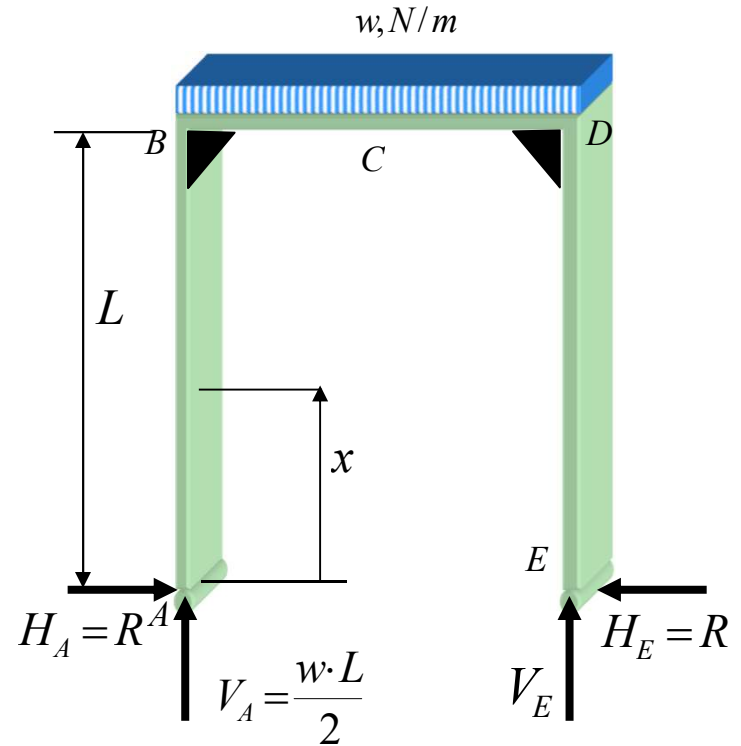
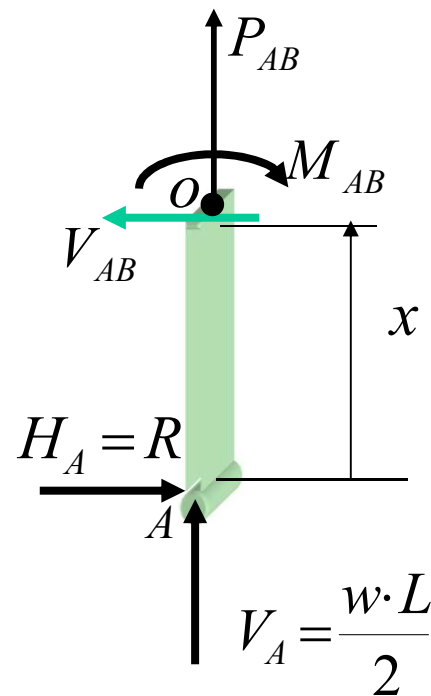
De A à B :  $0 < x < L$

De D à E :  $0 < x < L$

$$M_{AB} = R \cdot x$$

$$P_{AB} = -\frac{w \cdot L}{2}$$

$$V_{AB} = R$$



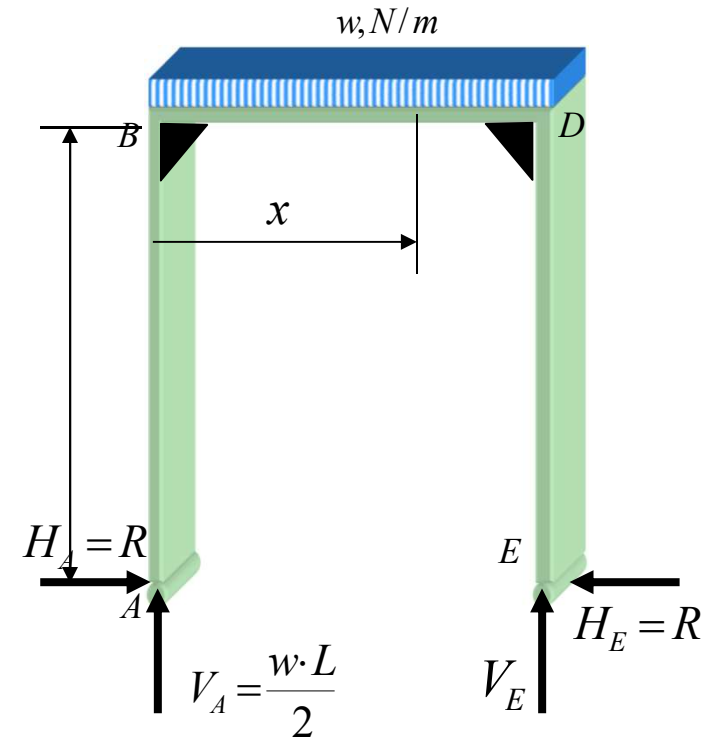
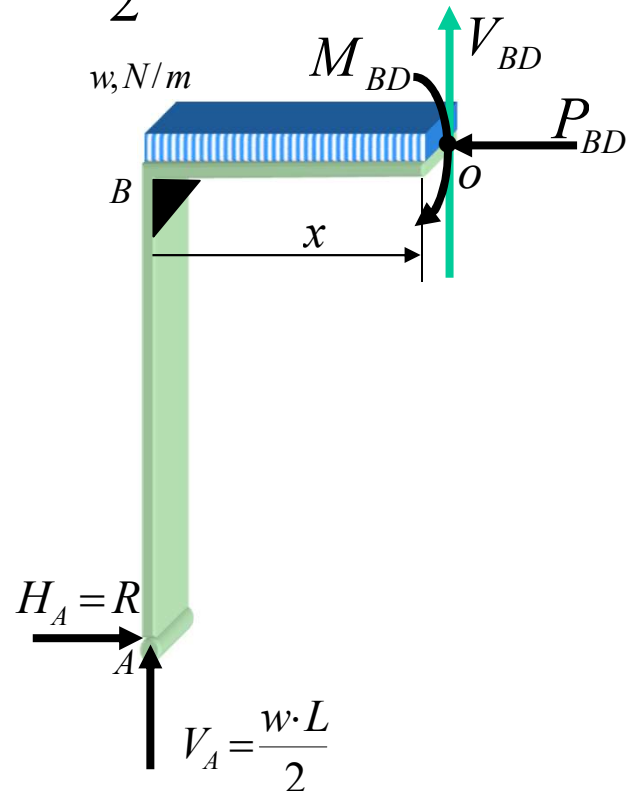
Efforts internes

De B à D :  $0 < x < L$

$$M_{BD} = \frac{w \cdot x^2}{2} + R \cdot L - \frac{w \cdot L}{2} \cdot x$$

$$P_{BD} = R$$

$$V_{BD} = w \cdot x - \frac{w \cdot L}{2}$$





$M_{AB} = R \cdot x$	$M_{BD} = \frac{w \cdot x^2}{2} + R \cdot L - \frac{w \cdot L}{2} \cdot x$
$P_{AB} = -\frac{w \cdot L}{2}$	$P_{BD} = R$
$V_{AB} = R$	$V_{BD} = w \cdot x - \frac{w \cdot L}{2}$

Selon Castigliano:

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R} = 0 = \sum \int_0^L \frac{M_i (\partial M_i / \partial R) dx}{E \cdot I} + \sum \int_0^L \frac{V_i (\partial V_i / \partial R) dx}{G \cdot A_c} + \sum \frac{P_i (\partial P_i / \partial R) L}{E \cdot A}$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 2 \int_0^L \frac{Rx(x) dx}{E \cdot I} + 2 \int_0^L \frac{R(1) dx}{G \cdot A_c} + 2 \frac{-\frac{1}{2} wL(0)L}{E \cdot A} +$$

$$\int_0^L \frac{\left( RL + \frac{1}{2} wx^2 - \frac{1}{2} wLx \right) (L) dx}{E \cdot I} + \int_0^L \frac{\left( wx - \frac{wL}{2} \right) (0) dx}{G \cdot A_c} + \frac{R(+1)L}{E \cdot A} = 0$$

BD



$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{2RL^3}{3E \cdot I} + \frac{2RL}{G \cdot A_c} + \frac{RL^3}{E \cdot I} + \frac{wL^4}{2 \cdot 3} - \frac{wL^4}{2 \cdot 2} + \frac{RL}{E \cdot A} = 0$$

$$R = \frac{w \cdot L}{4} \frac{1}{5 + 6 \left( \frac{EI}{A_c GL^2} \right) + 3 \left( \frac{I}{AL^2} \right)}$$

Si  $\left( \frac{EI}{A_c GL^2} \right) \lll 1$  et  $\left( \frac{I}{AL^2} \right) \lll 1$

alors  $R \approx \frac{wL}{20} = R'$

**Conclusion :**  
L'effet de l'effort tranchant et de la force axiale sur l'énergie de déformation est négligeable



Pour un portique fabriqué d'un profilé W200x52 :

$$I = 52,7 \times 10^6 \text{ mm}^4, \quad A = 6660 \text{ mm}^2 \quad \text{et} \quad A_c = 1350 \text{ mm}^2$$

$$R' = \frac{wL}{20}$$

$$R = \frac{w \cdot L}{4} \frac{1}{5 + 6 \left( \frac{EI}{A_c GL^2} \right) + 3 \left( \frac{I}{AL^2} \right)}$$

L, mm	R/w x10 <sup>-3</sup>	R'/w=L/20 x10 <sup>-3</sup>	R'/R
500	16,596	25	1,506
1000	44,405	50	1,127
2000	96,974	100	1,032
4000	198,57	200	1,007



Dans un portique de faible dimension,  $L = 500$  mm, l'effort tranchant contribue pour 50% de la réaction horizontale aux points A et E. Pour un portique aux dimensions plus normales,  $L = 4$  m, cette contribution est de 0,7 %.

$L$ , mm	$R/w$ $\times 10^{-3}$	$R'/w=L/20$ $\times 10^{-3}$	$R'/R$
500	16,596	25	1,506
1000	44,405	50	1,127
2000	96,974	100	1,032
4000	198,57	200	1,007





# Formulaire type à l'examen

## Chapitre 14 Énergie de déformation

Théorème de réciprocité

$$\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i)_I \cdot (\bar{\delta}_i)_{II} = \sum_{j=1}^m (\bar{P}_j)_{II} \cdot (\bar{\delta}_j)_I$$

Énergie de déformation

$$U = \sum \frac{P_i^2 L}{2AE} + \sum \frac{T_i^2 L}{2GJ} + \sum \int \frac{M_i^2 dx}{2EI} + \sum \int \frac{V_i^2 dx}{2A_c G}$$

Théorème de Castigliano

$$\frac{dU}{dF} = \sum P_i \frac{\partial P_i L}{\partial F} + \sum T_i \frac{\partial T_i L}{\partial F} + \sum \int M_i \frac{\partial M_i}{\partial F} dx + \sum \int V_i \frac{\partial V_i}{\partial F} dx$$