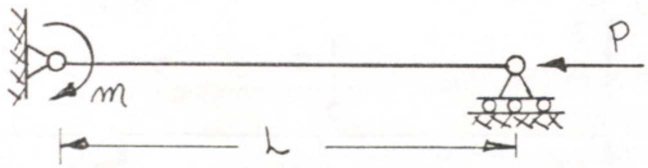
QUESTION No. 1 (11 points)

Démontrez rigoureusement que l'expression analytique du moment de flexion dans la poutre-colonne illustrée est donnée par l'équation (a). Cette poutre-colonne supporte une charge en compression **P** ainsi qu'un moment concentré <u>positif</u> **m** agissant à son extrémité gauche.



$$M(x) = m\left[\cos(nx) - \frac{\cos(nL)}{\sin(nL)}\sin(nx)\right] \qquad \text{(a)}$$

<u>Rappel</u> :

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(nx) + C_4 \cos(nx)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = C_2 + C_3 n \cos(nx) - C_4 n \sin(nx)$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2} = -C_3 n^2 \sin(nx) - C_4 n^2 \cos(nx)$$

$$\frac{V}{EI} = -C_2 n^2$$

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

<u>CONDITIONS AUX EXTRÉMITÉS</u>

<u>à $x = 0$</u>

$$v = 0 = C_1 + C_4 \qquad (a)$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{m}{EI} = -C_4 n^2 \qquad (b)$$

<u>à $x = L$</u>

$$v = 0 = C_1 + C_2 L + C_3 \sin nL + C_4 \cos nL \qquad (c)$$

$$\frac{M}{EI} = 0 = -C_3 n^2 \sin nL - C_4 n^2 \cos nL \qquad (d)$$

<u>SOLUTION</u>

(b) → $C_4 = -\frac{m}{EI\, n^2} = -\frac{m}{P}$ PUISQUE $n^2 = P/EI$

(a) → $C_1 = -C_4 = \frac{m}{P}$

(d) → $C_3 = -C_4 \frac{\cos nL}{\sin nL} = \frac{m}{P}\frac{\cos nL}{\sin nL}$

(c) → $C_2 L = -C_1 - C_3 \sin nL - C_4 \cos nL$

$$= \frac{m}{P}\left[-1 - \frac{\cos nL}{\cancel{\sin nL}}\cancel{\sin nL} + \cancel{\cos nL}\right]$$

$$C_2 = -\frac{m}{PL}$$

<u>MOMENT FLECHISSANT</u>

$$\frac{M}{EI} = -C_3 n^2 \sin nx - C_4 n^2 \cos nx = \cancel{n^2}^{\,P/EI}\,\frac{m}{P}\left[-\frac{\cos nL}{\sin nL}\sin nx + \cos nx\right]$$

$$\boxed{\frac{M}{\cancel{EI}} = \frac{m}{\cancel{EI}}\left[\cos nx - \frac{\cos nL}{\sin nL}\sin nx\right]}$$