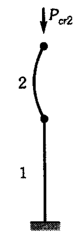
Flambement élastique de la colonne 2 (la colonne 1 demeure droite) :



$$\boxed{\text{Pour } \sin \alpha n_2 L = 0 \rightarrow n_2 L = \frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\text{d'où } P_{cr2} = \frac{\pi^2 E_2 I_2}{(\alpha L)^2} \qquad (10)$$

En comparant (9) et (10), on obtient $K_1^* = \alpha \sqrt{\dfrac{E_1 I_1}{E_2 I_2}}$

Donc :

si $K_1 \leq \alpha \sqrt{\dfrac{E_1 I_1}{E_2 I_2}}$ $\rightarrow$ Flambement de la colonne 2

si $K_1 \geq \alpha \sqrt{\dfrac{E_1 I_1}{E_2 I_2}}$ $\rightarrow$ Flambement de la colonne 1

b) Colonnes identiques

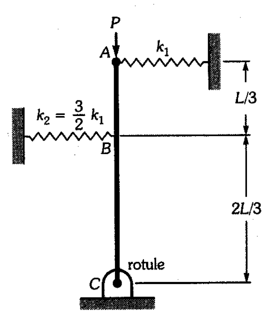
Pour des colonnes identiques, on a $\alpha = \sqrt{\dfrac{E_1 I_1}{E_2 I_2}} = 1{,}0$

Avec $\alpha = 1{,}0$, on obtient $K_1 = 2{,}695 > \alpha \sqrt{\dfrac{E_1 I_1}{E_2 I_2}}$

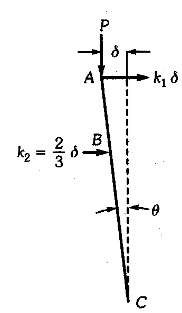
Flambement de la colonne 1 :

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 E_1 I_1}{(K_1 L)^2} = \frac{\pi^2 E_1 I_1}{(2{,}695 L)^2}}$$

S11.1 Soit une membrure rigide *ABC* retenue en *A* et en *B* par des ressorts. En supposant que les déplacements ne se produisent que dans le plan de la figure, calculer la valeur critique de la charge en compression *P*.



Solution



Déplacement de l'extrémité *A* d'une quantité δ à partir de sa position d'équilibre originale (voir figure).

Pour avoir l'équilibre neutre :

$$\Sigma M_{/C} = 0 [+\circlearrowleft]$$

$$P\delta - k_1 \delta L \cos\theta - k_2 \left(\frac{2}{3}\delta\right) \times \frac{2L}{3} \cos\theta = 0$$

$$P = \left(k_1 + \frac{4}{9}k_2\right)L\cos\theta$$

Pour les valeurs faibles de θ :

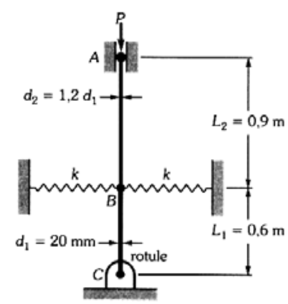
$$\cos\theta \cong 1$$

$$P = \left(k_1 + \frac{4}{9}k_2\right)L$$

où $k_2 = \dfrac{3}{2}k_1 \rightarrow P_C = P = \dfrac{5}{3}k_1 L$

S11.2 Le système de la figure se compose de deux barreaux AB et BC en acier ($E = 210$ GPa, $S_Y = 260$ MPa) de section circulaire. Les diamètres des barreaux AB et BC sont de 24 mm et de 20 mm respectivement. La rotule B est retenue par deux ressorts de constante $k = 60$ kN/m. Le système est en équilibre quand les deux barreaux sont parfaitement alignés.

En supposant que les déplacements ne s'effectuent que dans le plan de la figure, déterminer la valeur critique de la charge en compression P.



Solution

Il y a différents modes de faillite à examiner.

1. Rotation des membrures rigides

Rotule A :

$$\rightarrow (F_{AB})_y = F_{AB}\cos\theta = P \rightarrow F_{AB} = \frac{P}{\cos\theta}$$

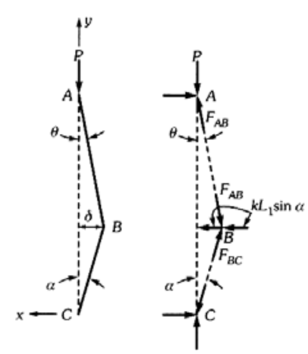
$$\rightarrow (F_{AB})_x = F_{AB}\sin\theta = \frac{P\sin\theta}{\cos\theta}$$

Membrure BC :

$$\rightarrow (\Sigma M)_{z/C} = 0$$

$$(F_{AB})_y \cdot L_1\sin\alpha + (F_{AB})_x \cdot L_1\cos\alpha - (2kL_1\sin\alpha)\cdot L_1\cos\alpha = 0$$

$$P\left[1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right] = 2kL_1\cos\alpha$$



$$\delta = L_1 \sin\alpha = L_2 \sin\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{L_1}{L_2}$$

$$P = \frac{2kL_1 \cos\alpha}{1 + \dfrac{L_1}{L_2} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}}$$

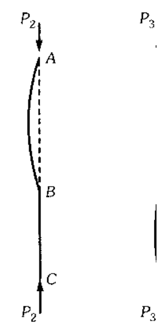
Les valeurs de θ et de α sont faibles $\rightarrow$ $\cos\alpha \cong \cos\theta \cong 1$

$$P_1 = \frac{6}{5} kL_1 = 43{,}2 \text{ kN}$$

2. Flambement de la colonne élastique AB ($K = 1$)

$$I_z = \frac{\pi}{64}(24)^4 \times 10^{-12} = 16{,}286 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$P_2 = \frac{(3{,}1416)^2 \times 210 \times 10^9 \times 16{,}286 \times 10^{-9}}{(0{,}9)^2} = 41{,}67 \text{ kN}$$



3. Flambement de la colonne élastique BC ($K = 1{,}0$)

$$I_z = \frac{\pi}{64}(20)^4 \times 10^{-12} = 7{,}854 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

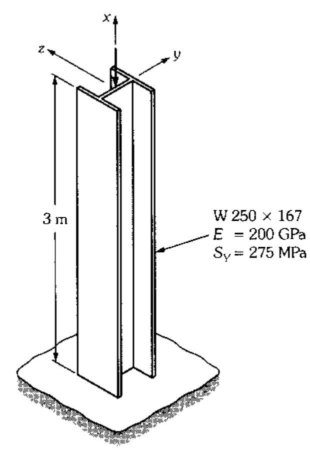
$$P_3 = \frac{(3{,}1416)^2 \times 210 \times 10^9 \times 7{,}854 \times 10^{-9}}{(0{,}6)^2} = 45{,}22 \text{ kN}$$

4. Écoulement de la membrure BC

$$P_4 = \frac{\pi}{4} \times (20)^2 \times 10^{-6} \times 260 \times 10^6 = 81{,}68 \text{ kN}$$

Conclusion : $P_{\max} = 41{,}67 \text{kN}$ (limitée par le flambement de AB)

S11.3 Pour la colonne libre-encastrée AB, on a choisi un profilé $W250 \times 167$. Calculer la valeur maximale théorique charge en compression P. Comparer cette valeur à celle que prescrit le code de l'ACNOR avec $n = 1{,}34$ ‹ facteur de charge de 1,5.



Profilé $W250 \times 167$

$A = 21\,300 \text{ mm}^2$

$I_y = 98{,}8 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $r_y = 68{,}1$ mm

$I_z = 300 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $r_z = 119$ mm

Solution

Charge maximale théorique :

$I = I_{\min} = I_y$ (flexion autour de y)

$$\frac{KL}{r} = \frac{2,0 \times 3}{68,1 \times 10^{-3}} = 88,11 \text{ (colonne encastrée-libre, } K = 2,0)$$

$$\sigma_C = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{(88,11)^2} = 254,3 \text{ MPa } (\sigma_C < S_Y)$$

$$P_C = 254,3 \times 10^6 \times 21\,300 \times 10^{-6} = 5,42 \text{ MN}$$

Charge maximale prescrite par le code avec $n = 1,34$ et un facteur de charge de 1,5 :

$$\lambda = \frac{KL}{r}\sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2 E}} = 88,11 \times \sqrt{\frac{275}{\pi^2 \times 200 \times 10^3}} = 1,04$$

$$\frac{C_r}{\phi A} = 275\left(1 + \lambda^{2n}\right)^{-1/n} = 275\left(1 + 1,04^{2,68}\right)^{-1/1,34} = 157,5$$

Avec $\phi = 0,9 \rightarrow \dfrac{Cr}{A} = 141,7$ MPa (contrainte maximale permise)

Donc, la charge permise pour ce facteur de charge de 1,5 est :

$$P_C = \frac{C_r}{1,5} = \frac{141,7 \times 10^6 \times 21\,300 \times 10^{-6}}{1,5} = 2,01 \text{ MN}$$

Note : Le facteur de sécurité pour ce cas est $FS = \dfrac{5,42}{2,01} = 2,7.$

S11.4 Une colonne AB en profilé $W310 \times 60$ est encastrée à l'extrémité B ; on peut voir la condition de fixation de l'extrémité A dans la figure. Calculer la charge maximale en compression (valeur théorique et valeur imposée par le code avec $n = 1,34$ et un facteur de charge de 1,5).

Profilé $W310 \times 60$

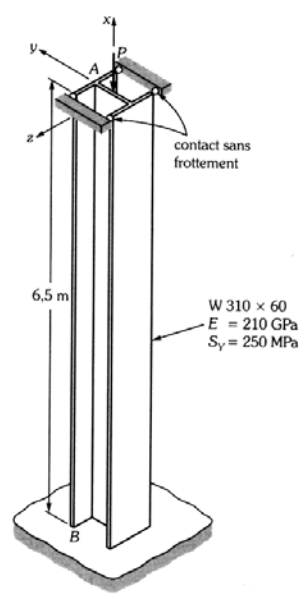
$A = 7590 \text{ mm}^2$

$I_z = 129 \times 10^6 \text{ mm}^4$

$r_z = 130$ mm

$I_y = 18,3 \times 10^6 \text{ mm}^4$

$r_y = 49,1$ mm



Solution

Charge maximale théorique :

1. Flambement dans le plan $(x, y) \rightarrow$ axe neutre : z ; colonne encastrée-libre ($K = 2$)

$$(\sigma_C)_1 = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{\left(2 \times \dfrac{6,5}{0,13}\right)^2} = 207,3 \text{ MPa}$$

2. Flambement dans le plan $(x, z) \rightarrow$ axe neutre : y ; colonne encastrée-rotule ($K = 0,7$)

$$(\sigma_C)_2 = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{\left(0,7 \times \dfrac{6,5}{0,0491}\right)^2} = 241,4 \text{ MPa}$$

En comparant $(\sigma_C)_1$, $(\sigma_C)_2$ à S_Y, on trouve que :

$$\sigma_{\max} = 207,3 \text{ MPa} \rightarrow P_{\max} = 207,3 \times 10^6 \times 7590 \times 10^{-6} = 1573 \text{ kN}$$

Charge maximale suivant le code (flexion autour de z) avec un facteur de charge de 1,5 :

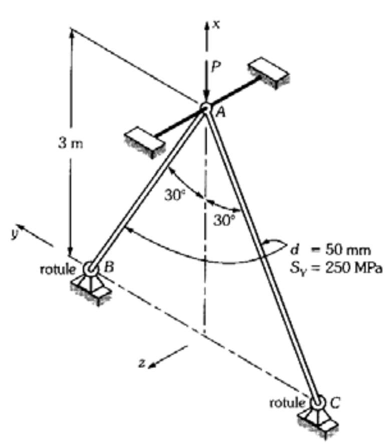
$$\lambda = \frac{KL}{r}\sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2 E}} = \frac{2 \times 6,5}{0,13}\sqrt{\frac{250}{\pi^2 \times 210 \times 10^3}} = 1,0983$$

$$\frac{C_r}{\phi A} = 250\left(1 + \lambda^{2n}\right)^{-1/n} = 250\left(1 + 1,0983^{2,68}\right)^{-1/1,34} = 134,9 \text{ MPa}$$

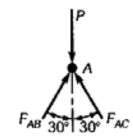
$$\text{Avec } \phi = 0,9 \rightarrow \frac{C_r}{A} = 121,4 \text{ MPa} \rightarrow P_{\max} = \frac{C_r}{1,5} = 614 \text{ kN}$$

Note : Dans ce cas, $FS = \dfrac{1573}{614} = 2,56$.

S11.5 Un support formé de deux barreaux d'acier ($E = 200$ GPa) de 50 mm de diamètre, pivotés, doit soutenir une charge verticale P. Déterminer la valeur maximale de P (théorique et selon le code de l'ACNOR avec $n = 1,34$ et un facteur de charge de 1,5).



Solution



Équilibre à la rotule $A \rightarrow F_{AB} = F_{AC} = \dfrac{P}{2\cos 30°}$

Charge maximale théorique pour chaque barreau :

colonne rotule-rotule (K = 1,0) : $L = \dfrac{3}{\cos 30°} = 3{,}4641$ m

$$r_{\text{gir, DIA}} = \frac{\frac{50}{2}}{2} = 12{,}5 \text{ mm}$$

$$\frac{F_C}{A} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{\left(\dfrac{3{,}4641}{0{,}0125}\right)^2} = 25{,}70 \text{ MPa}$$

$$\frac{F_C}{A} < S_Y, \text{ donc } F_{\max} = 25{,}7 \times \frac{\pi}{4}(50)^2 = 50{,}46 \text{ kN}$$

ce qui donne : $P_{\max} = 87{,}40$ kN

Charge maximale suivant le code avec n = 1,34 et un facteur de charge de 1,5 :

$$\lambda = \frac{KL}{r}\sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2 E}} = \frac{1 \times 3{,}4641}{0{,}0125}\sqrt{\frac{250}{\pi^2 \times 200 \times 10^3}} = 3{,}119$$

$$\frac{C_r}{\phi A} = 250\left(1 + \lambda^{2n}\right)^{-1/n} = 250\left(1 + 3{,}119^{2{,}68}\right)^{-1/1{,}34} = 24{,}8$$

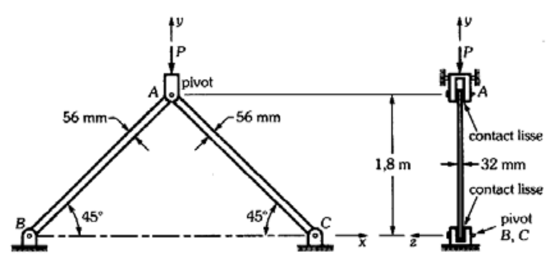
Avec $\phi = 0{,}9 \rightarrow \dfrac{C_r}{A} = 22{,}34$ MPa

$$\text{ce qui donne : } F_{\max} = \frac{C_r}{1{,}5} = \frac{22{,}34}{1{,}5} \times \frac{\pi}{4}(50)^2 = 29{,}3 \text{ kN}$$

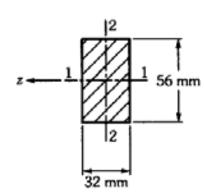
$$P_{\max} = 50{,}7 \text{kN}$$

Note : Dans ce cas, $FS = \dfrac{87{,}4}{50{,}7} = 1{,}72$.

S11.6 Le support illustré consiste en deux barreaux de section rectangulaire 32 mm × 56 mm en acier (E = 210 GPa, S_Y = 180 MPa). Déterminer la charge maximale théorique du support.



Solution



Équilibre au point A :

Soit F_{AB} et F_{AC} les forces en compression dans AB et AC :

$$F_{AB} = F_{AC} = \frac{P}{2\cos 45°}$$

1. Flambement dans le plan $(x, y) \rightarrow$ flexion autour de 1-1

   colonne rotule-rotule ($K = 1{,}0$) : $L = 1{,}8\sqrt{2}$

   $$I_{1-1} = \frac{1}{12} \times 32 \times (56)^3 = 4{,}683 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

   $$F_1 = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 4{,}683 \times 10^{-7}}{\left(1 \times 1{,}8\sqrt{2}\right)^2} = 149{,}8 \text{ kN}$$

2. Flambement latéral $\rightarrow$ flexion autour de 2-2

   colonne encastrée-encastrée ($K = 0{,}5$) :

   $$I_{2-2} = \frac{1}{12} \times 56 \times (32)^3 = 1{,}529 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

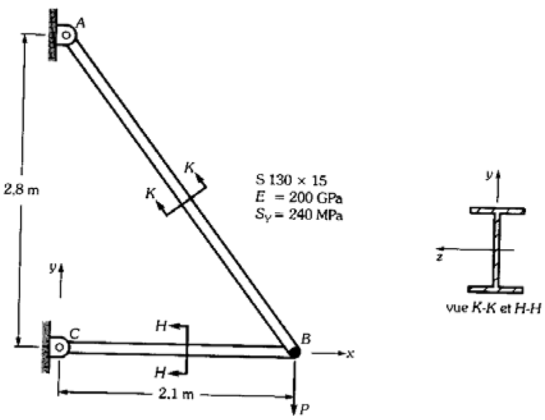
   $$F_2 = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 1{,}529 \times 10^{-7}}{\left(0{,}5 \times 1{,}8\sqrt{2}\right)^2} = 195{,}6 \text{ kN}$$

3. Écoulement des barreaux

   $$F_3 = 180 \times 10^6 \times 32 \times 56 \times 10^{-6} = 322{,}6 \text{ kN}$$

   Conclusion : $F_{max} = 149{,}8 \text{ kN} \rightarrow P_{max} = 211{,}8 \text{ kN}$

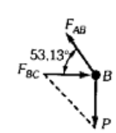
S11.7 Une structure est formée de deux membrures AB et BC fabriquées à partir des profilés $S130 \times 15$. Tous les joints sont des rotules. En supposant que la rotule B ne se déplace que dans le plan de la figure, calculer la valeur maximale de la charge P. Comparer la valeur théorique à la valeur prescrite par le code avec $n = 1{,}34$ et un facteur de charge de 1,5.



Solution

Équilibre : $F_{AB} = \dfrac{P}{\sin 53{,}13°}$ (tension)

$$F_{BC} = \frac{P}{\text{tg}\, 53{,}13°} \text{ (compression)}$$



Profilé $S130 \times 15$:

$A = 1890 \text{ mm}^2$

$I_z = 5{,}12 \times 10^6 \text{ mm}^4$

$r_z = 52{,}0 \text{ mm}$

$I_y = 0{,}508 \times 10^6 \text{ mm}^4$

$r_y = 16{,}4 \text{ mm}$

Charge théorique maximale :

1. Membrure AB

   $$P_1 = (\sin 53{,}13°)\left(240 \times 10^6 \times 1890 \times 10^{-6}\right) = 362{,}9 \text{ kN}$$

2. Membrure BC : colonne avec $K = 1{,}0$; $I = I_y$

$$(F_{BC})_C = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 0{,}508 \times 10^{-6}}{(2{,}1)^2} = 227{,}4 \text{ kN}$$

ce qui donne : $P_2 = 303{,}2$ kN

Conclusion : $P_{\text{max, théorique}} = 303{,}2$ kN

Charge maximale suivant le code de l'ACNOR :

1. Membrure AB (tension : $0{,}9S_Y/1{,}5$)

$$P_1 = \frac{0{,}9 \times (\sin 53{,}13°)\left(240 \times 10^6 \times 1890 \times 10^{-6}\right)}{1{,}5} = 217{,}7 \text{ kN}$$

2. Membrure BC

$$\lambda = \frac{KL}{r}\sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2 E}} = \frac{2{,}1}{16{,}4 \times 10^{-3}}\sqrt{\frac{240}{\pi^2 \times 200 \times 10^3}} = 1{,}4119$$

$$\frac{C_r}{\phi A} = 240\left(1 + \lambda^{2n}\right)^{-1/n} = 240\left(1 + 1{,}4119^{2{,}68}\right)^{-1/1{,}34} = 93{,}82 \text{ MPa}$$

Avec $\phi = 0{,}9 \rightarrow P_2 = \frac{C_r}{1{,}5} = \frac{0{,}9 \times 93{,}82 \times 10^6 \times 1890 \times 10^{-6}}{1{,}5} = 106{,}4$ kN

Conclusion : $P_{\text{max, code}} = 106{,}4$ kN