Chapitre 14-Flambement-Poutre-colonne

Commentaire: Pour fins académiques, la méthode appliquée ici au calcul des poutres-colonnes est une version simplifiée de la norme ACNOR S16.1-94. Pour des applications pratiques, il faudra se référer à la norme en vigueur dont l'application est beaucoup plus complexe que la méthode présentée dans le cours MEC2400.

Exemple 1

La figure a) illustre le chargement agissant sur une poutre-colonne. La figure b) montre la section tubulaire de cette poutre-colonne et les propriétés de la section. Le matériau est un acier (E= 200 000 MPa; S_Y = 300 MPa) qui n'a pas été traité pour relâcher les contraintes résiduelles. En considérant un coefficient de tenue égal à 0,9 et un facteur de pondération de la charge égal à 1,5, **vérifiez si cette membrure possède une capacité suffisante en flambement.**

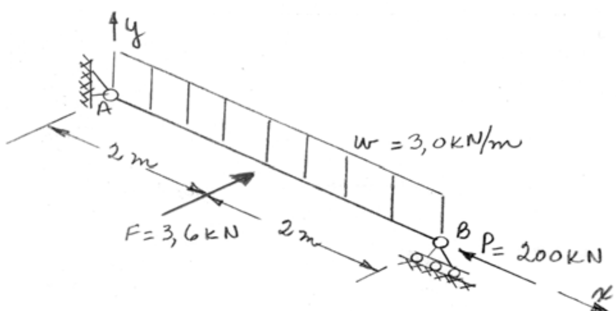


FiG a)

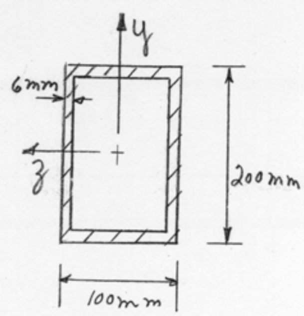


FiG. b)

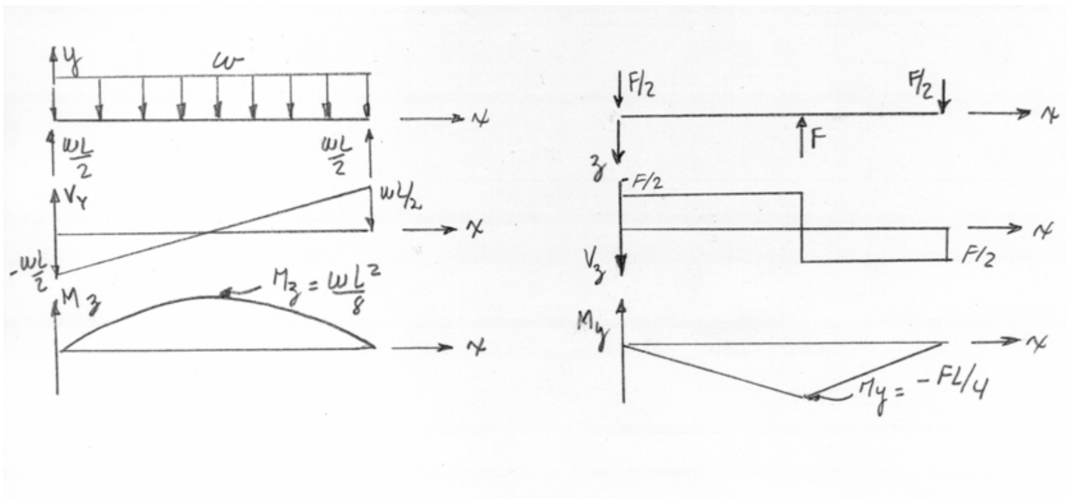
$A = 3456\ mm^2$ (hachurée)
$I_z = 17{,}94 \times 10^6\ mm^4$
$S_z = 179{,}4 \times 10^3\ mm^3$
$r_z = 72{,}05\ mm$
$I_y = 5{,}99 \times 10^6\ mm^4$
$S_y = 119{,}8 \times 10^3\ mm^3$
$r_y = 41{,}63\ mm$

1. Analyse du comportement

Il y a de la flexion dans les deux plans. Analysons les diagrammes de V et M dans les deux plans pour déterminer les valeurs maximales de M_y et M_z .

Plan *x-y* (Flexion autour de l'axe *z*)

Plan *x-z* (Flexion autour de l'axe y)



$M_{z\ max} = wL^2/ 8 = 6$ kN.m

$M_{y\ max} = FL/4 = 3,6$ kN.m
(on prend la valeur absolue de $M_{y\ max}$ et on calculera la contrainte en compression correspondante)

C= 1,5 x 200 kN= 300 kN
M_z = 1,5 x 6 kN.m = 9,0 kN.m
M_y = 1,5 x 3,6 kN.m = 5,4 kN.m

2. Capacité de résistance de la membrure AB en compression pure

a) dans le plan x-y (flexion autour de z) : rotule-rotule, déplacement latéral bloqué ; k = 1.0

$$\left(\frac{kL}{r}\right)_z = \frac{1{,}0 \text{ x } 4000}{72{,}05} = 55{,}52$$

b) dans le plan x-z (flexion autour de y) : rotule-rotule, déplacement latéral bloqué ; k = 1.0

$$\left(\frac{kL}{r}\right)_y = \frac{1{,}0 \text{ x } 4000}{41{,}63} = 96{,}08$$

Lorsqu'il y a de la flexion dans les deux plans, il faut choisir la plus grande valeur de (kL/r), ce qui mène à la plus faible valeur de la résistance C_r.

$$\lambda = \frac{kL}{r}\sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2\ E}} = 96{,}1\sqrt{\frac{300\ \text{MPa}}{\pi^2\ \text{x}\ 200\ \text{x}\ 10^3\ \ \text{MPa}}} = 1{,}185$$

$$C_r \ = \varphi\ A\ S_Y\ (1+\lambda^{2n})^{\frac{-1}{n}} = 0{,}9\ \text{x}\ 3456\ \text{mm}^2\ \text{x}\ 300\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}(1+1{,}185^{2\text{x}1{,}34})^{\frac{-1}{1{,}34}}$$

$$= 933{,}1\,\text{x}\,10^3\ (1+1{,}576)^{\ -0{,}746}\ \ \text{N}$$

$$= 460{,}52\ \text{x}\ 10^3\ \text{N}\ \equiv\ 460{,}52\ \text{kN}$$

3. Capacité de résistance de la membrure AB en flexion seulement

a) Plan x-y (flexion autour de l’axe z) ; k =1,0

$$M_{rz} = \varphi\ S_z\ S_Y = 0{,}9\ \text{x}\ 179{,}4\ \text{x}\ 10^3\ \text{mm}^3\ \text{x}\ 300\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 48{,}44\ \text{x}\ 10^6\ \ \text{N.mm}$$

$$= 48{,}44\ \text{kN.m}$$

$$P_{cr/z} = \frac{\pi^2 E\ I_z}{(kL)^2} = \frac{\pi^2\ \text{x}\ 200\,\text{x}\,10^3\ \text{MPa}\ \text{x}\,17{,}94\,\text{x}\,10^6\ \text{mm}^4}{(1{,}0\ \text{x}\ 4000\ \text{mm})^2} = 2213{,}3\,\text{x}\,10^3\ \text{N} \equiv\ 2213{,}3\ \ \text{kN}$$

$$F_{amp/z} = \frac{1}{1-\dfrac{C}{P_{cr/z}}} = \frac{1}{1-\dfrac{300\ \text{kN}}{2213{,}3\ \ \text{kN}}} = 1{,}157$$

b) Plan x-z (flexion autour de l’axe y) ; k =1,0

$$M_{ry} = \varphi\ S_y\ S_Y = 0{,}9\ \text{x}\ 119{,}8\ \text{x}\ 10^3\ \text{mm}^3\ \text{x}\ 300\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 32{,}34\ \text{x}\ 10^6\ \ \text{N.mm}$$

$$= 32{,}34\ \ \text{kN.m}$$

$$P_{cr/y} = \frac{\pi^2 E\ I_y}{(kL)^2} = \frac{\pi^2\ \text{x}\ 200\,\text{x}\,10^3\ \text{MPa}\ \text{x}\ 5{,}99\,\text{x}\,10^6\ \text{mm}^4}{(1{,}0\ \text{x}\ 4000\ \text{mm})^2} = 738{,}98\,\text{x}\,10^3\ \text{N} \equiv\ 739\ \ \text{kN}$$

$$F_{amp/y} = \frac{1}{1-\dfrac{C}{P_{cr/y}}} = \frac{1}{1-\dfrac{300\ \text{kN}}{739\ \ \text{kN}}} = 1{,}683$$

4. Capacité de résistance de la membrure AB

$$\frac{C}{C_r} + \frac{F_{amp/z}\ M_z}{M_{rz}} + \frac{F_{amp/y}\ M_y}{M_{ry}} \le 1{,}0$$

$$\frac{300\ \text{kN}}{460{,}52\ \text{kN}} + \frac{1{,}157\ \text{x}\ 9\ \text{kN.m}}{48{,}44\ \text{kN.m}} + \frac{1{,}683\ \text{x}\ 5{,}4\ \text{kN}-\text{m}}{32{,}34\ \text{kN}-\text{m}} =$$

$0{,}651 + 0{,}215 + 0{,}281 = 1{,}147\ \ \ge 1{,}0$ La structure n'a pas la capacité pour supporter le chargement

Exemple 2

La figure a) illustre en isométrique un cadre composé d'une poutre rigide BC de 4 m de longueur et de deux colonnes identiques AB et CD de type W 200 X 52 (voir Fig. b) ayant 5 m de longueur. Les connexions entre la poutre BC et les colonnes sont rigides. Les bases A et D des deux colonnes sont montées sur des rotules et leurs extrémités B et C sont supportées latéralement dans la direction de l'axe z par des haubans BF, BE, CH et CG. La poutre supporte une charge verticale uniformément répartie w_x = 150 kN/m et les colonnes AB et DC sont soumises à la force du vent w_y = 1 kN/m.

Les propriétés du matériau des membrures AB et CD sont :

E = 200 000 MPa ; ν = 0,3 ; G = 76 900 MPa ; S_Y = 400 MPa

Le matériau n'a pas été traité pour relâcher les contraintes résiduelles. En considérant un coefficient de tenue égal à 0,9 et un facteur de pondération de la charge égal à 1,5, **vérifiez si cette structure possède une capacité suffisante en flambement.**

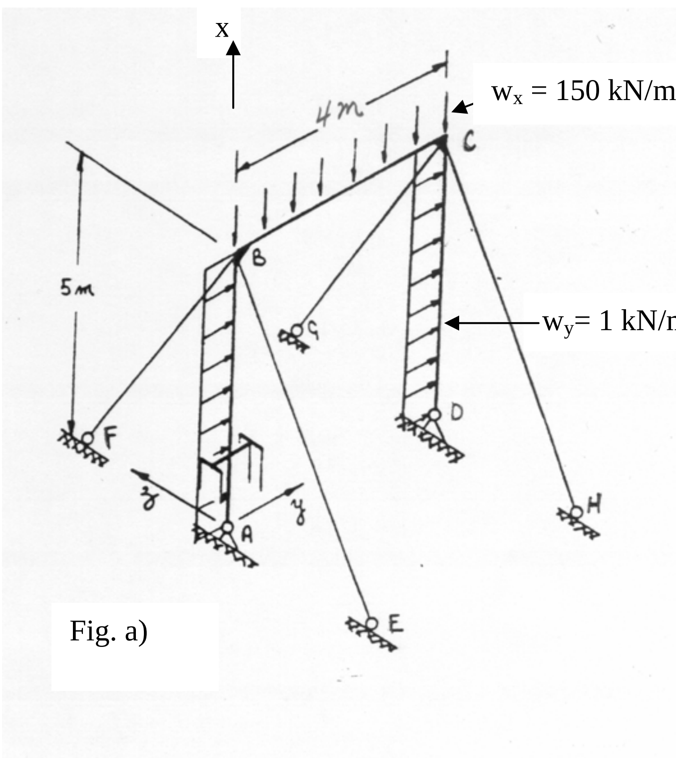
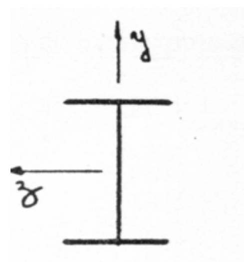


Fig. a)

Propriétés géométriques de la membrure de type W200 x 52



A = 6660 mm^2
I_z = 52,7 x 10^6 mm^4
S_z = 527,0 x 10^3 mm^3
r_z = 89,0 mm
I_y = 17,8 x 10^6 mm^4
S_y = 178,0 x 10^3 mm^3
r_y = 51,7 mm

Fig. b)

Analyse du comportement

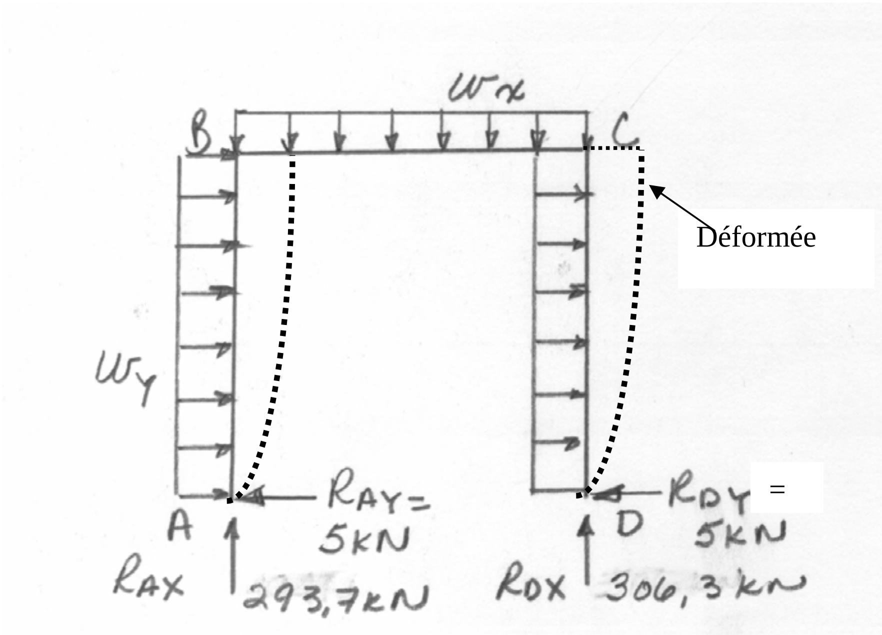


Fig. c) Réactions (voir calculs à la page suivante) et déformée de la structure

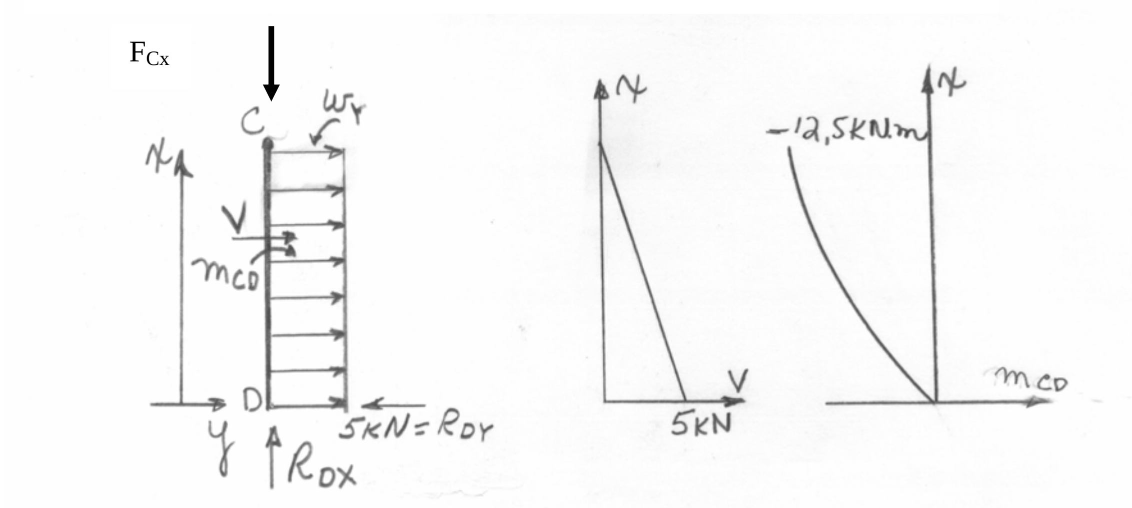


Fig. d) Flexion dans le plan x-y : diagrammes de V_y et de M_z

1. .Analyse du comportement
Charge axiale et flexion autour de l'axe z seulement (pas de flexion autour de l'axe y).

Voir fig. c)

$$\sum M_A = 0 = 4\,R_{Dx} - 150 \text{ x } 4 \text{ x } 2 - 2 \text{ x } 1 \text{ x } 5 \text{ x } 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad R_{Dx} = 306{,}3 \text{ kN}$$
$$\sum F_x = 0 = R_{Ax} + R_{Dx} - 150 \text{ x } 4 \quad \Rightarrow \quad R_{Ax} = 600 - 306{,}3 \text{ kN} = 293{,}7 \text{ kN}$$
$$\sum F_y = 0 = R_{Ay} + R_{Dy} - 2 \text{ x } 1 \text{ x } 5$$

On ne peut déterminer R_{Ay} et R_{Dy} directement avec les équations d'équilibre car le problème est hyperstatique. En le résolvant à l'aide de Castigliano, on trouvera que R_{Ay} = R_{Dy} = 5 kN. Cependant, par inspection de la déformée à la figure c), on constate que les deux colonnes se comportent de la même manière et on peut en déduire que R_{Ay} = R_{Dy} = 5 kN

Les diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant (voir fig. d) permettent d'obtenir la valeur maximale de M_z = 12,5 kN.m (en valeur absolue).

Afin de simplifier les calculs, nous considérerons que la force axiale est la même dans les deux colonnes et égale à 300 kN

C= 1,5 x 300 kN= 450 kN
M_z = 1,5 x 12,5 kN.m = 18,75 kN.m
M_y = 0

Commentaire : la structure se comporte comme une poutre- colonne dans le plan x-y seulement ; dans le plan x-z, elle se comporte comme une colonne.

2. Capacité de résistance en compression pure
a) dans le plan x-y (flexion autour de z et plan où la structure est une poutre-colonne) : encastrement-rotule avec déplacement latéral permis ; k= 2,0

$$\left(\frac{kL}{r}\right)_z = \frac{2{,}0 \text{ x } 5000}{89{,}0} = 112{,}4$$

b) dans le plan x-z (flexion autour de y et plan où la structure agit comme colonne seulement) : rotule-rotule avec déplacement latéral bloqué ; k = 1,0

$$\left(\frac{kL}{r}\right)_y = \frac{1{,}0 \text{ x } 5000}{51{,}7} = 96{,}71$$

Commentaire : Il est à noter que pour les cas où la structure agit comme poutre-colonne dans un plan seulement (ici, le plan x-y), la norme ACNOR recommande de choisir le rapport kL/r calculé pour ce plan spécifique, même si ce rapport n'est pas égal à la plus grande des deux valeurs ; il faudra également vérifier la condition de flambement dans le plan x-z, où la structure se comporte comme une colonne seulement.
On choisit kL/r = 112,4 et on obtient:

$$(\lambda)_z = \left(\frac{kL}{r}\right)_z \sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2\ E}} = 112{,}4\ \sqrt{\frac{400\ \text{MPa}}{\pi^2\ \text{x}\ 200\ \text{x}\ 10^3\ \ \text{MPa}}}\ = 1{,}6$$

$$C_{rz}\ = \varphi\ A\ S_Y\ (1+\lambda^{2n})^{\frac{-1}{n}} = 0{,}9\ \text{x}\ 6660\ \text{mm}^2\ \text{x}\ 400\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}(1+1{,}6^{2\text{x}1{,}34})^{\frac{-1}{1{,}34}}$$

$$= \ 2397{,}6\ \text{x}\ 10^3\ (\ 1\ +\ 3{,}524)^{\ -0{,}746}\ \ \text{N}$$

$$= 777{,}47\ \text{x}\ 10^3\text{N}\ \equiv\ 777{,}47\ \text{kN}$$

3. Capacité de résistance de la membrure en flexion seulement

a) Plan x-y (flexion autour de l’axe z)

$$M_{rz} = \varphi\ S_z\ S_Y = 0{,}9\ \text{x}\ 527{,}0\ \text{x}\ 10^3\ \text{mm}^3\ \text{x}\ 400\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 189{,}72\ \text{x}\ 10^6\ \ \text{N}-\text{mm}$$

$$= 189{,}72\ \text{kN}-\text{m}$$

$$P_{cr/z} = \frac{\pi^2 E\ I_z}{(kL)^2} = \frac{\pi^2\ \text{x}\ 200\ \text{x}\ 10^3\ \text{MPa x}\ 52{,}7\ \text{x}\ 10^6\ \text{mm}^4}{(2{,}0\ \text{x}\ 5000\ \text{mm})^2}\ =\ 1040\ \text{x}\ 10^3\ \text{N} \equiv\ 1040\ \ \text{kN}$$

$$F_{amp/z} = \frac{1}{1-\dfrac{C}{P_{cr/z}}} = \frac{1}{1-\dfrac{450\ \text{kN}}{1040\ \ \text{kN}}} = 1{,}763$$

b) Plan x-z : pas de flexion autour de l’axe y ;

$M_y = 0$

4. Capacité de résistance de la membrure

a) Poutre-colonne dans le plan x-y :

$$\frac{C}{C_{rz}}\ +\ \frac{F_{amp/z}\ M_z}{M_{rz}}\ \le 1{,}0$$

$$\frac{450\ \text{kN}}{777{,}47\ \text{kN}}\ +\ \frac{1{,}763\ \text{x}\ 18{,}75\ \text{kN}-\text{m}}{189{,}72\ \text{kN}-\text{m}}\ =$$

$0{,}579\ +\ 0{,}174\ =\ 0{,}753\ \le\ 1{,}0$ *La structure supporte le chargement appliqué*

b) Colonne seulement dans le plan x-z :

Ici, il faut vérifier que $C/ C_{ry} < 1,0$

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs puisqu'avec la valeur de $(kL/R)_y = 96,71$, on sait que :

$$C_{ry} > C_{rz} \quad (C_{ry} = 880,3 \text{ kN}) .$$

Et la valeur de $C/ C_{ry} = 450 \text{ kN} / 880,3 \text{ kN} < 1,0$ (C'est O.K)

Exemple 3

Un poteau d'acier de 4 m de longueur est chargé tel qu'illustré sur la figure a). La section est illustrée sur la figure b). La base du poteau est encastrée et son extrémité supérieure est bloquée dans la direction de l'axe z par une tige rigide rotule-rotule. Le matériau est un acier (E= 200 000 MPa; S_Y = 300 MPa) qui n'a pas été traité pour relâcher les contraintes résiduelles. En considérant un coefficient de tenue égal à 0,9 et un facteur de pondération de la charge égal à 1,5, **vérifiez si le poteau possède une capacité suffisante en flambement.**

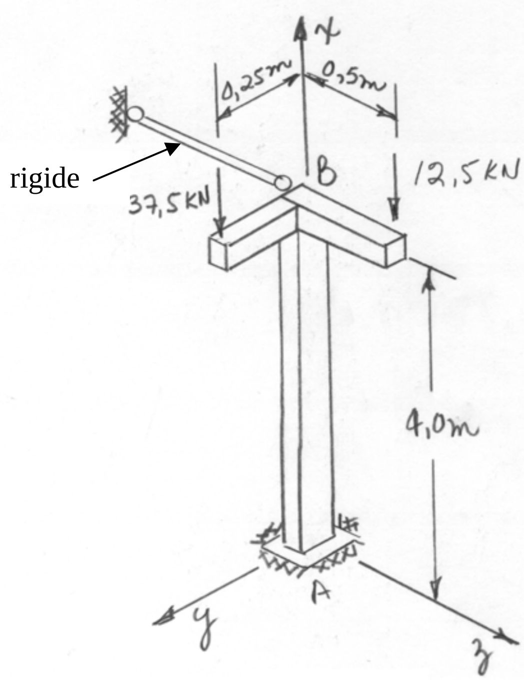
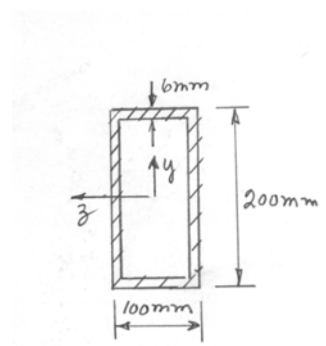


Fig. a)

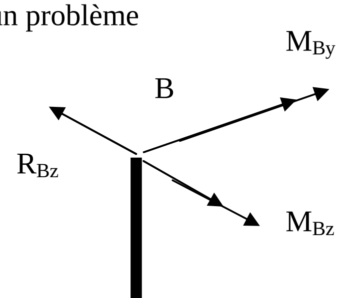


$A = 3456 \text{ mm}^2$ (hachurée)
$I_z = 17,94 \times 10^6 \text{ mm}^4$
$S_z = 179,4 \times 10^3 \text{ mm}^3$
$r_z = 72,05 \text{ mm}$
$I_y = 5,99 \times 10^6 \text{ mm}^4$
$S_y = 119,8 \times 10^3 \text{ mm}^3$
$r_y = 41,63 \text{ mm}$

Fig. b)

1. Analyse du comportement

Il y a de la flexion dans les deux plans. Il faut analyser les diagrammes de V et M dans les deux plans pour déterminer les valeurs maximales de M_y et M_z . Ici, on a un problème hyperstatique.



$$\sum F_z = 0 \Rightarrow R_{Az} = R_{Bz} = R \qquad (1)$$

$$\sum M_z^A = 0 = -M_{Az} + M_{Bz} \quad \Rightarrow \quad M_{Az} = M_{Bz} = 9{,}375 \text{ kN - m} \qquad (2)$$

$$\sum M_y^A = 0 = -M_{Ay} - M_{By} + R_{Bz} \cdot L = -M_{Ay} - M_{By} + R \cdot L \qquad (3)$$

où M_{By} = 12,5 kN x 0,5 m = 6,25 kN.m ; pour simplifier les calculs qui suivent , posons $M_{By} = M$
M_{Bz} = 37,5 kN x 0,25 m = 9,375 kN.m

On choisit R comme surabondante.

$$M_{Ay} = -M_{By} + R \cdot L = -M + R \cdot L$$

$$\delta_{Bz} = 0 = \frac{\partial U}{\partial R_{Bz}} = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{EI_y}\int_0^L m_{yAB} \frac{\partial m_{yAB}}{\partial R} dx + \frac{1}{EI_z}\int_0^L m_{zAB} \frac{\partial m_{zAB}}{\partial R} dx \qquad (4)$$

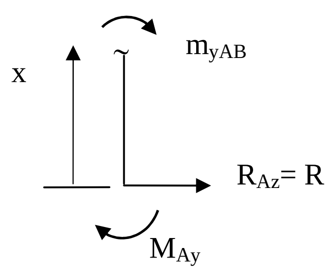
Entre A et B $(0 \le x \le L)$

$m_{zAB} = 9{,}375$ kN - m et ne dépend pas de R $\Rightarrow$ le deuxième terme de droite de l'éq. 4 est donc égal à zéro.

$m_{yAB} = -M_{Ay} + R \cdot x = M - R \cdot L + R \cdot x$

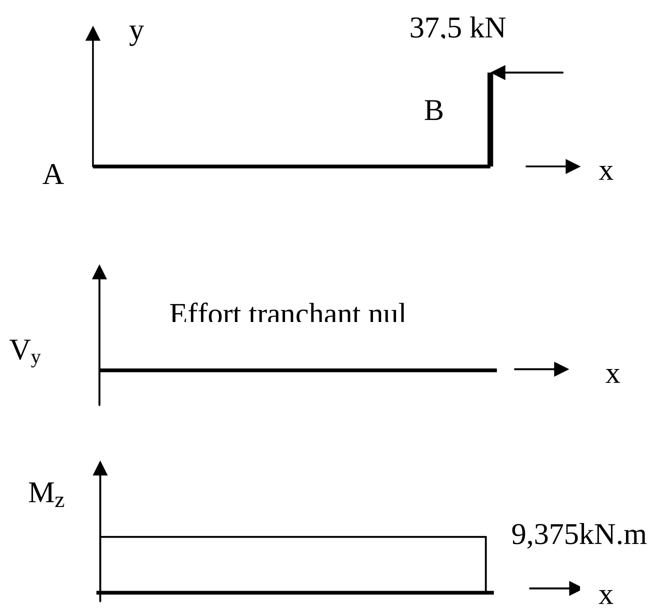
$$\delta_{Bz} = 0 = \frac{1}{EI_y}\int_0^L (M - R \cdot L + R \cdot x)(x - L)\, dx + 0$$

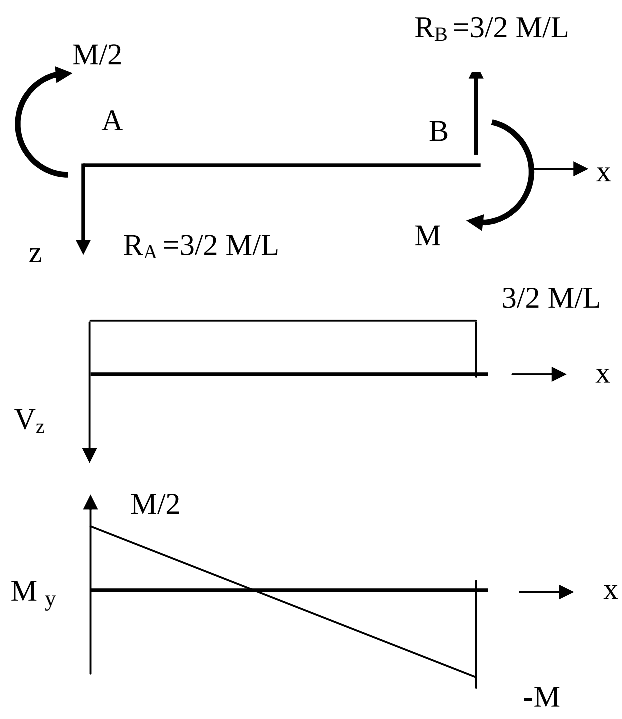
$$\Rightarrow R = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{L}$$



Plan x-y (flexion autour de z)

Plan x- z (flexion autour de y)





C= 1,5 x 50 kN= 75 kN
M_z = 1,5 x 9,375 kN.m = 14,06 kN.m
M_y = 1,5 x 6,25 kN.m = 9,375 kN.m

2 .Capacité de résistance de la membrure AB en compression pure

a. dans le plan x-y (flexion autour de z) : encastrement –rotule avec déplacement latéral

permis ; k = 2,0 .

$$\left(\frac{kL}{r}\right)_z = \frac{2{,}0 \text{ x } 4000}{72{,}05} = 111{,}0$$

b. dans le plan x-z (flexion autour de y) : encastrement-rotule avec déplacement latéral bloqué ; k = 0,7

$$\left(\frac{kL}{r}\right)_y = \frac{0{,}7 \text{ x } 4000}{41{,}63} = 67{,}26$$

Flexion dans les deux plans : il faut choisir la plus grande valeur de (kL/r) , ce qui mène à la plus faible valeur de la résistance $C_{r.}$

$$\lambda = \frac{kL}{r}\sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2\ E}} = 111{,}0\sqrt{\frac{300 \text{ MPa}}{\pi^2 \text{ x } 200 \text{ x } 10^3 \text{ MPa}}} = 1{,}368$$

$$C_r \quad = \varphi \text{ A } S_Y\ (1+\lambda^{2n})^{\frac{-1}{n}} = 0{,}9 \text{ x } 3456 \text{ mm}^2 \text{ x } 300\ \frac{N}{mm^2}(1+1{,}368^{2 \text{x} 1{,}34})^{\frac{-1}{1{,}34}}$$

$$= 933{,}1 \text{ x } 10^3\ (3{,}316)^{-0{,}746}\ \text{ N}$$

$$= 381{,}6 \text{ x } 10^3 \text{ N} \ \equiv\ 381{,}6 \text{ kN}$$

3. Capacité de résistance de la membrure AB en flexion seulement

a) Plan x-y (flexion autour de l’axe z)

$$M_{rz} = \varphi\ S_z\ S_Y = 0{,}9 \text{ x } 179{,}4 \text{ x } 10^3 \text{ mm}^3 \text{ x } 300\ \frac{N}{mm^2} = 48{,}44 \text{ x } 10^6 \text{ N.mm}$$

$$= 48{,}44 \text{ kN.m}$$

$$P_{cr/z} = \frac{\pi^2 E\ I_z}{(kL)^2} = \frac{\pi^2 \text{ x } 200 \text{ x } 10^3 \text{ MPa x } 17{,}94 \text{ x } 10^6 \text{ mm}^4}{(2{,}0 \text{ x } 4000 \text{ mm})^2} = 553{,}3 \text{ x } 10^3 \text{ N} \equiv 553{,}3 \text{ kN}$$

$$F_{amp/z} = \frac{1}{1-\frac{C}{P_{cr/z}}} = \frac{1}{1-\frac{75 \text{ kN}}{553{,}3 \text{ kN}}} = 1{,}157$$

b) Plan x-z (flexion autour de l'axe y)

$$M_{ry} = \varphi\, S_y\, S_Y = 0{,}9 \text{ x } 119{,}8 \text{ x } 10^3 \text{ mm}^3 \text{ x } 300 \,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 32{,}35 \text{ x } 10^6 \;\; \text{N} - \text{mm}$$

$$= 32{,}35 \;\; \text{kN} - \text{m}$$

$$P_{cr/y} = \frac{\pi^2 E\, I_y}{(kL)^2} = \frac{\pi^2 \text{ x } 200 \text{ x } 10^3 \text{ MPa x } 5{,}99 \text{ x } 10^6 \text{ mm}^4}{(0{,}7 \text{ x } 4000 \text{ mm})^2} = 1508 \text{ x } 10^3 \text{ N} \equiv 1508 \text{ kN}$$

$$F_{amp/y} = \frac{1}{1 - \dfrac{C}{P_{cr/y}}} = \frac{1}{1 - \dfrac{75 \text{ kN}}{1508 \;\text{ kN}}} = 1{,}0523$$

4. Capacité de résistance de la membrure AB

$$\frac{C}{C_r} + \frac{F_{amp/z}\, M_z}{M_{rz}} + \frac{F_{amp/y}\, M_y}{M_{ry}} \le 1{,}0$$

$$\frac{75 \text{ kN}}{381{,}6 \text{ kN}} + \frac{1{,}157 \text{ x } 14{,}06 \text{ kN} - \text{m}}{48{,}44 \text{ kN} - \text{m}} + \frac{1{,}052 \text{ x } 9{,}375 \text{ kN} - \text{m}}{32{,}35 \text{ kN} - \text{m}} \;\; ? \;\; \le 1{,}0$$

$$0{,}1966 + 0{,}336 + 0{,}305 = 0{,}837 \quad \le 1{,}0$$

La structure peut supporter le chargement