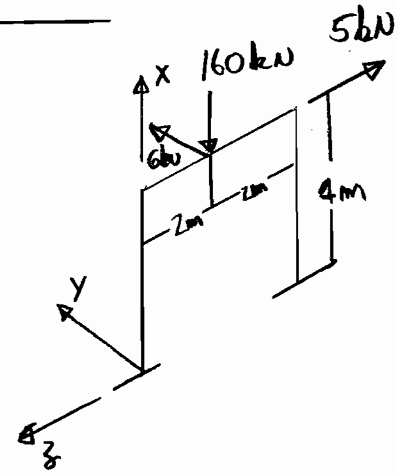
Solution complète du problème de la page 21



Bien que ce problème semble simple et symétrique, il ne l'est pas ! Pour le solutionner de manière complète, nous proposons d'étudier dans un premier temps les conditions nécessaires pour avoir un problème symétrique. Par la suite, on propose une solution où l'on tire profit de cette symétrie.

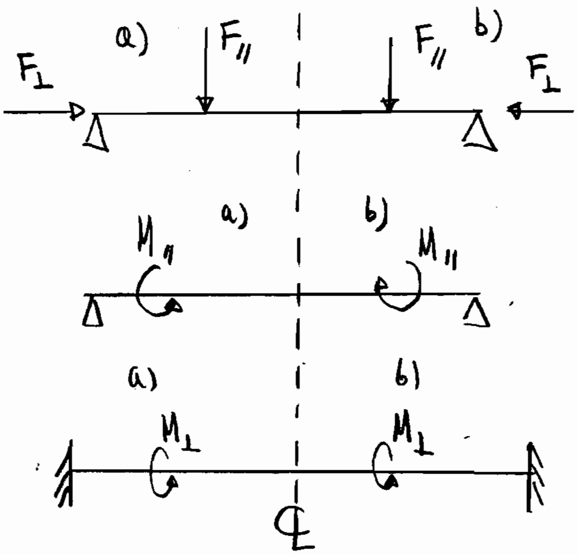
Conditions nécessaires pour qu'un problème soit symétrique

Un problème est dit symétrique quand le chargement, les conditions aux rives et la géométrie du problème font en sorte que la déformée de la structure présente une symétrie miroir par rapport à un plan de symétrie. Pour ce faire, le problème doit rencontrer deux conditions.

1- La géométrie et les conditions aux rives doivent être symétriques.

2- Le chargement doit conduire à une déformée symétrique

La condition 1 est habituellement évidente à établir par inspection du problème. La condition 2 présente toutefois quelques subtilités. Pour arriver à bien comprendre, on peut s'aider de quelques petits dessins simples.



On va noter par $F_{//}$ et $M_{//}$ les forces et moments qui sont parallèles au plan de symétrie et $M_\perp$ et $F_\perp$ ceux qui y sont perpendiculaires. a) et b) font référence aux parties se trouvant de part et d'autre du plan de symétrie. Les chargements illustrés sur les figures de gauche conduisent à des déformées symétriques on aura donc:

$$F_{//}^{(a)} = F_{//}^{(b)} \qquad M_{//}^{(a)} = -M_{//}^{(b)}$$

$$F_{\perp}^{(a)} = -F_{\perp}^{(b)} \qquad M_{\perp}^{(a)} = M_{\perp}^{(b)}$$

On peut voir que les tendances sont inversées pour les forces et moments.

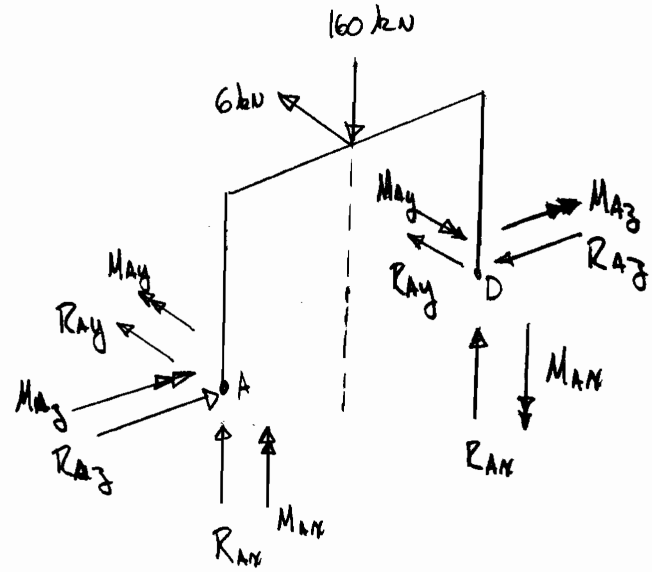
On peut voir que notre problème rencontre la condition 1 mais viole la condition 2. Il n'est donc pas symétrique. Toutefois, nous allons profiter de cette symétrie...

Solution du problème

On va traiter le problème en 2 parties: une partie symétrique et l'autre qui ne l'est pas. On verra que cela simplifie considérablement le problème. A la fin, on combinera ~~les~~ deux parties pour avoir la solution complète

Partie symétrique

Le problème que l'on a à traiter est illustré à droite. Notez que les réactions aux appuis ont été déterminées de manière à ce que les conditions de symétrie (2) soient rencontrées. On aura donc 6 inconnues pour 6 équations d'équilibre. On peut directement établir:



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2R_{Ay} + 6kN = 0 \rightarrow \underline{R_{Ay} = -3kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow 2R_{Ax} - 160kN = 0 \rightarrow \underline{R_{Ax} = 80 kN}$$

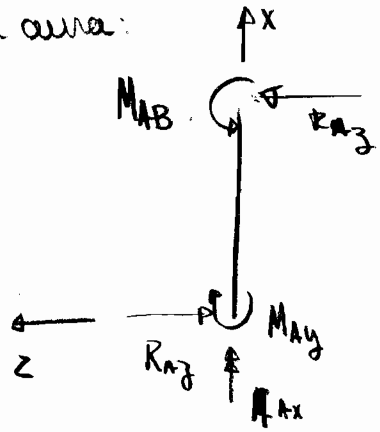
$$\Sigma M_z\big|_A = 0 \rightarrow -2M_{Az} + 4m \times 6kN = 0 \rightarrow \underline{M_{Az} = 12 kN \cdot m}$$

Pour les autres équations d'équilibre, on a quelques problèmes

$\Sigma F_z = 0 \rightarrow R_{Az} - R_{Az} = 0$ ne sert pas à déterminer R_{Az}. On a les mêmes problèmes pour ΣM_x et ΣM_y

Pour arriver à calculer ces réactions, on va utiliser Castigliano. M_x va induire de la torsion. R_{Az} et M_{Ay} vont induire de la flexion autour de y.

On aura:



Pour la torsion, on aura $T(x) = M_{Ax}$. et M_{AB} n'est pas une fonction de M_{Ax}. Alors:

$$\frac{\partial U}{\partial M_{Ax}} = \frac{2 M_{Ax} L}{GJ} = 0 \Rightarrow \underline{M_{Ax} = 0}$$

$$\sum M_y\big|_A = 0 \rightarrow -M_{AB} + M_{Ay} - R_{Az}x = 0 \rightarrow M_{AB} = M_{Ay} - R_{Az}x.$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_{Ay}} = \frac{1}{EI}\int_0^4 (M_{Ay} - R_{Az}x)\,dx = 0 \rightarrow 4M_{Ay} - 8R_{Az} = 0$$

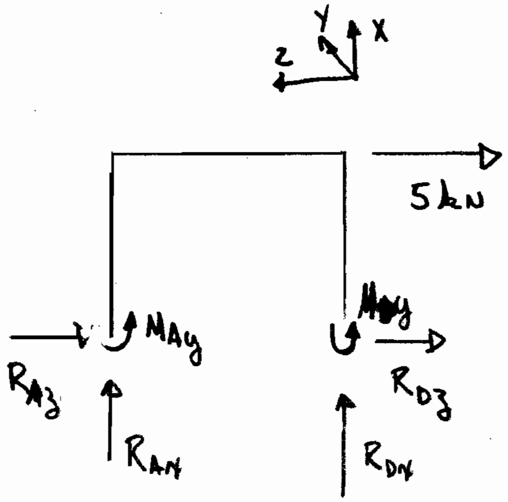
$$\frac{\partial U}{R_{Az}} = \frac{1}{EI}\int_0^4 (M_{Ay} - R_{Az}x)x\,dx = -8M_{Ay} + \frac{64}{3}R_{Az} = 0$$

Ici, on utilise Castigliano avec 2 équations et 2 inconnues.

On tire $\underline{M_{Ay} = R_{Az} = 0}$

On aurait aussi pu remarquer que le problème était 2D dans le plan XY. Ce qui entraîne que $M_x = M_y = 0$ et $R_z = 0$, comme on vient de le faire en long avec Castigliano

Partie non-symétrique



C'est un problème 2D alors $M_{Ax} = M_{Dx} = 0$;

$R_{Ay} = R_{Dy} = 0$; $M_{Az} = M_{Dz} = 0$.

On aura néanmoins 6 inconnues pour 3 équations.

De l'équilibre on tire :

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow +R_{Ax} + R_{Dx} = 0$$

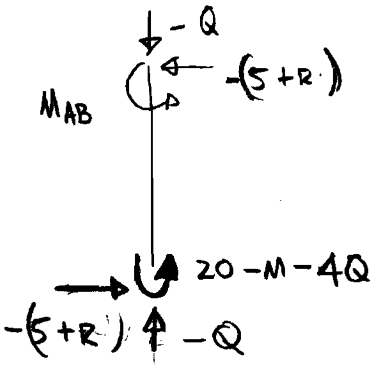
$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow -R_{Az} - R_{Dz} - 5 = 0$$

$$\Sigma M_y \Big|_A = 0 \rightarrow -M_{Ay} - M_{Dy} - 4R_{Dx} + 20 = 0$$

Ici, on va poser comme surabondantes $R_{Dx} = Q$, $R_{Dz} = R$ et $M_{Dy} = M$.

On aura donc : $R_{Az} = -(5 + R)$, $R_{Ax} = -Q$ et $M_{Ay} = 20 - M - 4Q$

Pour AB



$$\sum M_y\Big|_A = 0 \rightarrow -M_{AB} - (20 - M - 4Q) + (5+R)x = 0$$

$$M_{AB} = (5+R)x + (M + 4Q - 20)$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial M} = 1 \qquad \frac{\partial M_{AB}}{\partial R} = x \qquad \frac{\partial M_{AB}}{\partial Q} = 4$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^4 \frac{\partial M_{AB}}{\partial R} M_{AB}\, dx\right\} + \cancel{\frac{\partial P}{\partial R}} \frac{\cancel{P}^{\,0} L}{AE} \qquad \text{car } P = -Q$$

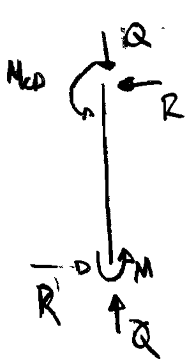
$$= \frac{1}{EI}\int_0^4 \left[(5+R)x^2 + x(M+4Q-20)\right] dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{64}{3}(5+R) + 8(M+4Q-20)\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{EI}\int_0^4 \left[(5+R)x + (M+4Q-20)\right] dx = \frac{1}{EI}\left[8(5+R) + 4(M+4Q-20)\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI}\int_0^4 4\left([5+R]x + (M+4Q-20)\right) dx + \frac{QL}{AE}$$ (ici, il ne faut pas oublier l'énergie attribuable à la tension)

$$= +\frac{1}{EI}\left\{-160 + 16M + 64Q + 32R\right\} + \frac{QL}{AE}$$

Pour CD



$$\sum M_y\Big|_D = 0 \rightarrow -M_{CD} - M - Rx = 0 \qquad M_{CD} = -(M + Rx)$$

$$\frac{\partial M_{CD}}{\partial R} = -x \qquad \frac{\partial M_{CD}}{\partial M} = -1 \qquad \frac{\partial M_{CD}}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{EI}\int_0^4 (Rx^2 + Mx)\, dx = \frac{64}{3}R + 8M$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{QL}{AE} \qquad \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{EI}\int_0^4 (Rx + M)\, dx = +8R + 4M$$

4

6

On aura donc :

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{64}{3}(5+R) + 8(M+4Q-20) + \frac{64}{3}R + 8M = 0$$

$$= \frac{320}{3} + \frac{128}{3}R + 32Q - 160 + 16M = 0$$

$$= -\frac{160}{3} + \frac{128}{3}R + 32Q + 16M = 0$$

$$= -160 + 128R + 96Q + 48M = 0$$

$$\boxed{-5 + 4R + 3Q + 1.5M = 0}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 40 + 8R + 4M + 16Q - 80 + 8R + 4M = 0$$

$$= -40 + 8M + 16Q + 16R$$

$$= \boxed{-5 + M + 2Q + 2R = 0}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = 0 = \frac{1}{EI}\left\{32(5+R) + 16(M+4Q-20)\right\} + \frac{2QL}{AE} = 0$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{-160 + 16M + 64Q + 32R\right\} + \frac{2QL}{AE} = 0$$

On peut mettre ces equations sous forme matricielle:

$$
\begin{array}{ccc}
R & Q & M
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 1 \\ \dfrac{32}{EI} & \dfrac{64}{EI} + \dfrac{2L}{AE} & \dfrac{16}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ \dfrac{160}{EI} \end{Bmatrix}
$$

Ici, on a que : $E = 200\ GPa = 200\,000 \times \dfrac{N}{mm^2} \times \dfrac{1\,kN}{1000\,N} \times \dfrac{(1000)^2\,mm^2}{m^2} = 2\times10^8\ \dfrac{kN}{m^2}$

$$A = 3610\,mm^2 \times \frac{1\,m^2}{(1000)^2\,mm^2} = 3.61\times10^{-3}\,m^2$$

Ici, on a de la flexion autour de y : $I_y = 6.35\times10^6\,mm^4 = 6.35\times10^{-6}\,m^4$.

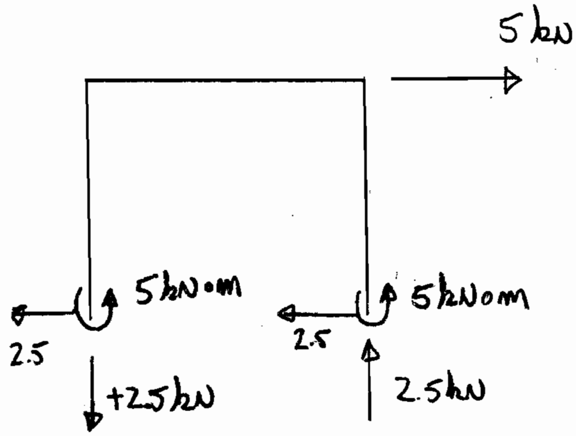
$L = 4$.

$\dfrac{1}{EI} = 7.87\times10^{-4}$ et $\dfrac{L}{AE} = 5.54\times10^{-6}$, très petit devant AE. On peut donc le negliger et on aura le système suivant.

$$
\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1.5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{Bmatrix}
$$

On trouve : $\begin{Bmatrix} R \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.5 \\ 2.5 \\ 5 \end{Bmatrix}$

Pour ce problème qui avait l'air simple, on a :



$R_{ZA} = -(5-2.5) = -2.5$

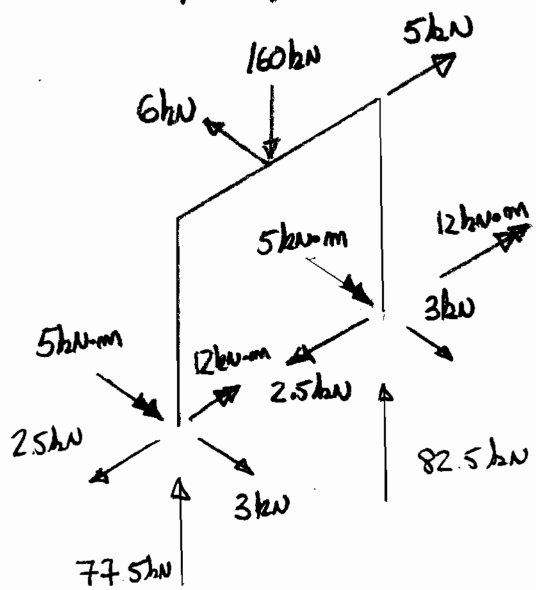
$R_{XA} \cdot -2.5$

$M_{YA} = 20+5-20 = 5$

Vérifions si l'on a bien l'équilibre $\Sigma F_Z = 0$ et $\Sigma F_X = 0$ (évident).

$\Sigma M_y|_A = 0 \rightarrow -5 - 5 - 4 \times 2.5 + 5 \times 4 = 0$. On a bien équilibre

Alors, la solution finale est la somme de la partie symétrique et de la partie non-symétrique :



Conclusion

La solution ici diffère un peu de celle donnée dans le livre : les réactions en X ne sont pas tout à fait égales.