

# Section 3 : Instabilité et flambement

- **Objectifs**
  - Comprendre le phénomène d'instabilité
  - Calculer la charge limite d'une membrure rigide



Phénomène physique

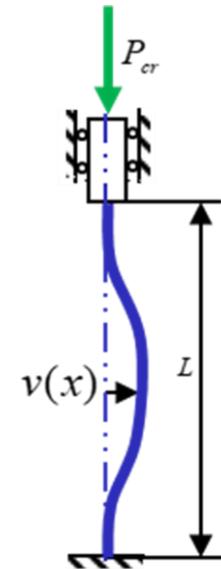


Schéma de l'étude

## Section 3 : Instabilité et flambement

3.1 Introduction

3.2 Stabilité d'une membrure rigide

3.3 Stabilité d'une membrure élastique en compression (colonne)

3.4 Formule d'*Euler*

3.5 Colonne rotule-rotule soumise à une charge excentrée

3.6 Conception d'une colonne

3.7 Poutre colonne

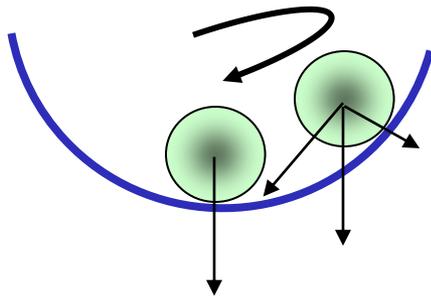
3.8 Déversement latéral des poutres (Pas de fichier)

3.9 Voilement des sections à parois minces (Pas de fichier)

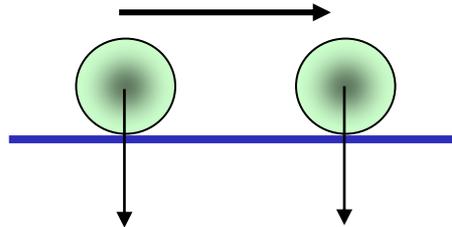
# Instabilité

## 3.1 Introduction

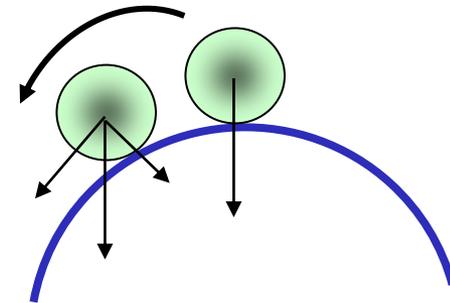
Systeme en  
équilibre stable



Systeme en  
équilibre neutre



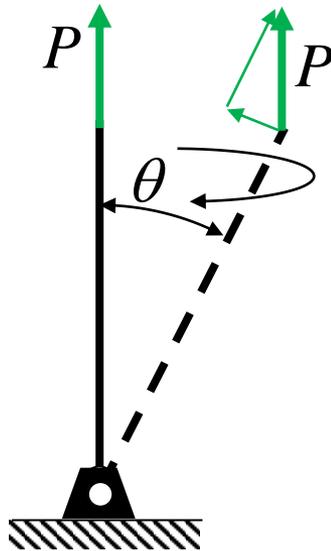
Systeme en  
équilibre instable



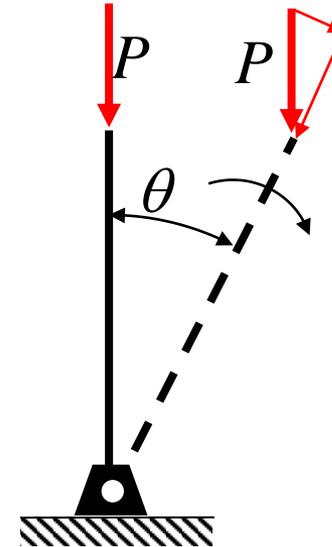
# Instabilité

*Pas de déformation*

## Stabilité d'une membrure rigide



Un chargement de tension définit un système en **équilibre stable**.

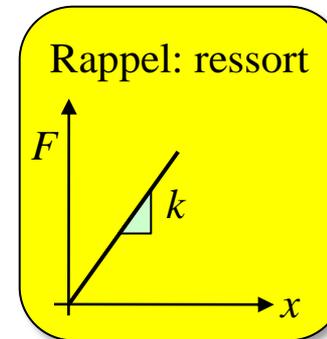
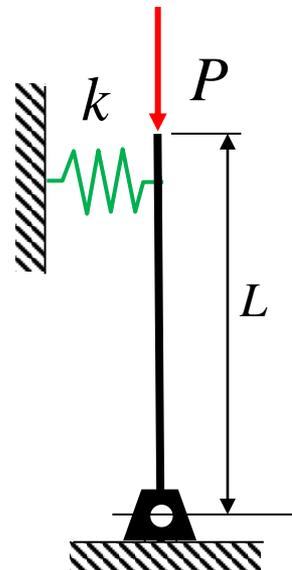


Un chargement de compression met le système en **équilibre instable**.

la membrure est articulée sur une rotule

## 3.2 Stabilité d'une membrure rigide

- Membrure rigide retenue par un appui élastique
  - Pour stabiliser la membrure sous un chargement en compression, on l'attache à l'aide d'un ressort (**appui élastique**)
  - **Déterminer la force  $P$  qui rend le système en équilibre neutre**



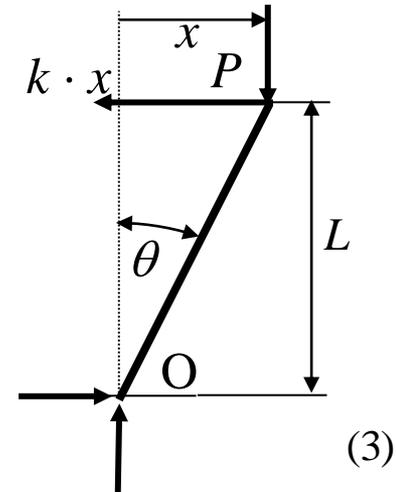
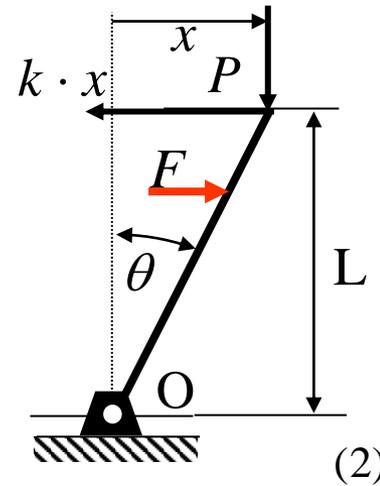
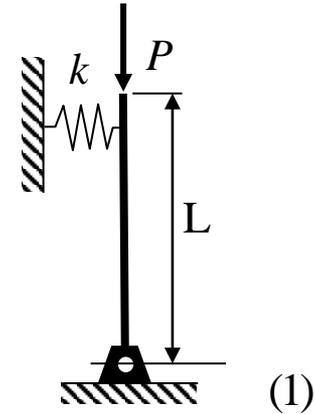
### 3.2 Stabilité d'une membrure rigide

1. Membrure rigide retenue par un appui élastique
2. On applique une petite force latérale  $F$ ; La membrure subit une rotation  $\theta$
3. On enlève la force  $F$  et la membrure demeure dans sa position inclinée si:

$$\sum M_O = 0 = P \cdot x - k \cdot x \cdot L$$

$$P \cdot x = k \cdot x \cdot L \quad x \ll L$$

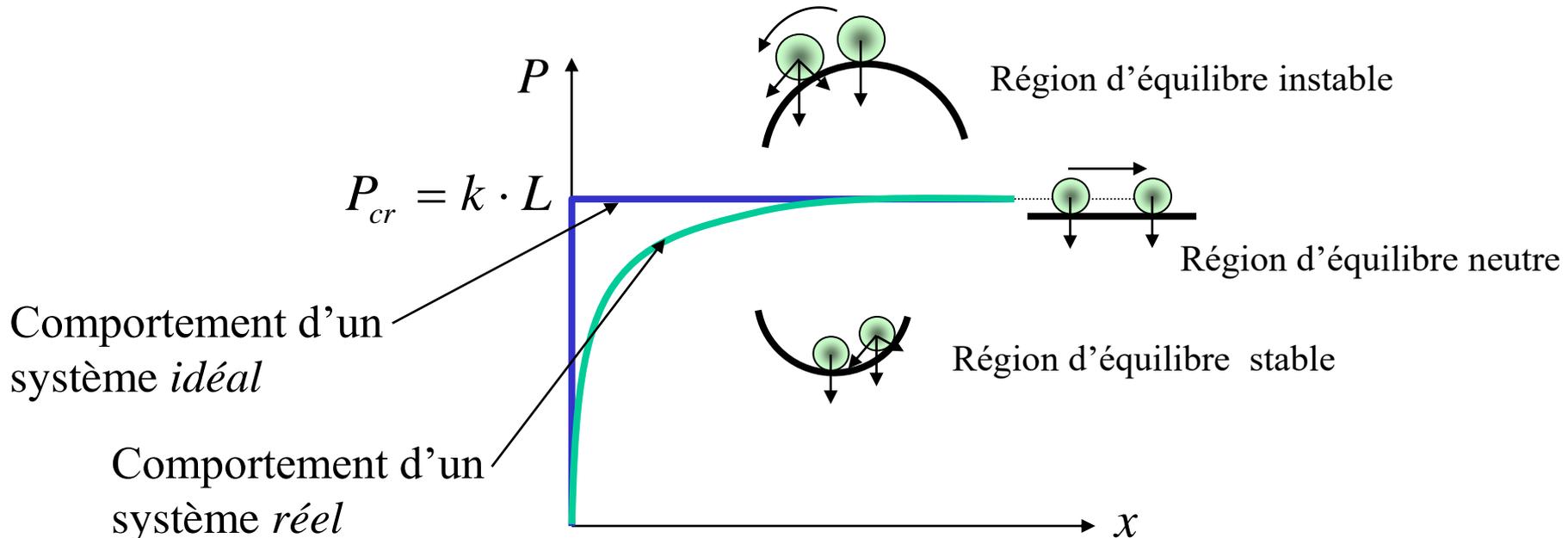
Ceci est la condition d'équilibre neutre



L'équation d'équilibre  $P \cdot x = k \cdot x \cdot L$  a deux solutions :

1.  $x = 0$  pour toute valeur de  $P$
2.  $P = k.L$  pour toute valeur de  $x \ll L$

$P = k.L$  est appelé la **charge critique**  $P_{cr}$ .  
C'est le chargement de transition entre la région d'équilibre stable et celle d'équilibre instable



# Stabilité d'une membrure rigide initialement inclinée

Soit une membrure installée avec un décalage latéral qui représente les imperfections de la membrure.

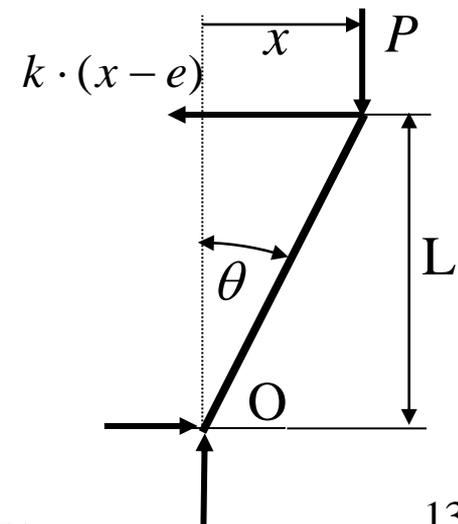
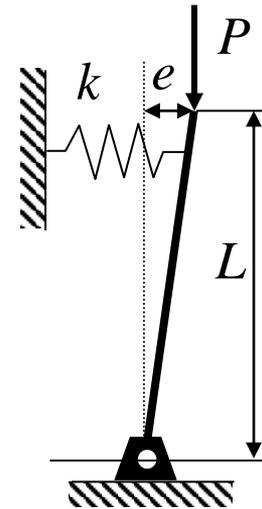
La membrure peut être déplacée d'une distance  $x$  de sa position verticale si :

$$\sum M_O = 0 = P \cdot x - k \cdot (x - e) \cdot L$$

$$x \cdot (P - k \cdot L) = -(k \cdot L) \cdot e$$

$$x \cdot (P - P_{cr}) = -P_{cr} \cdot e$$

$$\frac{x}{e} = \frac{1}{1 - P / P_{cr}}$$

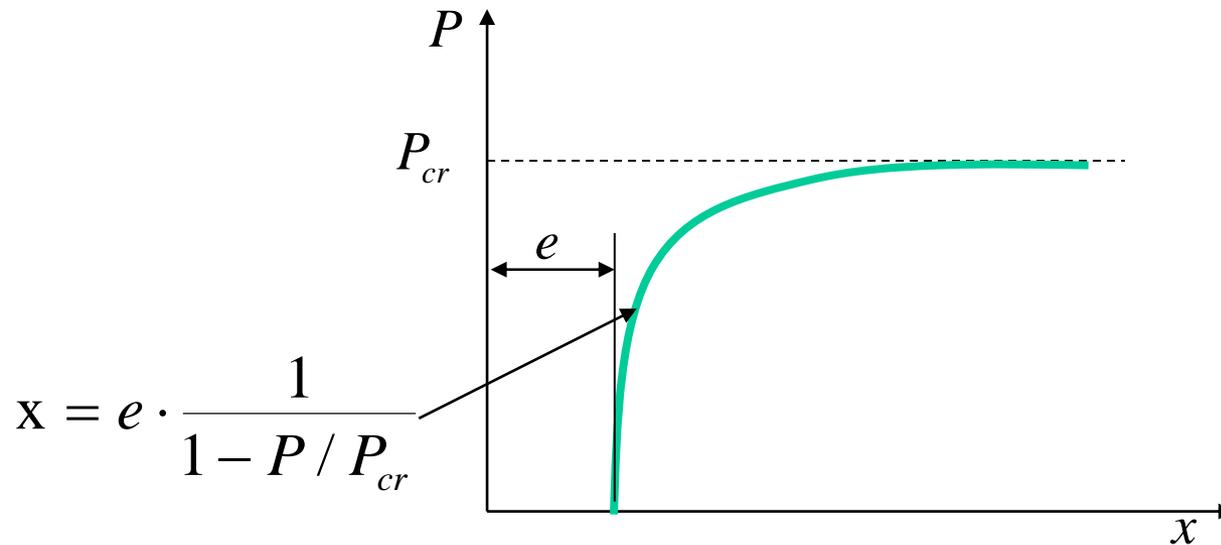


# Stabilité d'une membrure rigide initialement inclinée

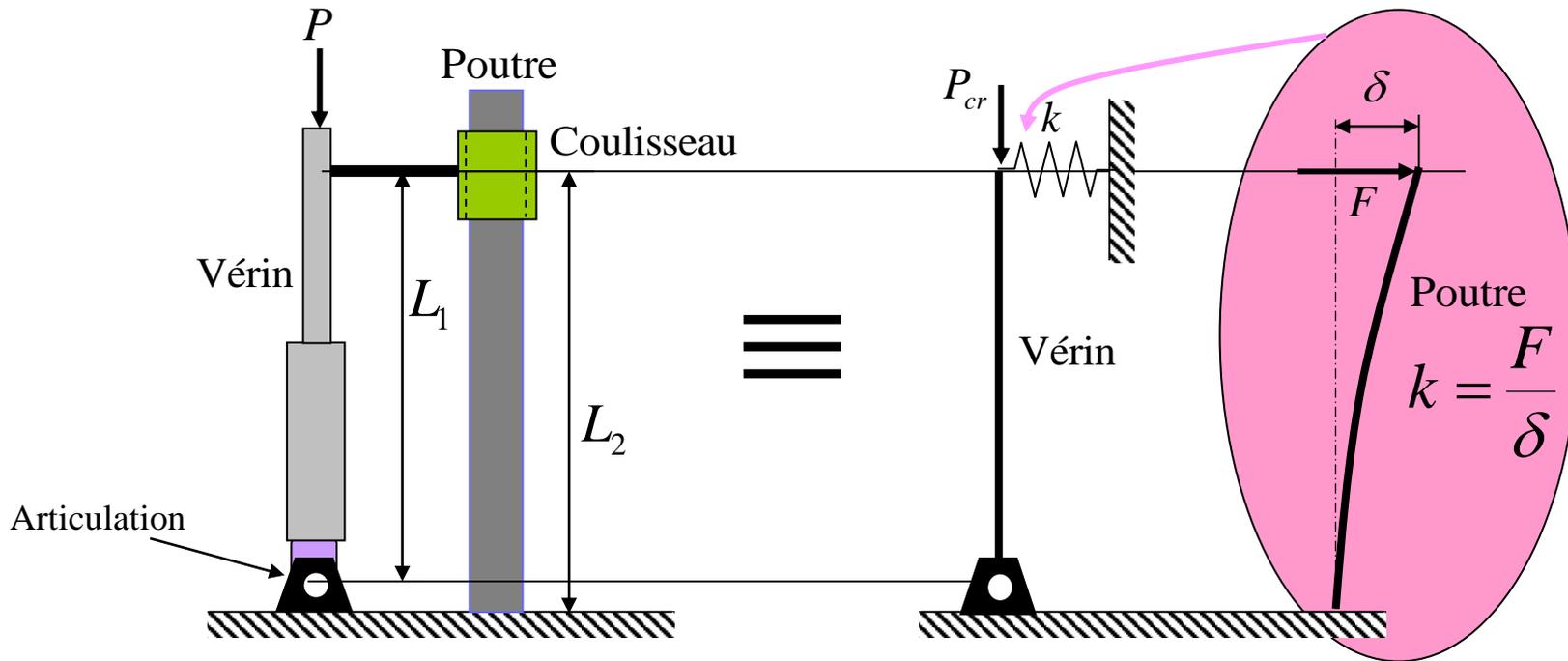
La condition d'équilibre pour un système imparfait contenant un décalage initial est :

$$\frac{x}{e} = \frac{1}{1 - P / P_{cr}}$$

où  $P_{cr}$  est la charge critique pour un système parfait.



**Exemple 1:** Un vérin hydraulique articulé à sa base est chargé en compression. Déterminer la charge  $P_{cr}$  si le vérin est considéré comme une membrure rigide.

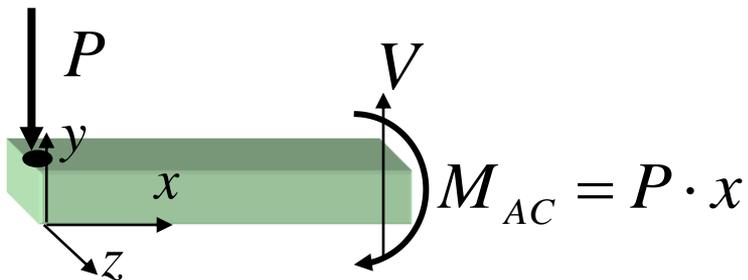
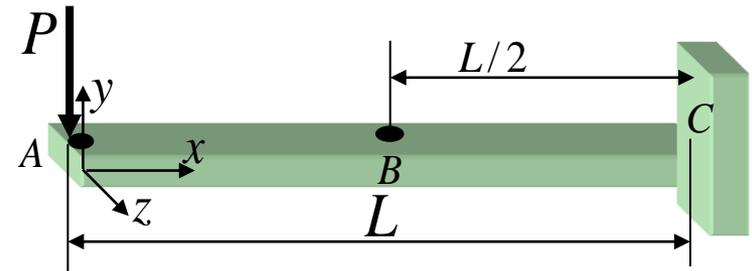


$$\delta = \frac{F \cdot L_2^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad ; \quad k = \frac{F}{\delta} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L_2^3} \quad ; \quad P_{cr} = k \cdot L_1 = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot L_1}{L_2^3}$$

**Rappel:** En appliquant le théorème de Castigliano :

a) Les efforts internes entre A et C

$$\delta_A = \int_0^L \frac{M_{AC}}{E \cdot I} \frac{\partial M_{AC}}{\partial P} \cdot dx = \int_0^L \frac{P \cdot x}{E \cdot I} \cdot x \cdot dx$$



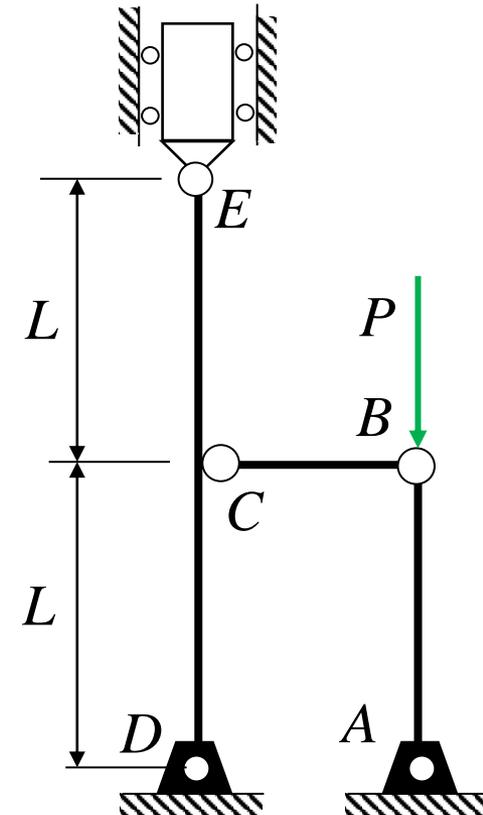
$$\delta_A = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

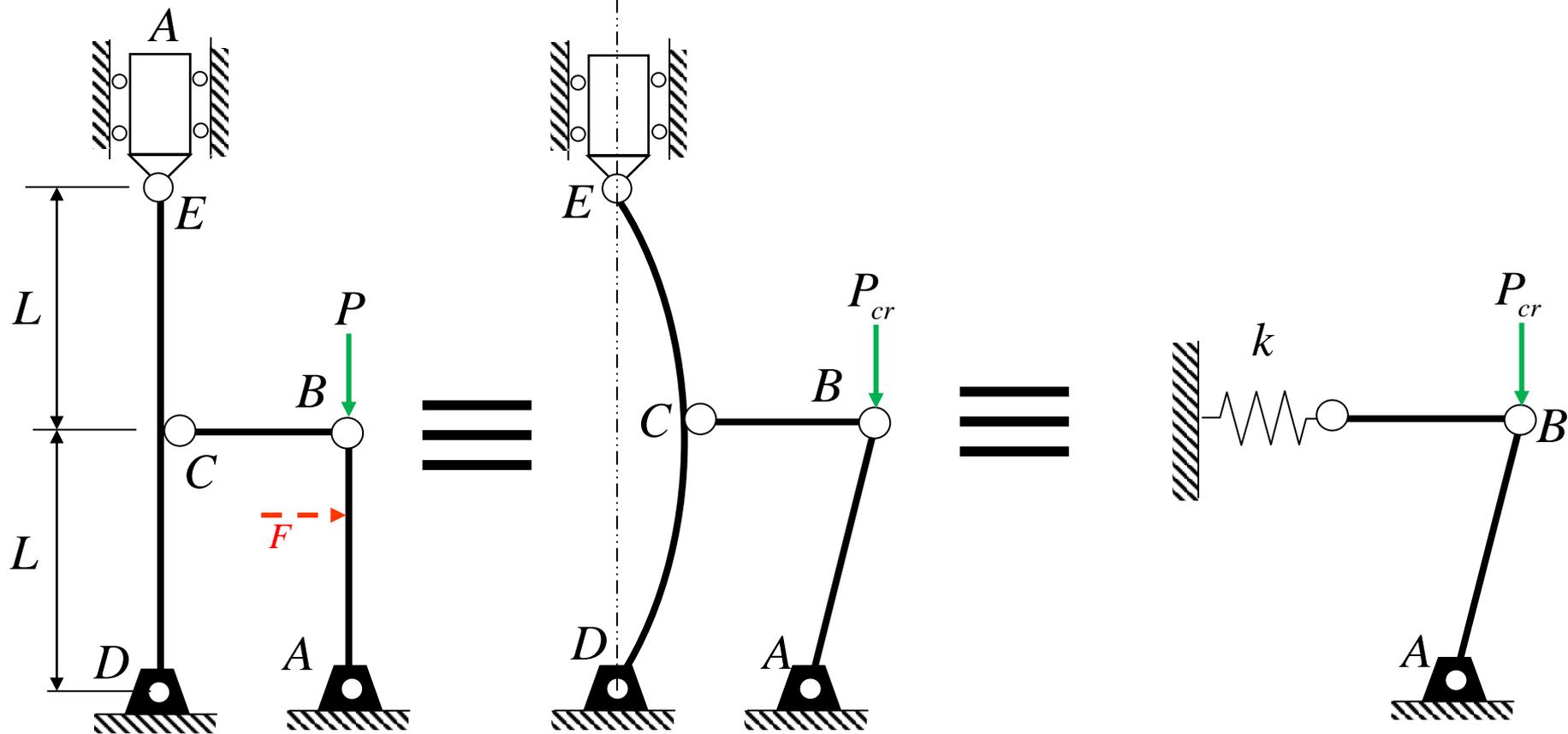
## Problème

Calculer  $P_{cr}$  pour cette structure. Les membrures AB et BC sont *rigides*. La membrure DE est élastique et ne sert que de support latéral à la membrure AB. Les joints A, D, B et C sont des rotules.

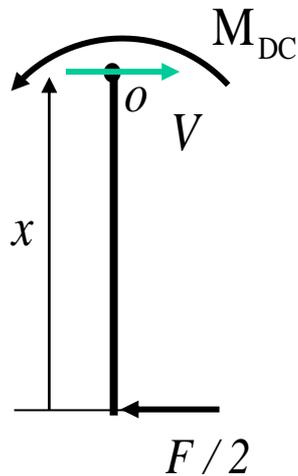
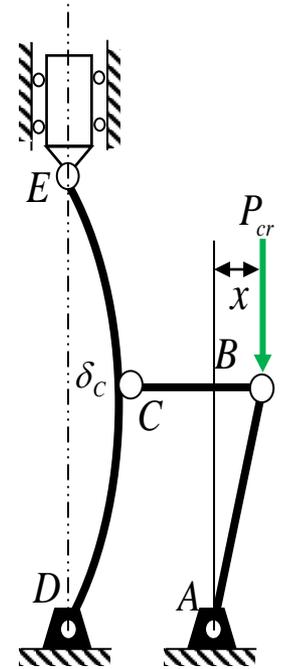
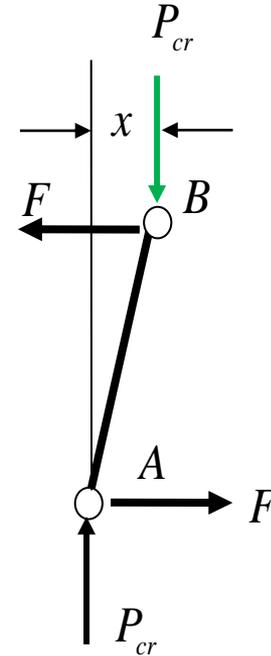
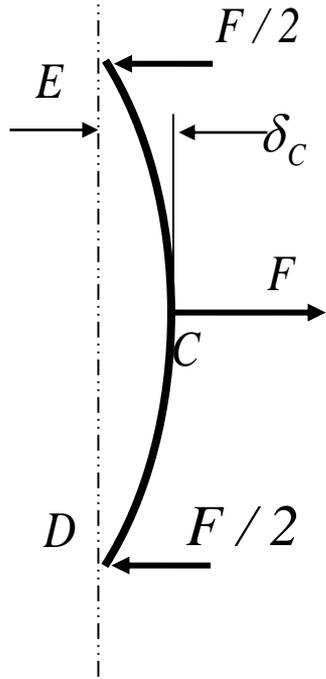
## Solution

- On applique une petite force latérale  $F$
- La structure se déplace latéralement
- On enlève la force  $F$  et la structure demeure dans sa position inclinée si  $P = P_{cr}$





État d'équilibre neutre



Effort interne dans DC:  
 $M_{DC} = F \cdot x/2$

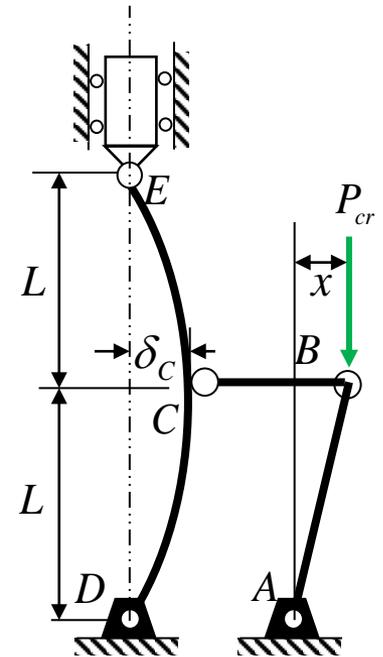
Selon Castigliano, appliqué sur la membrure DE :

$$x = \delta_C = \frac{\partial U}{\partial F} = 2 \int_0^L \frac{M_{DC}}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M_{DC}}{\partial F} dx \quad \text{où } M_{DC} = F \cdot x/2$$

$$x = \delta_C = \frac{\partial U}{\partial F} = 2 \int_0^L \frac{F}{2} \cdot x \left( \frac{x}{2} \right) \frac{dx}{E \cdot I} = \frac{F L^3}{2 \cdot 3 E \cdot I}$$

$$k = \frac{F}{\delta_C} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

Rigidité équivalente  
de la structure

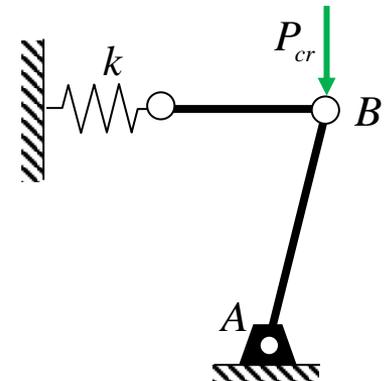


La membrure AB est considérée rigide.

Pour une membrure rigide retenue par un ressort,

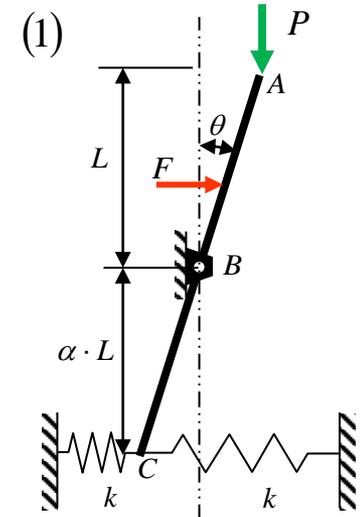
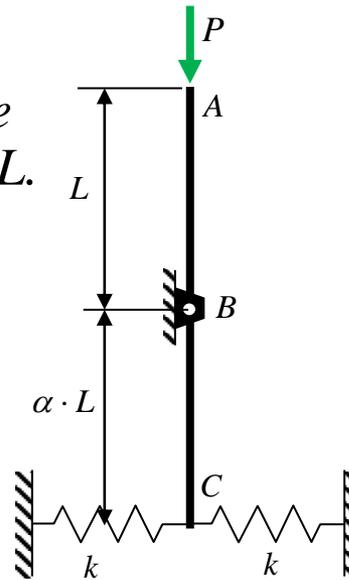
$P_{cr} = k L$  ou :

$$P_{cr} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$



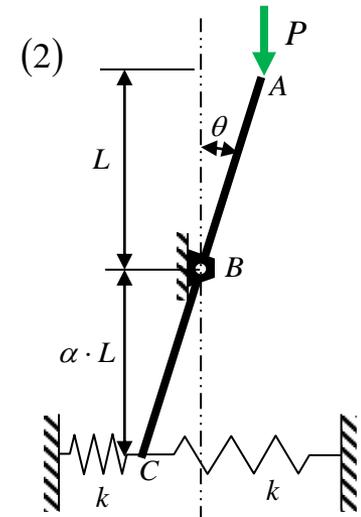
## Problème

Déterminer  $P_{cr}$  pour la membrure *rigide* AC, en fonction des dimensions  $L$  et  $\alpha L$ . L'attache en B est une rotule.



## Solution

1. On applique une petite force latérale  $F$ . La structure se déplace d'un angle  $\theta$ .
2. On enlève la force  $F$  et la structure demeure dans sa position inclinée si  $P = P_{cr}$



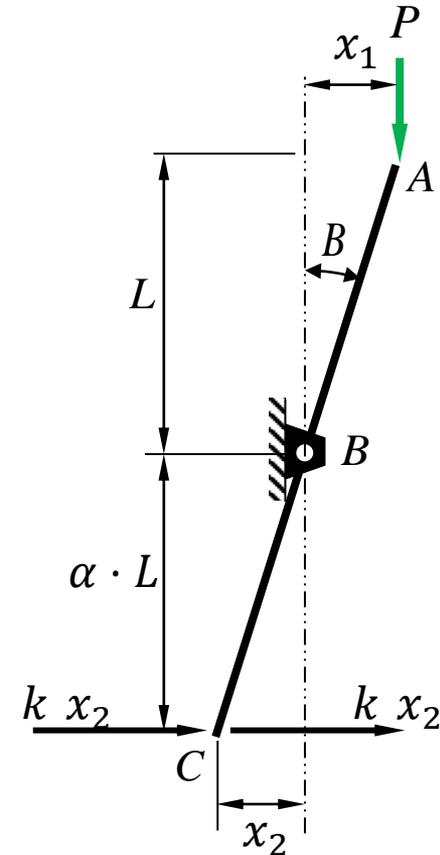
La membrure s'incline d'un angle  $\theta$  :

$$\frac{x_1}{L} = \frac{x_2}{\alpha L} \quad \begin{aligned} x_1 &= \theta L \\ x_2 &= \alpha \theta L \end{aligned}$$

$$\sum M_B = 0 = P x_1 - 2 \cdot k \cdot x_2 \cdot (\alpha \cdot L)$$

$$P \cdot \theta \cdot L = 2 \cdot k \cdot \theta \cdot \alpha \cdot L(\alpha \cdot L)$$

$$P_{cr} = 2 \cdot k \cdot \alpha^2 \cdot L$$



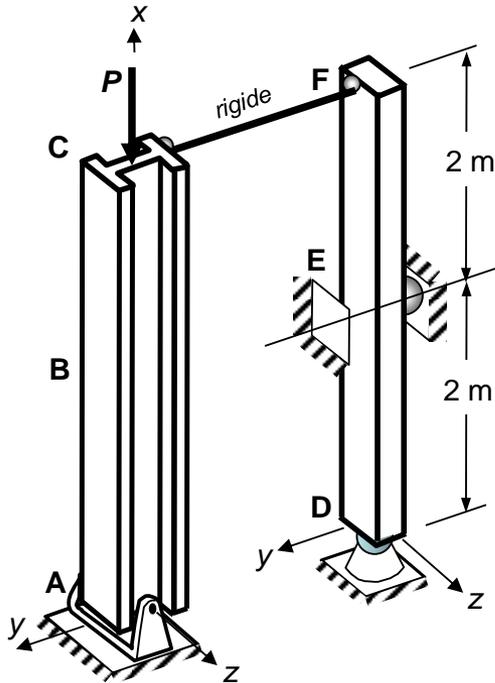
Qu'est-ce qui se passe lorsque  $k$  est très élevée?

## Stabilité d'une membrure rigide (exercice 1)

La figure a) illustre en isométrie un système est composé d'une membrure ABC ( $L = 4$  m), d'une poutre DEF ( $L = 4$  m) et d'une membrure rigide CF. La membrure ABC est articulée en A où la rotation de la section est permise uniquement autour de l'axe  $z$ . La poutre DEF stabilise la membrure ABC dans le plan  $x-y$ . Les joints C, D, E et F sont des rotules. La poutre DEF a une section rectangulaire (fig.b) et la membrure ABC a une section W200 × 52 (fig. c). Les deux membrures sont faites d'un acier ( $E = 200\ 000$  MPa ;  $S_y = 300$  MPa).

La membrure ABC supporte une charge  $P$  appliquée au point C.

Déterminez la force de compression  $P_{cr}$  qui engendra l'instabilité en mode rigide de la membrure ABC dans le plan  $x-y$ .



**NOTE:** À l'aide du théorème de Castigliano, vous connaissez la relation suivante:

$$\delta = \frac{2Fl^3}{3EI}$$

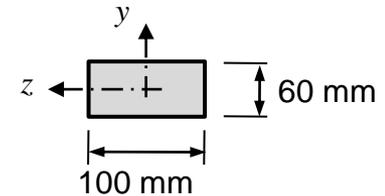
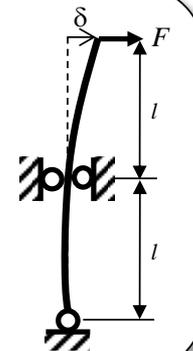


Fig. b) Section de la poutre DEF

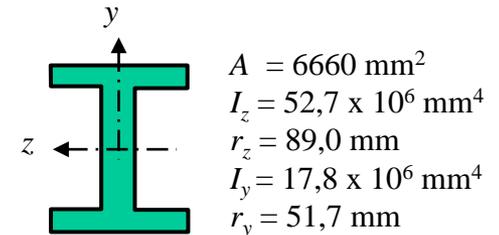


Fig. a) Membrures ABC et DEF et le chargement

Fig. c) Propriétés géométriques de la membrure de type W200 x 52

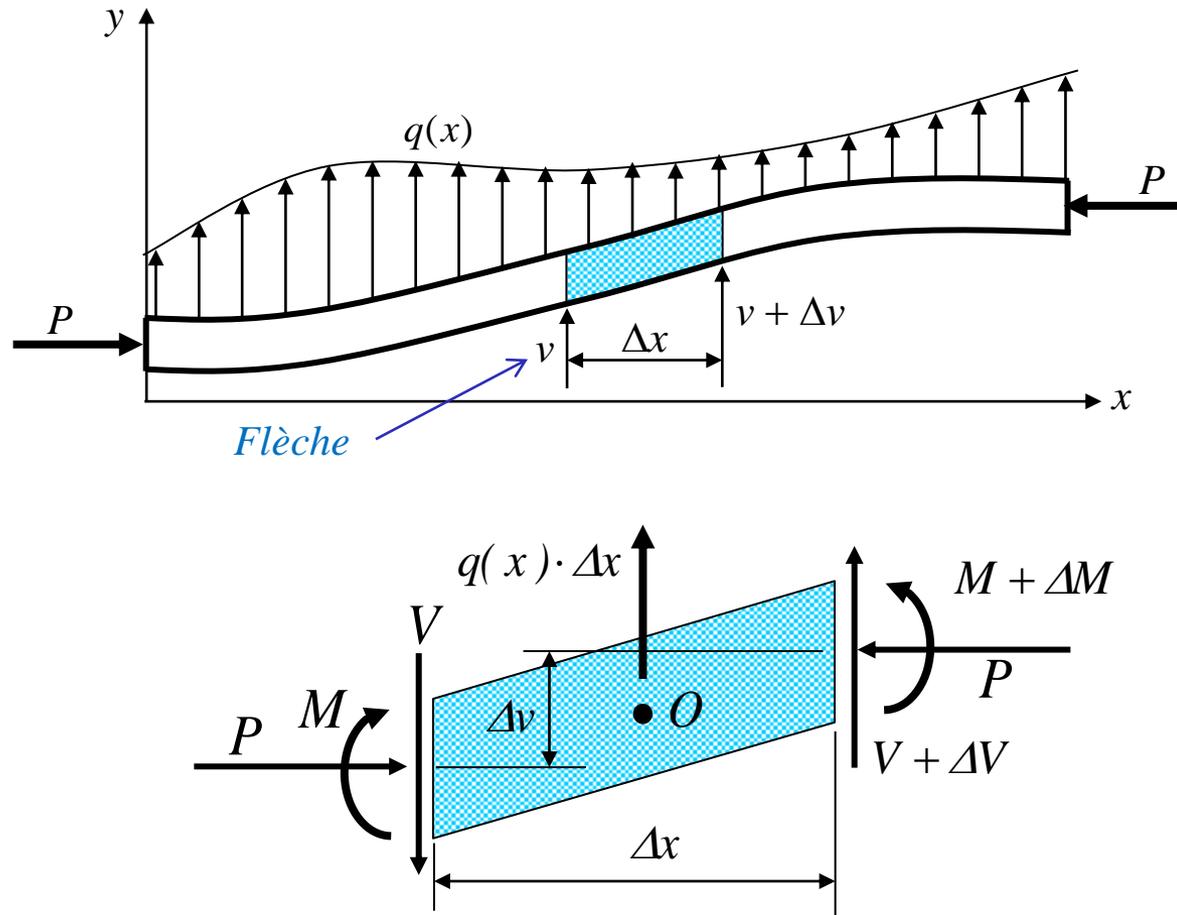
### 3.3 Stabilité d'une membrure élastique en compression (colonne)

- **Objectifs**

- Comprendre le développement mathématique de l'équation différentielle d'une membrure élastique (colonne)
- Démontrer les expressions de la charge critique  $P_{cr}$  en fonction des conditions limites d'une membrure élastique
- Calculer la charge critique à l'aide de la formule généralisée d'Euler

### 3.3 Stabilité d'une membrure élastique en compression (colonne)

Démonstration de l'équation différentielle d'une colonne

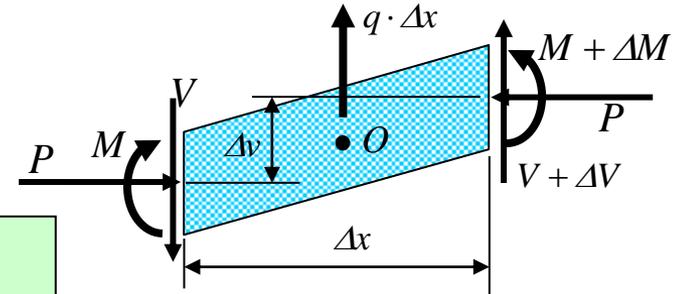


### 3.3 Stabilité d'une membrure élastique en compression (colonne)

$$\sum F_y = -V + (V + \Delta V) + q(x) \cdot \Delta x = 0$$

si  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \quad (1)$$



$$\sum M_O = -M + (M + \Delta M) + V \frac{\Delta x}{2} + (V + \Delta V) \frac{\Delta x}{2} + P \cdot \Delta v = 0$$

En divisant partout par  $\Delta x$  et en négligeant les termes du second ordre, on obtient, si  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{dM}{dx} + V + P \frac{dv}{dx} = 0 \quad (2)$$

### 3.3 Stabilité d'une membrure élastique en compression (colonne)

En dérivant (2) par rapport à  $x$  :

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{dV}{dx} + P \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad (2a)$$

On sait que:  $M = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3)$

En remplaçant (3) et (1) dans (2a):

$EI$  est constant  
le long de  $x$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} + P \frac{d^2v}{dx^2} = q(x) \quad (4)$$

Équation d'une poutre -colonne

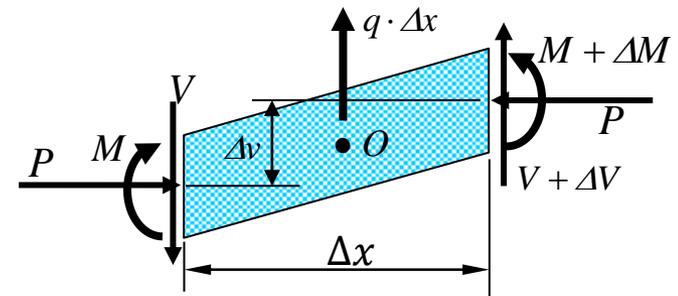
*Flexion et compression*

Si  $q(x) = 0$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} + P \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad (4)$$

Équation d'une colonne élastique

*Compression seulement*



### 3.3 Stabilité d'une membrure élastique en compression (colonne)

La solution générale de  
est de la forme :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (4)$$

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(n \cdot x) + C_4 \cos(n \cdot x) \quad (5)$$

où  $n^2 = P/EI$

$C_i$  : constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux rives. Il faut connaître au moins quatre de ces conditions. Les quatre conditions seront:

- le déplacement latéral  $v$
- la pente  $\varphi = dv/dx$
- le moment fléchissant  $M$
- l'effort tranchant  $V$

### 3.3 Stabilité d'une membrure élastique en compression (colonne)

Les quatre conditions sont

1. Déplacement latéral  $v$

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3 \sin(nx) + C_4 \cos(nx) \quad (5)$$

2. Pente  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = C_2 + C_3n \cos(nx) - C_4n \sin(nx) \quad (6)$$

3. Moment fléchissant  $M$

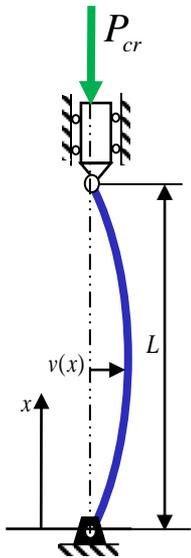
$$\frac{M(x)}{E \cdot I} = \frac{d^2v}{dx^2} = -C_3n^2 \sin(nx) - C_4n^2 \cos(nx) \quad (7)$$

4. Effort tranchant  $V$

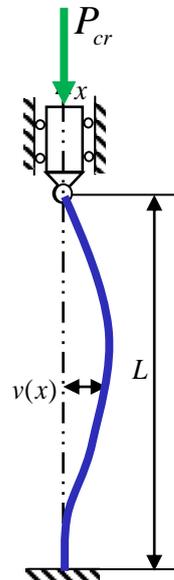
$$\frac{V(x)}{E \cdot I} = -C_2n^2 \quad (\text{obtenu de 2}) \quad (8)$$

### 3.3 Stabilité d'une membrure élastique en compression (colonne)

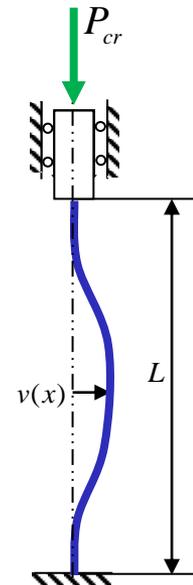
- Démontrer les valeurs de  $P$  qui rendent le système d'équations instables (lorsque  $v \rightarrow \infty$ ) pour différentes conditions limites d'une colonne élastique



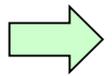
*Colonne rotule-rotule,  
déplacement latéral bloqué  
(référence)*



*Colonne encastrée-rotule,  
déplacement latéral bloqué*



*Colonne encastrée-encastrée,  
déplacement latéral bloqué*



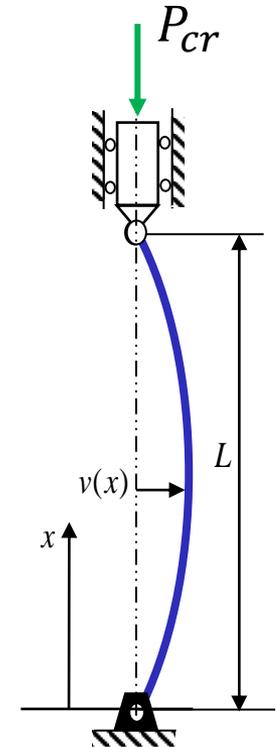
*Et autres...*

## Colonne *rotule-rotule*, déplacement latéral bloqué

$$\begin{aligned}
 v(x) &= C_1 + C_2 x + C_3 \sin(n \cdot x) + C_4 \cos(n \cdot x) \\
 \varphi(x) &= C_2 + C_3 \cdot n \cdot \cos(n \cdot x) - C_4 \cdot n \cdot \sin(n \cdot x) \\
 \frac{M(x)}{EI} &= -C_3 \cdot n^2 \cdot \sin(n \cdot x) - C_4 \cdot n^2 \cdot \cos(n \cdot x) \\
 \frac{V(x)}{EI} &= -C_2 \cdot n^2
 \end{aligned}$$

} Rappel

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$



### Conditions limites

À  $x = 0$  :

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_4 = 0 \quad (a)$$

$$M(0)/EI = 0 \Rightarrow -C_4 \cdot n^2 = 0 \quad (b)$$

À  $x = L$  :

$$v(L) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 \cdot L + C_3 \cdot \sin(n \cdot L) + C_4 \cdot \cos(n \cdot L) = 0 \quad (c)$$

$$M(L)/EI = 0 \Rightarrow -C_3 \cdot n^2 \sin(n \cdot L) - C_4 \cdot n^2 \cos(n \cdot L) = 0 \quad (d)$$

## Systemes aux valeurs propres de 4 équations à 4 inconnues

$$v(0) = C_1 + C_4 = 0 \quad (a)$$

$$M(0)/E I = -C_4 \cdot n^2 = 0 \quad (b)$$

$$v(L) = C_1 + C_2 \cdot L + C_3 \cdot \sin(n \cdot L) + C_4 \cdot \cos(n \cdot L) = 0 \quad (c)$$

$$M(L)/E I = -C_3 \cdot n^2 \sin(n \cdot L) - C_4 \cdot n^2 \cos(n \cdot L) = 0 \quad (d)$$

- Il y a deux solutions possibles
- **Solution 1**
  - La solution triviale  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$
  - Cette solution ne permet pas d'obtenir  $P_{cr}$

## Systemes aux valeurs propres de 4 équations à 4 inconnues

$$v(0) = C_1 + C_4 = 0 \quad (a)$$

$$M(0)/EI = -C_4 \cdot n^2 = 0 \quad (b)$$

$$v(L) = C_1 + C_2 \cdot L + C_3 \cdot \sin(n \cdot L) + C_4 \cdot \cos(n \cdot L) = 0 \quad (c)$$

$$M(L)/EI = -C_3 \cdot n^2 \sin(n \cdot L) - C_4 \cdot n^2 \cos(n \cdot L) = 0 \quad (d)$$

- **Solution 2** Les éq. a) et b)  $\Rightarrow C_4 = C_1 = 0$

$$\text{l'éq. d) } \Rightarrow C_3 \sin(n \cdot L) = 0 \quad \text{car } n = \sqrt{\frac{P}{EI}} \neq 0$$

$$\text{l'éq. c) } \Rightarrow C_2 = 0$$

- À  $P = P_{cr}$ , le système est en état d'équilibre neutre et la flèche a une valeur quelconque
- La valeur de  $C_3$  est donc arbitraire, mais non -nulle.

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0 \quad \text{et} \quad C_3 \neq 0$$

## Systemes aux valeurs propres de 4 équations à 4 inconnues

$$v(0) = C_1 + C_4 = 0 \quad (a)$$

$$\frac{M(0)}{E} I = -C_4 \cdot n^2 = 0 \quad (b)$$

$$v(L) = C_1 + C_2 \cdot L + C_3 \cdot \sin(n \cdot L) + C_4 \cdot \cos(n \cdot L) = 0 \quad (c)$$

$$M(L)/E I = -C_3 \cdot n^2 \sin(n \cdot L) - C_4 \cdot n^2 \cos(n \cdot L) = 0 \quad (d)$$

- **Solution 2 (suite)**  $C_1 = 0$  ;  $C_2 = 0$  ;  $C_3 \sin(n \cdot L) = 0$  ;  $C_4 = 0$ 
  - Puisque  $C_3 \neq 0$ ,  $\Rightarrow \sin(n \cdot L) = 0$ , ou  $n \cdot L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, N\pi$

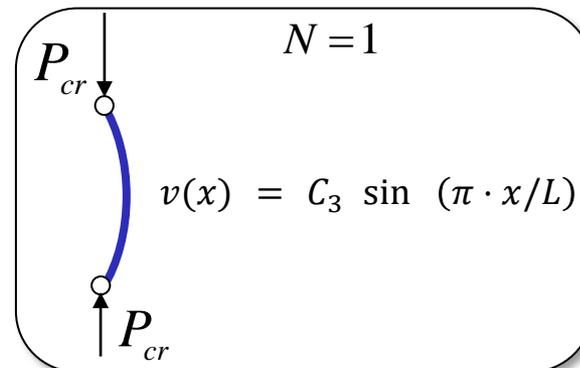
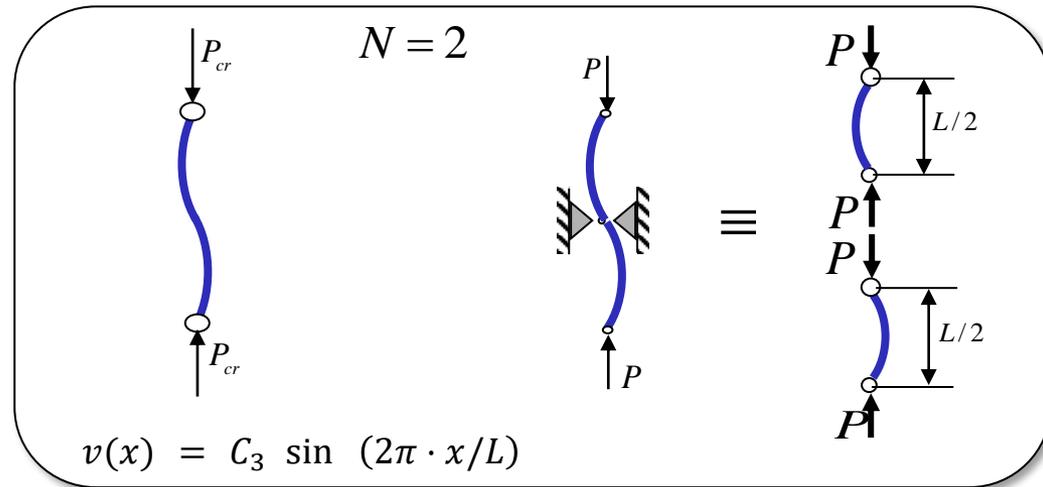
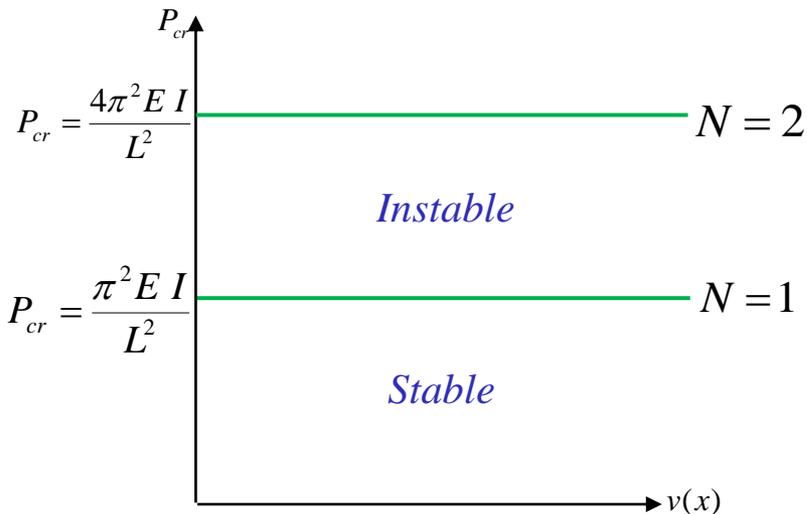
– D'où :

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{N\pi}{L} \Rightarrow P_{cr} = \frac{(N\pi)^2 EI}{L^2}$$

*Pour trouver  $P_{cr}$  seulement, il est plus simple de solutionner le système aux valeurs propres en écrivant les équations sous forme matricielle*

# Interprétation physique des solutions

Colonne *rotule-rotule*, déplacement latéral bloqué



## Colonne rotule-rotule, déplacement latéral bloqué

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(n \cdot x) + C_4 \cos(n \cdot x)$$

$$\varphi(x) = C_2 + C_3 \cdot n \cdot \cos(n \cdot x) - C_4 \cdot n \cdot \sin(n \cdot x)$$

$$\frac{M(x)}{EI} = -C_3 \cdot n^2 \cdot \sin(n \cdot x) - C_4 \cdot n^2 \cdot \cos(n \cdot x)$$

$$\frac{V(x)}{EI} = -C_2 \cdot n^2$$

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Rappel

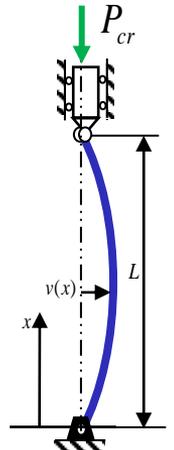


Figure 3.1

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ M(0)/EI \\ v(L) \\ M(L)/EI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -n^2 \\ 1 & L & \sin(nL) & \cos(nL) \\ 0 & 0 & -n^2 \sin(nL) & -n^2 \cos(nL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

### Colonne *rotule-rotule*, déplacement latéral bloqué

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ M(0)/EI \\ v(L) \\ M(L)/EI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -n^2 \\ 1 & L & \sin(nL) & \cos(nL) \\ 0 & 0 & -n^2 \sin(nL) & -n^2 \cos(nL) \end{pmatrix}}_{|A|} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

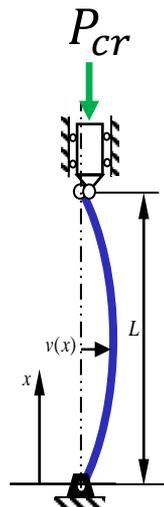


Figure 3.1

$$|A| = 0 = -n^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & \sin(nL) \\ 0 & 0 & -n^2 \sin(nL) \end{vmatrix} = -n^2 \begin{vmatrix} L & \sin(nL) \\ 0 & -n^2 \sin(nL) \end{vmatrix}$$

$$-n^2 \cdot L \cdot (-n^2) \sin(nL) = n^4 L \cdot \sin(nL) = 0 \Rightarrow \sin(nL) = 0$$

$$nL = \pi, 2\pi, \dots, N\pi$$

$$n^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \frac{P_{cr}}{EI} \Rightarrow$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

## Colonne *encastrée-rotule*, déplacement latéral bloqué

$$v(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \sin(n \cdot x) + C_4 \cdot \cos(n \cdot x) \quad (a)$$

$$\frac{M(x)}{EI} = -C_3 \cdot n^2 \cdot \sin(n \cdot x) - C_4 \cdot n^2 \cdot \cos(n \cdot x) \quad (b)$$

$$\phi(x) = C_2 + C_3 \cdot n \cdot \cos(n \cdot x) - C_4 \cdot n \cdot \sin(n \cdot x) \quad (c)$$

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

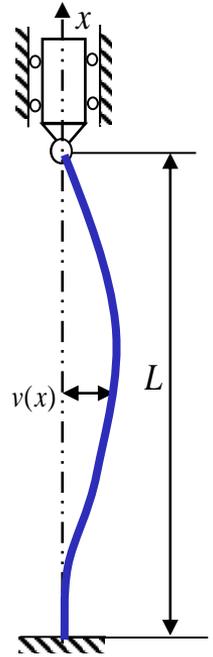


Figure 3.2

### Conditions limites

À  $x=0$  :  $v(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_4 = 0$

$\phi(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_3 n = 0$

À  $x=L$  :  $v(L) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 \sin(nL) + C_4 \cos(nL) = 0$

$M(L)/EI = 0 \Rightarrow C_3 n^2 \sin(nL) + C_4 n^2 \cos(nL) = 0$

### Colonne *encastrée-rotule*, déplacement latéral bloqué

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_4 = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_3 n = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 \sin(nL) + C_4 \cos(nL) = 0$$

$$M(L)/EI = 0 \Rightarrow C_3 n^2 \sin(nL) + C_4 n^2 \cos(nL) = 0$$

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

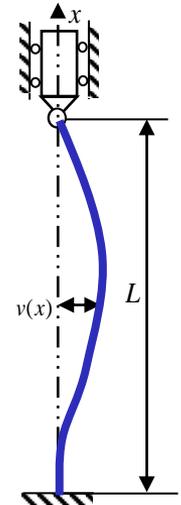


Figure 3.2

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ \phi(0) \\ v(L) \\ \frac{M(L)}{EI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 1 & L & \sin(nL) & \cos(nL) \\ 0 & 0 & n^2 \sin(nL) & n^2 \cos(nL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Colonne *encastrée-rotule*, déplacement latéral bloqué

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 1 & L & \sin(nL) & \cos(nL) \\ 0 & 0 & n^2 \sin(nL) & n^2 \cos(nL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

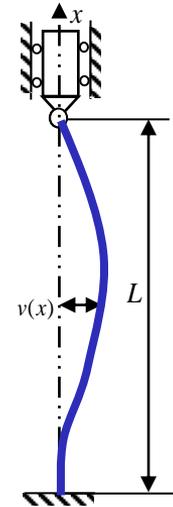


Figure 3.2

Solution triviale :  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0 \Rightarrow v(x) = 0$

Autre solution :  $\det = 0 = n^3 L \cos(nL) - n^2 \sin(nL)$   
 $\Rightarrow \operatorname{tg}(nL) = nL$

## Colonne *encastrée-rotule*, déplacement latéral bloqué

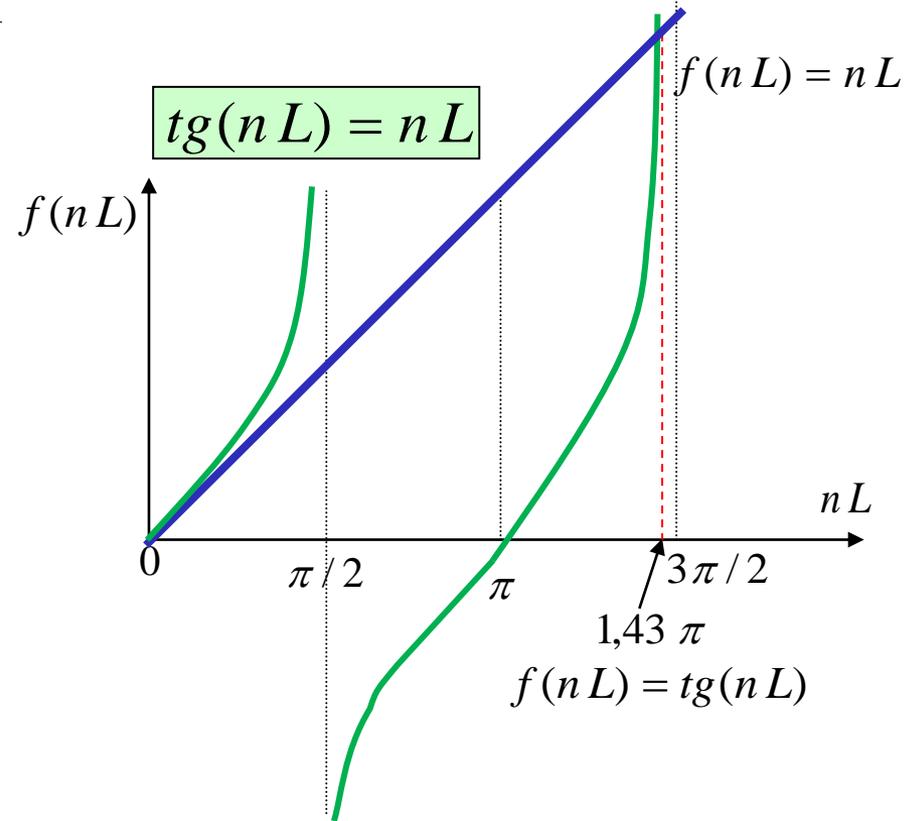
### Solution (suite)

Ceci est ce que l'on appelle une équation *transcendante*. Les méthodes de solution d'une telle équation sont la méthode *graphique* ou la méthode *itérative*

$$\left. \begin{aligned} nL &= 1,43\pi \\ n &= \sqrt{\frac{P}{EI}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1,43\pi)^2 = L^2 \left( \frac{P_{cr}}{EI} \right)$$

d'où :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2}$$



## Colonne encastrée-encastrée, déplacement latéral permis à $x = L$

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(n \cdot x) + C_4 \cos(n \cdot x)$$

$$\phi(x) = C_2 + C_3 \cdot n \cdot \cos(n \cdot x) - C_4 \cdot n \cdot \sin(n \cdot x)$$

$$M(x)/EI = -C_3 \cdot n^2 \cdot \sin(n \cdot x) - C_4 \cdot n^2 \cdot \cos(n \cdot x)$$

$$V(x)/EI = -C_2 \cdot n^2$$

### Conditions aux rives

$$\text{À } x=0 : v(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_4 = 0$$

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_3 n = 0$$

$$\text{À } x=L : V(L)/EI = 0 \Rightarrow -C_2 n^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \phi(L) = 0 &\Rightarrow C_2 + C_3 n \cos(nL) - C_4 n \sin(nL) \\ &= 0 \end{aligned}$$

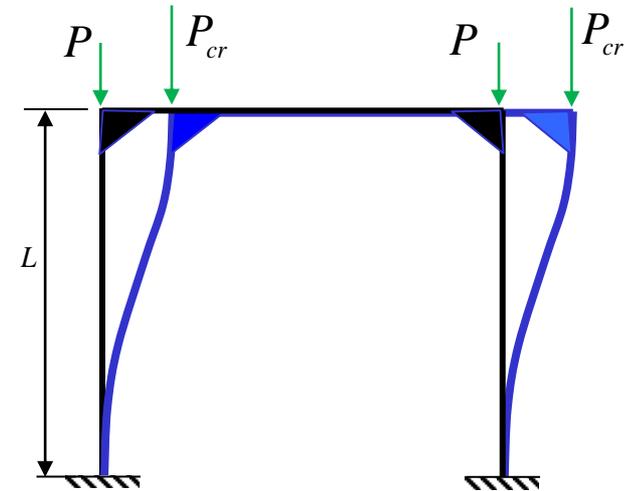


Figure 3.3

### Colonne encastree-encastree, déplacement latéral permis à $x = L$

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ \phi(0) \\ \frac{V(L)}{EI} \\ \phi(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & -n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \cos(nL) & -n \sin(nL) \end{pmatrix}}_{|A|} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 = 1 \begin{vmatrix} 1 & n & 0 \\ -n^2 & 0 & 0 \\ 1 & n \cos(nL) & -n \sin(nL) \end{vmatrix} = n^2 \begin{vmatrix} n & 0 \\ n \cos(nL) & -n \sin(nL) \end{vmatrix}$$

$$n^2 \cdot (-n^2) \cdot \sin(nL) = 0 \Rightarrow \sin(nL) = 0$$

$$nL = \pi, 2\pi, \dots, N\pi \quad n^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \frac{P_{cr}}{EI} \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

*Colonne encastree-encastree, déplacement latéral bloqué à  $x=L$*

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ v(L) \\ \varphi(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 1 & L & \sin(nL) & \cos(nL) \\ 0 & 1 & n \cos(nL) & -n \sin(nL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

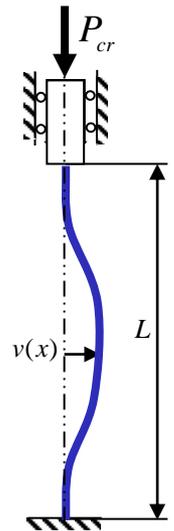


Figure 3.4

$$|A| = 0 = 1 \begin{vmatrix} 1 & n & 0 \\ L & \sin(nL) & \cos(nL) \\ 1 & n \cos(nL) & -n \sin(nL) \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & n \\ 1 & L & \sin(nL) \\ 0 & 1 & n \cos(nL) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow nL \sin(nL) + 2 \cos(nL) - 2 = 0$$

### Colonne encastree-encastree, déplacement latéral bloqué à $x=L$

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ v(L) \\ \varphi(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 1 & L & \sin(nL) & \cos(nL) \\ 0 & 1 & n \cos(nL) & -n \sin(nL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

$$nL \sin(nL) + 2 \cos(nL) - 2 = 0$$

Équation à résoudre avec méthode numérique

**Solution**  $n = \frac{2\pi N}{L}$  où  $N = 1, 2, \dots$

Avec:  $N = 1 \Rightarrow n^2 = \frac{P_{cr}}{EI} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5L)^2}$$

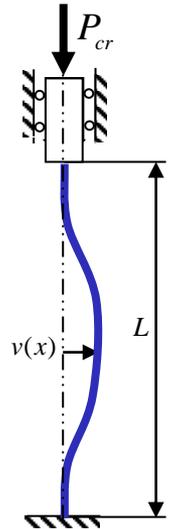


Figure 3.4

## 3.4 Formule d'Euler

On appelle la formule :

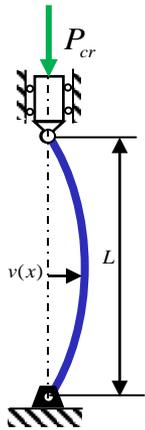
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

la formule d'*Euler*, mathématicien Suisse qui a développé le premier cette formule. Depuis, la formule d'*Euler* a été généralisée sous la forme:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

dans laquelle on appelle le facteur  $(KL)$  la *longueur équivalente*.

*KL* est la longueur de la colonne d'*Euler* (rotule-rotule) qui a la même rigidité que celle considérée



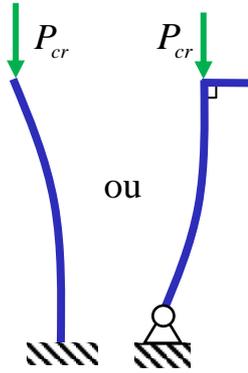
$$K = 1,0$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Figure 3.1

Rotule-rotule

Déplacement  
latéral bloqué

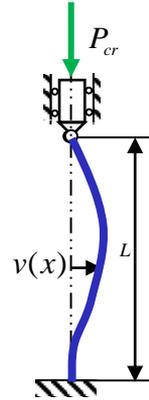


$$K = 2,0$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2 L)^2}$$

Figure 3.5 et 3.6

Encastré-libre  
ou encastré-rotule  
Déplacement  
latéral permis



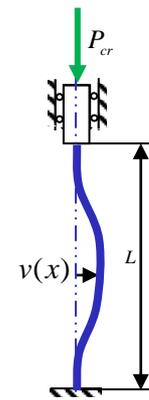
$$K = 0,7$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2}$$

Figure 3.2

Encastré-rotule

Déplacement  
latéral bloqué



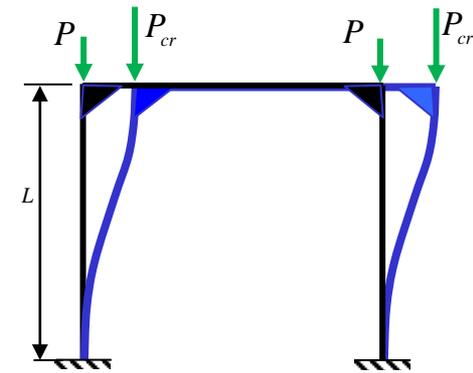
$$K = 0,5$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5 L)^2}$$

Figure 3.4

Encastré-encastré

Déplacement  
latéral bloqué



$$K = 1,0$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Figure 3.3

Encastré-encastré

Déplacement  
latéral permis

# Stabilité d'une membrure élastique (exercice 2)

La figure a) illustre en isométrie un système est composé d'une membrure ABC ( $L = 4$  m), d'une poutre DEF ( $L = 4$  m) et d'une membrure rigide CF. La membrure ABC est articulée en A où la rotation de la section est permise uniquement autour de l'axe  $z$ . La poutre DEF stabilise la membrure ABC dans le plan  $x$ - $y$ . Les joints C, D, E et F sont des rotules. La poutre DEF a une section rectangulaire (fig.b) et la membrure ABC a une section W200 × 52 (fig. c). Les deux membrures sont faites d'un acier ( $E = 200\ 000$  MPa ;  $S_y = 300$  MPa).

La membrure ABC supporte une charge  $P$  appliquée au point C.

Déterminez la force de compression théorique  $P_{cr}$  qui engendra le flambement de la membrure élastique ABC.

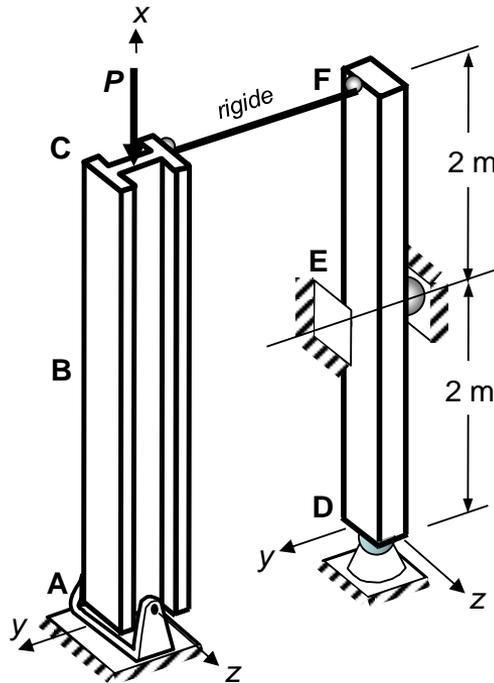


Fig. a) Membrures ABC et DEF et le chargement

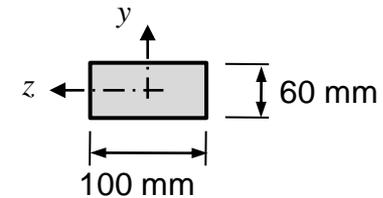


Fig. b) Section de la poutre DEF

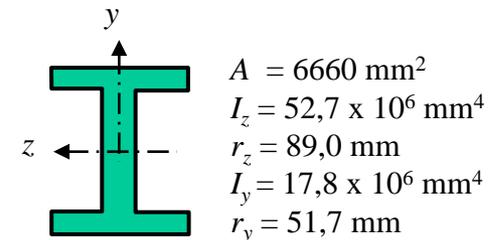


Fig. c) Propriétés géométriques de la membrure de type W200 x 52

### 3.4 Formule d'Euler

- On rencontre aussi la formule d'Euler exprimée sous la forme
  - où  $(KL/r)$  est appelé le facteur d'élanement
  - $r$  est le rayon de giration
    - où  $I$  est le second moment de surface de la section
    - $A$  est l'aire de cette section

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E A}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

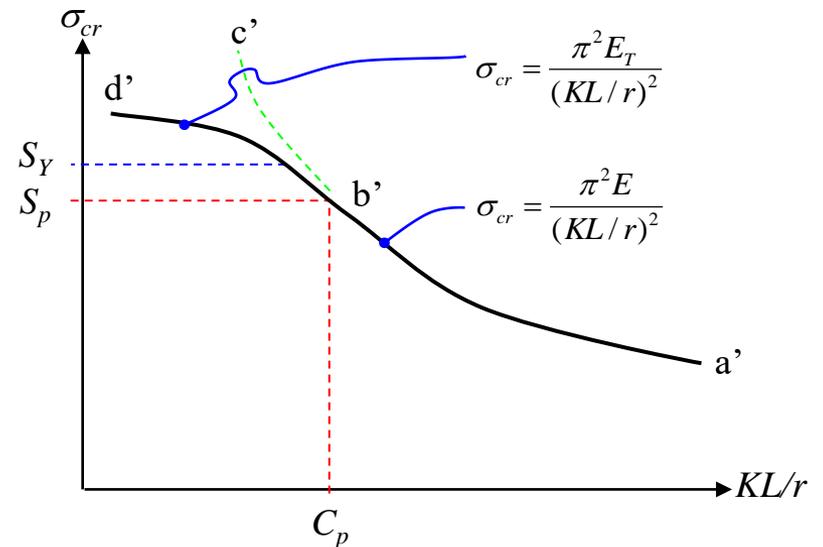
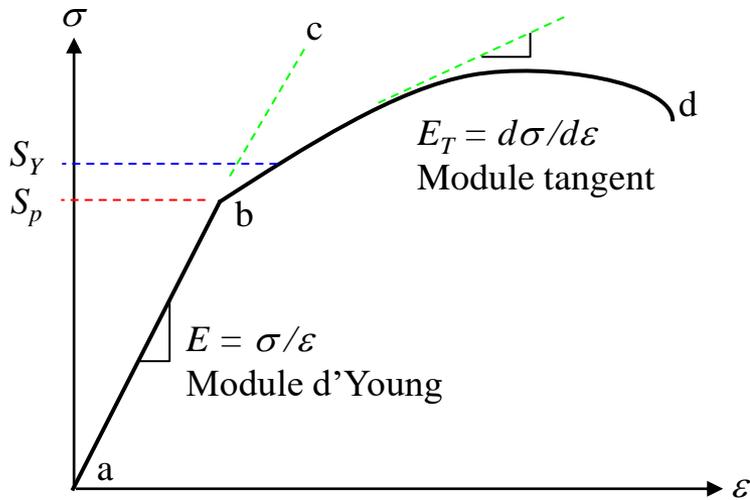
$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

- Pour faire la conception des pièces en compression, il faut considérer :
  - la stabilité de la pièce comme une colonne,  $P_{cr}$
  - la résistance du matériau dont est fabriquée la pièce,  $\sigma_{cr}$ 
    - La résistance fait intervenir la notion de contrainte  $\sigma_{cr}$

*Flambement*  $\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$

*Écoulement*  
(*chargement uniaxial seul.*)  $\sigma \leq S_Y$

# Limites d'application de la formule d'Euler



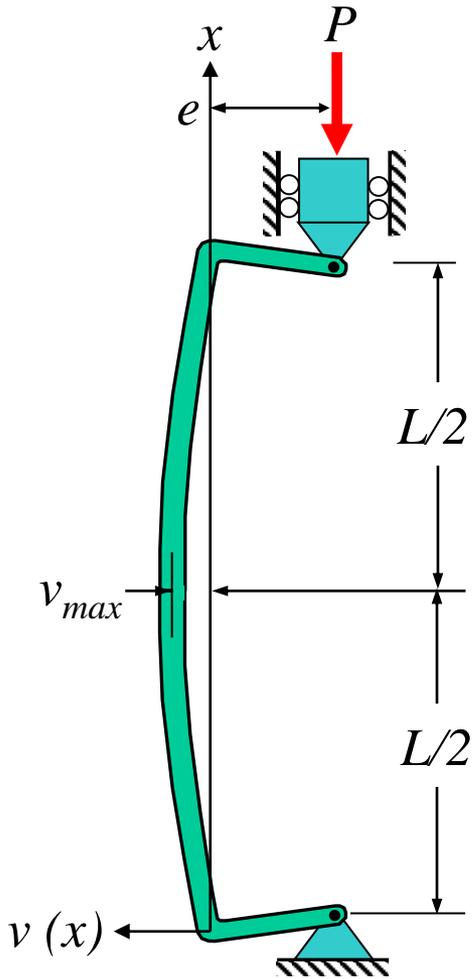
où  $S_p$  est la limite de proportionnalité (fin du régime linéaire)

en b' : 
$$\sigma_{cr} = S_p = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{C_p^2}$$

$$C_p = \left( \frac{KL}{r} \right)_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{S_p}}$$

Note: - la formule d'Euler est limitée au domaine élastique  
 - le plus petit **facteur** d'élancement possible est  $C_p$

### 3.5 Colonne rotule-rotule soumise à une charge excentrée



#### Conditions aux rives

$$v(L) = 0$$

$$M(L) = -Pe$$

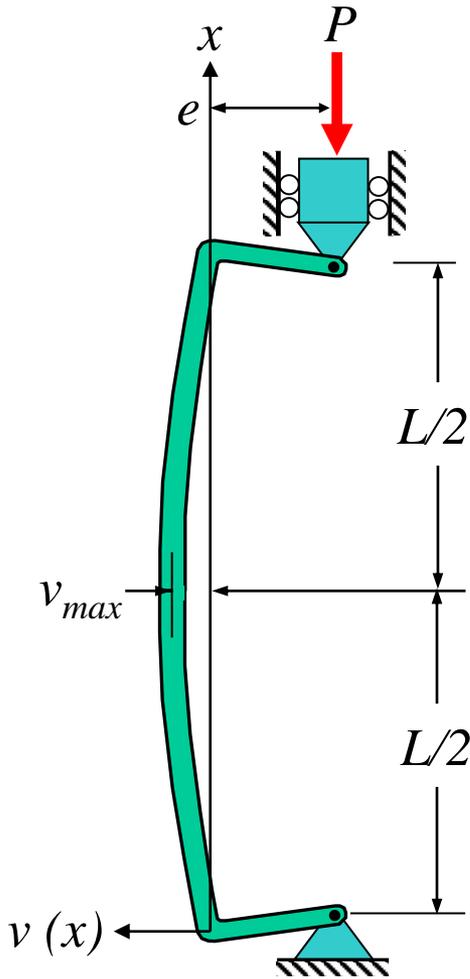
#### Notes:

- Ce n'est pas un système aux valeurs propres
- L'équilibre est fait sur la structure déformée
- Le système est instable lorsque  $v_{max} \rightarrow \infty$

$$v(0) = 0$$

$$M(0) = -Pe$$

### 3.5 Colonne rotule-rotule soumise à une charge excentrée



#### Équations générales

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(nx) + C_4 \cos(nx)$$

$$M(x) / EI = -C_3 n^2 \sin(nx) - C_4 n^2 \cos(nx)$$

#### Lorsque $x = 0$ et $x = L$

$$v(0) = C_1 + C_4 = 0$$

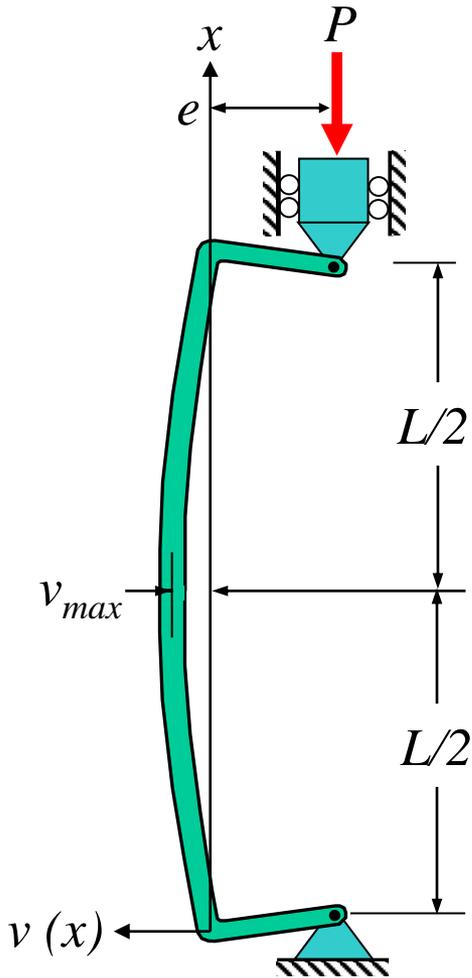
$$M(0) / EI = -C_4 n^2 = -eP / EI = -en^2$$

$$v(L) = C_1 + C_2 L + C_3 \sin(nL) + C_4 \cos(nL) = 0$$

$$M(L) / EI = -C_3 n^2 \sin(nL) - C_4 n^2 \cos(nL) = -en^2$$

Rappel:  $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

### 3.5 Colonne rotule-rotule soumise à une charge excentrée



#### Représentation matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -en^2 \\ 0 \\ -en^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -n^2 \\ 1 & L & \sin nL & \cos nL \\ 0 & 0 & -n^2 \sin nL & -n^2 \cos nL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

#### Solution

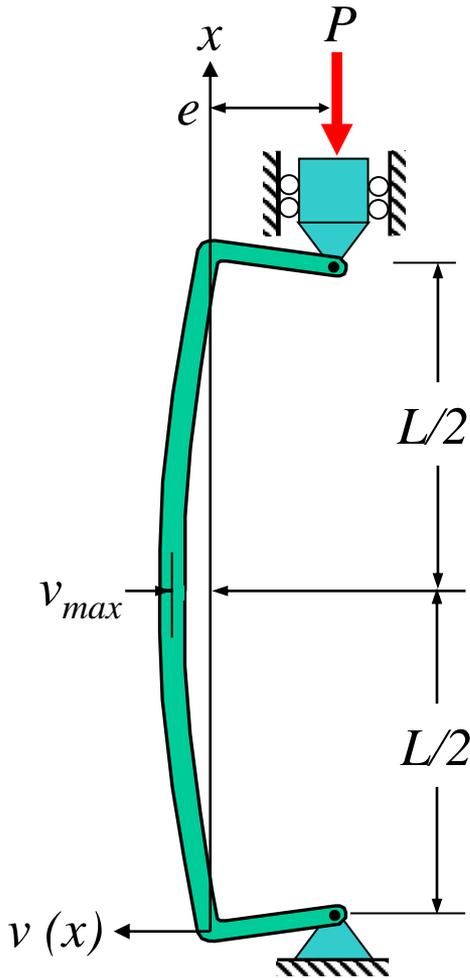
$$C_4 = e$$

$$C_1 = -e$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = e(1 - \cos nL) / \sin nL$$

### 3.5 Colonne rotule-rotule soumise à une charge excentrée



Expression de la flèche devient (*pas arbitraire*)

$$v(x) = e \left[ -1 + (1 - \cos nL) \frac{\sin nx}{\sin nL} + \cos nx \right]$$

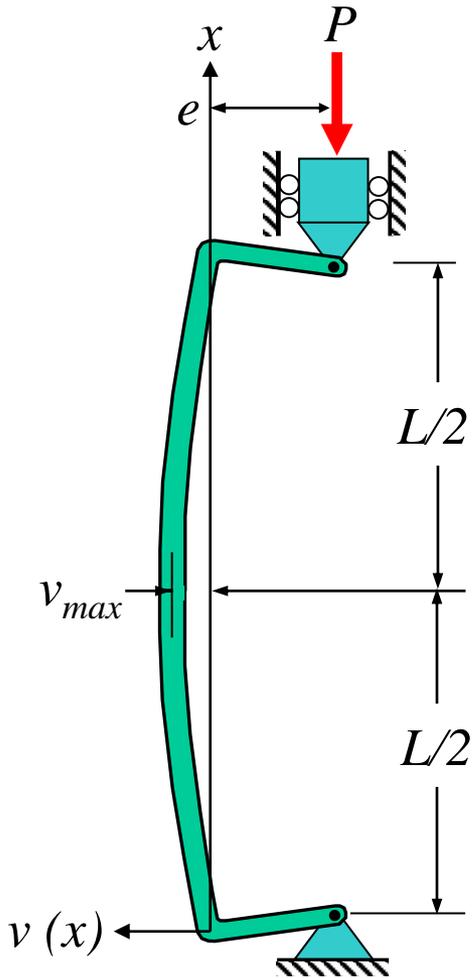
$$v(x) = \frac{e}{\sin nL} [\sin nx + \sin n(L - x) - \sin nL]$$

Flèche maximale à  $x = L / 2$

$$v_{\max} = e \left( \frac{2 \sin \frac{nL}{2}}{\sin nL} - 1 \right) = e \left( \sec \frac{nL}{2} - 1 \right)$$

Avec la propriété:  $\sin nL = 2 \sin(nL/2) \cos(nL/2)$   
 et:  $\sec(x) = 1/\cos(x)$

### 3.5 Colonne rotule-rotule soumise à une charge excentrée



**Flèche maximale**

$$v_{max} = e \left( \sec \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) - 1 \right)$$

Formule de la sécante

**Flèche devient instable ( $v_{max} \rightarrow \infty$ ) lorsque**

$$\cos(nL/2) = \cos(\pi/2)$$

donc,

$$\frac{L}{2} \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Force en compression qui rend le système instable

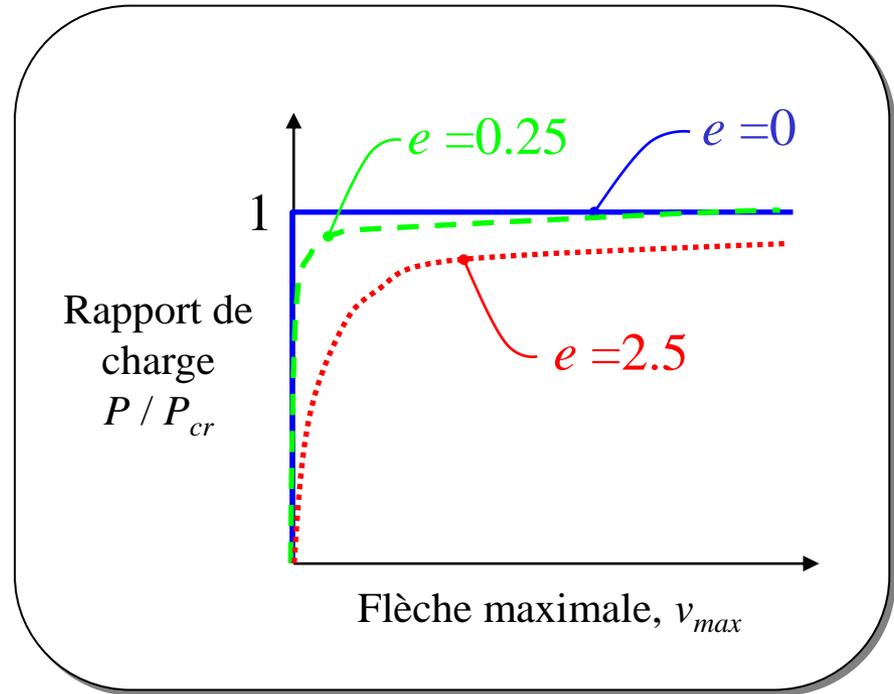
### 3.5 Colonne rotule-rotule soumise à une charge excentrée

Avec l'expression du  $P_{cr}$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow \frac{1}{EI} = \frac{1}{P_{cr}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2$$

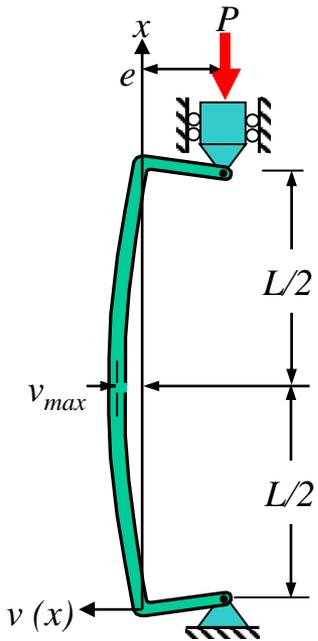
En remplaçant  $1/EI$  dans l'expression de la flèche maximale

$$v_{max} = e \left( \sec \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right)$$



# 3.5 Colonne rotule-rotule soumise à une charge excentrée

## Évaluation de la contrainte maximale dans la colonne



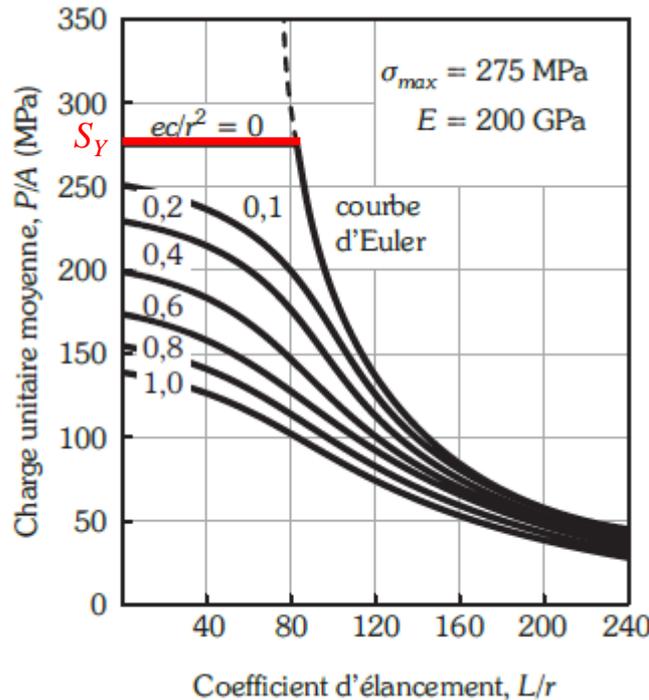
en compression

en flexion

bras de levier

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}c}{I} = \frac{P}{A} + \frac{P(e + v_{max})c}{Ar^2}$$

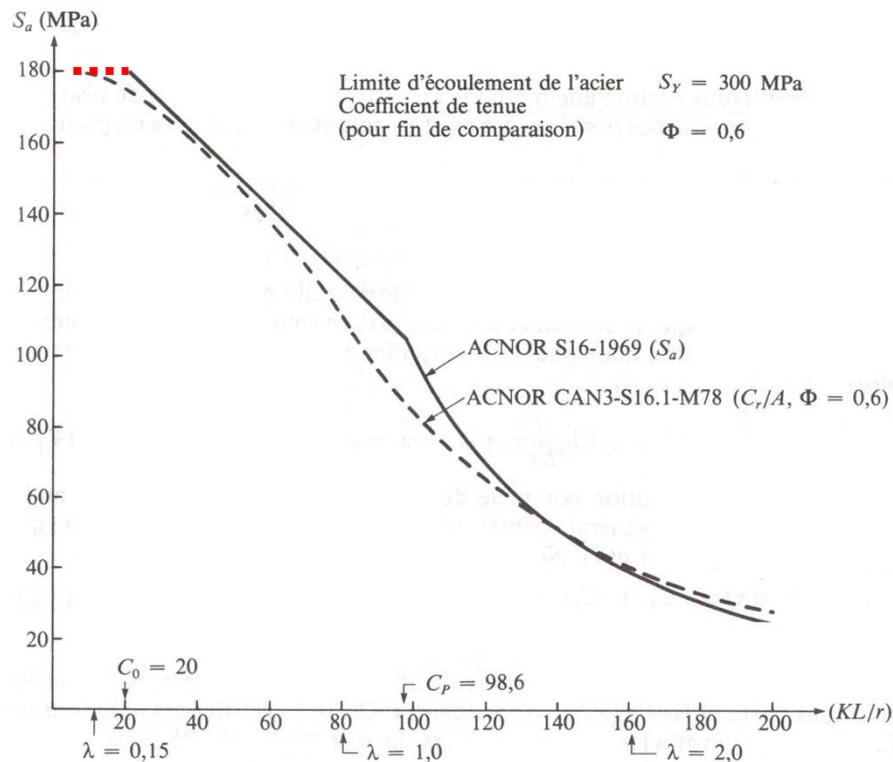
rayon de giration



Philosophie du code ACNOR

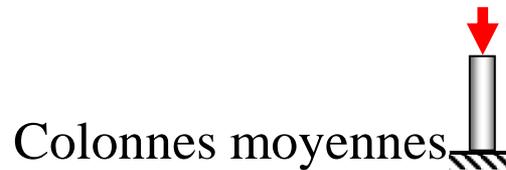
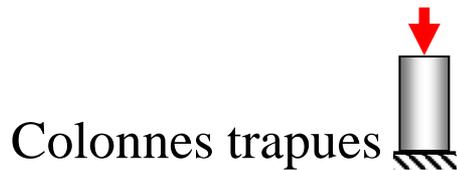
## 3.6 Conception d'une colonne

Code: **ACNOR S16-1969**, ACNOR S16.1-m78, **ACNOR S16.1-94**  
 (Association canadienne de normalisation)



# 3.6 Conception d'une colonne

Code: ACNOR S16-1969 = délimité en 3 régions



Facteur d'élancement

$$\frac{KL}{r} \leq C_o$$

$$C_o \leq \frac{KL}{r} \leq C_p$$

$$C_p \leq \frac{KL}{r}$$

Contrainte

$$S_a = 0,6S_Y$$

$$S_a = 0,6S_Y - m \left( \frac{KL}{r} - C_o \right)$$

$$S_a = \frac{\pi^2 E}{1,92 \left( \frac{KL}{r} \right)^2}$$

Vérifie l'écoulement

Similaire à Euler

Paramètres:

$$C_o = 30 - \frac{S_Y}{34,5}$$

$$C_p = \sqrt{\pi^2 \frac{E}{\underbrace{S_Y - 90}_{\sim S_p}}}$$

$$m = \frac{0,6S_Y - \frac{10^6}{C_p^2}}{C_p - C_o}$$

## 3.6 Conception d'une colonne

Code: ACNOR S16.1-M78 = délimité en 5 régions

Introduction d'un nouveau paramètre:  
(coefficient d'élançement normalisé)

$$\lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2 E}}$$

Déterminer la **résistance pondérée** ( $C_r$ ) d'une colonne

$$C_r = \phi A S_Y \quad \text{Vérifie l'écoulement} \quad (0 \leq \lambda \leq 0,15)$$

$$C_r = \phi A S_Y (1,035 - 0,202 \lambda - 0,22 \lambda^2) \quad (0,15 \leq \lambda \leq 1)$$

$$C_r = \phi A S_Y (-0,111 + 0,636 \lambda^{-1} + 0,087 \lambda^{-2}) \quad (1 \leq \lambda \leq 2)$$

$$C_r = \phi A S_Y (0,009 + 0,877 \lambda^{-2}) \quad (2 \leq \lambda \leq 3,6)$$

$$C_r = \phi A S_Y \lambda^{-2} \quad (3,6 \leq \lambda)$$

Similaire à Euler

où  $\phi$  est le coefficient d'efficacité (ex.  $\phi = 0,6$ )

## 3.6 Conception d'une colonne

- **Norme S-16.1-94 de l'ACNOR**
  - Conception d'une colonne en acier selon la méthode CAEL
    - CAEL: Calcul aux états limites (résistance et charge pondérées)
  - Résistance pondérée ( $C_r$ ) est donnée par la formule empirique:

$$C_r = \phi A S_Y (1 + \lambda^{2n})^{-1/n}$$

- $A$  = aire de la section de la colonne
- $S_Y$  = limite d'écoulement du matériau
- $n$  = paramètre qui dépend du procédé de fabrication du profilé
  - $n = 1,34$  pour profilés laminés à froid sans traitement de relaxation des contraintes résiduelles (plus défavorable)
  - $n = 2,24$  pour profilés avec traitement de relaxation des contraintes résiduelles
- $\phi$  = coefficient de tenue de la colonne (selon la variabilité statistique de la résistance des matériaux (ex. 0,9))

## 3.6 Conception d'une colonne

- **Norme S-16.1-94 de l'ACNOR**

- Design d'un élément structural en compression selon la méthode CAEL est acceptable si la charge pondérée est inférieure à la résistance pondérée

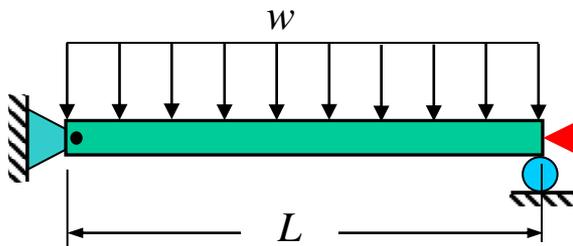
$$\underbrace{\alpha_D D + \gamma \psi (\alpha_L L + \alpha_W W + \alpha_T T)}_{\text{Charge pondérée}} \leq C_r \quad \text{Résistance pondérée}$$

- $D$  = charge permanente
- $L$  = **charge d'exploitation**
- $W$  = surcharge due au vent
- $T$  = surcharge due aux changements de température
- $\alpha_D, \alpha_L, \alpha_W, \alpha_T$  = facteurs de pondération des charges (ex.  $\alpha_L = 1,5$ )
- $\psi$  = coefficient de simultanéité des charges
- $\gamma$  = coefficient de risque

Dans notre cas:  $\alpha_L L \leq C_r$

## 3.7 Poutres-colonnes

### Structure chargée en compression et flexion



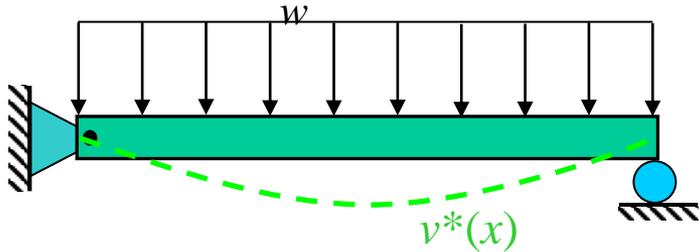
Équation fondamentale:  $EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = q(x)$

Solution de l'équation:  $v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin nx + C_4 \cos nx + v_p(x)$

- La solution exacte de l'équation différentielle ne sera pas discutée dans ce cours.
- Nous aborderons une **méthode de résolution approximative**.

# 3.7 Poutres-colonnes

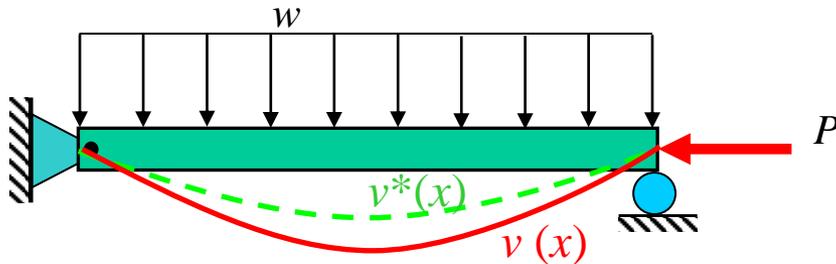
## Méthode de résolution approximative



*Flexion seulement*

$v^*(x)$ : flèche avec  $P = 0$

$M^*(x)$ : moment interne avec  $P = 0$



*Flexion et compression (amplification)*

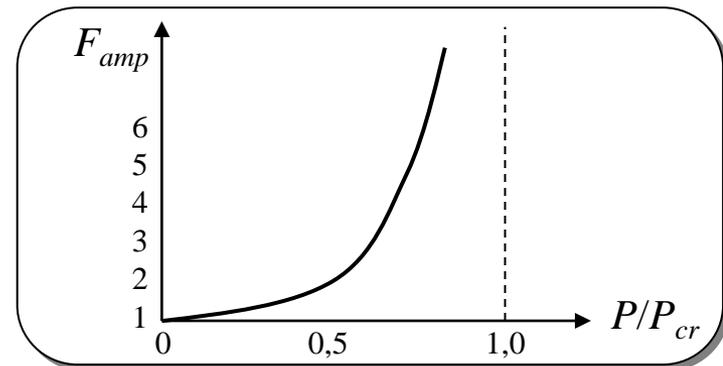
$v(x) = v^*(x)F_{amp}$

$M(x) = M^*(x)F_{amp}$

Facteur d'amplification:

$$F_{amp} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

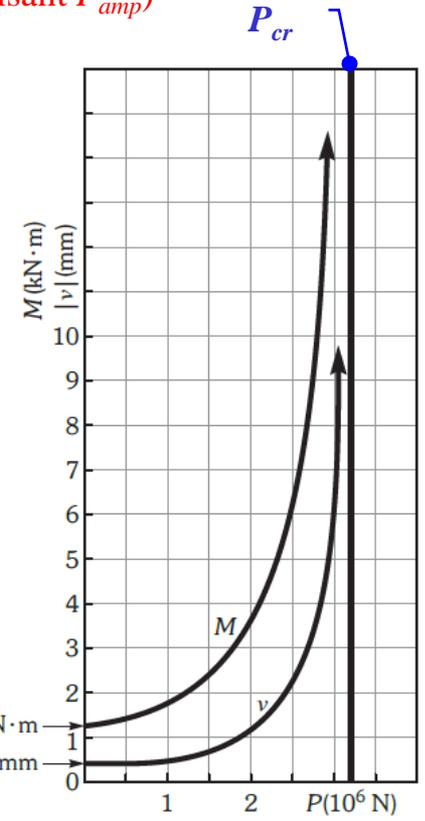
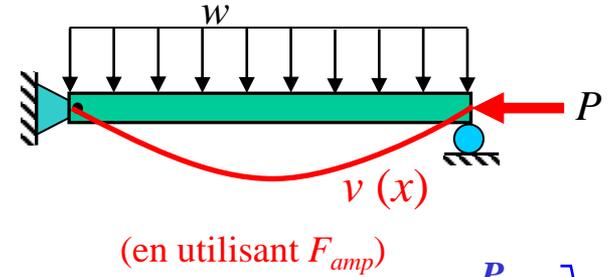
Charge critique (Euler)



# 3.7 Poutres-colonnes

## Méthode de résolution approximative :

Comparaison avec la solution exacte



		Exemple 11.3				
		Solution exacte (fig. 11.24b)			Solution approx.	
$P$ ( $10^6$ N)	$\frac{P}{P_{cr}}$	$F_{amp} = \frac{1}{1 - P/P_{cr}}$	$v$ (mm)	$M$ (N·m)	$v$ (mm)	$M$ (N·m)
0*	0	1,0	0,407	1 250	0,407	1 250
0,5	0,158	1,188	0,484	1 492	0,484	1 484
1,0	0,316	1,463	0,596	1 846	0,595	1 828
1,5	0,475	1,904	0,776	2 414	0,775	2 379
2,0	0,633	2,724	1,112	3 474	1,109	3 405
2,5	0,791	4,788	1,958	6 145	1,949	5 984
3,0	0,949	19,75	8,15	25 700	8,038	24 700
3,16 (= $P_{cr}$ )	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

$v$  et  $M$  à la mi-longueur

Flexion seulement

## 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

Flexion dans **2 plans** (selon le code ACNOR)

$$\frac{C}{C_r} + \frac{F_{amp/z} M_z}{M_{rz}} + \frac{F_{amp/y} M_y}{M_{ry}} \leq 1,0$$

- $C$ : charge axiale en compression sur la poutre-colonne
- $C_r$ : charge axiale maximale permise en compression lorsque toutes les autres charges sont nulles
- $M_z, M_y$ : moment de flexion maximal par rapport à  $z$  ou  $y$ , respectivement
- $M_{rz}, M_{ry}$ : moment de flexion maximal à l'écoulement permis par rapport à  $z$  ou  $y$ , lorsque toutes les autres charges sont nulles;  $(M_Y)_y$  ou  $(M_Y)_z$
- $F_{amp/z}, F_{amp/y}$ : facteurs d'amplification des moments de flexion par rapport à  $z$  ou  $y$ , respectivement

# 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

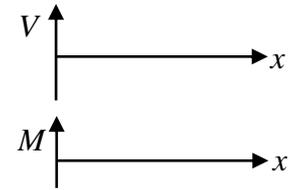
Flexion dans **2 plans** (selon le code ACNOR)

$C = \alpha \cdot P$ 

$$F_{amp/z,y} = \frac{1}{1 - \frac{C}{P_{cr}}}$$
Formule d'Euler

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{z,y}}{(KL)^2}$$

$\alpha$ : Facteur de pondération à appliquer sur toutes les charges



Identifier les max à partir des diagrammes V et M

$M_{z,y} = \alpha \cdot M_{zmax,ymax}$

$$\frac{C}{C_r} + \frac{F_{amp/z} M_z}{M_{rz}} + \frac{F_{amp/y} M_y}{M_{ry}} \leq 1,0$$

Moments de flexion au début de l'écoulement

$M_{rz,y} = \phi \cdot S_{z,y} \cdot S_Y$

$C_r = \phi AS_Y (1 + \lambda^{2n})^{-1/n}$

Flexion 2 plans: prendre le  $C_r$  le plus critique

Flexion 2 plans: utiliser  $\lambda$  le plus grand

$$\lambda = \frac{KL}{r_{z,y}} \sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2 E}}$$

$$r_{z,y} = \sqrt{\frac{I_{z,y}}{A}}$$

$$S_{z,y} = \frac{I_{z,y}}{c}$$

## 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

Flexion dans **1 plan** (selon le code ACNOR)

- (1) Plan en compression uniquement

$$\frac{C}{C_r} \leq 1,0$$

← Calculé avec le  $\lambda$  de ce plan

- (2) Plan en flexion et compression

$$\frac{C}{C_{ri}} + \frac{F_{amp/i} M_i}{M_{ri}} \leq 1,0$$

Où  $i = z$  ou  $y$

## 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné (exercice 3)

- **Problème:** flexion dans 2 plans
  - **QUESTION:** Vérifier si le cadre a une capacité suffisante pour résister au chargement externe illustrée
    - Structure d'acier ( $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $S_Y = 350 \text{ MPa}$ )
    - Pondération de charge,  $\alpha = 1,5$
    - Coefficient de tenue,  $\phi = 0,9$
    - Acier laminé à froid ( $n = 1,34$ )
    - Propriétés de la section
      - $I_y = 6,35 \times 10^6 \text{ mm}^4$  ;  $S_y = 125 \times 10^3 \text{ mm}^3$
      - $I_z = 18,8 \times 10^6 \text{ mm}^4$  ;  $S_z = 185 \times 10^3 \text{ mm}^3$
      - $A = 3610 \text{ mm}^2$

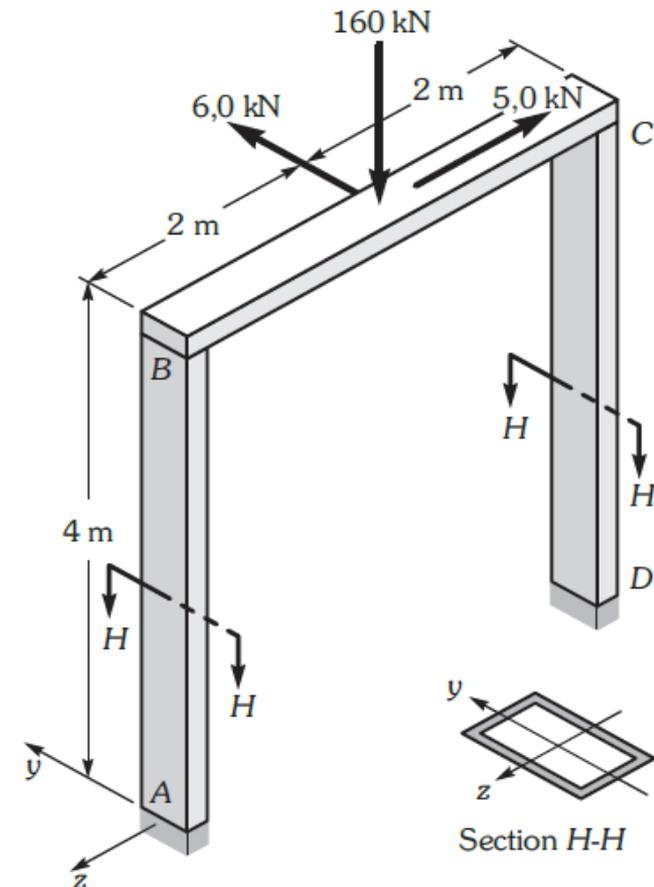
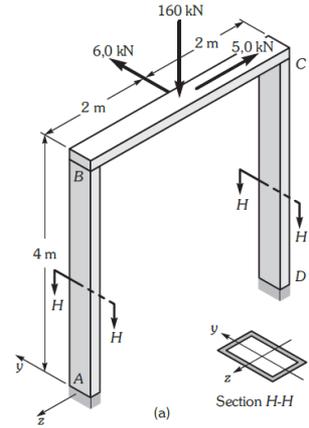


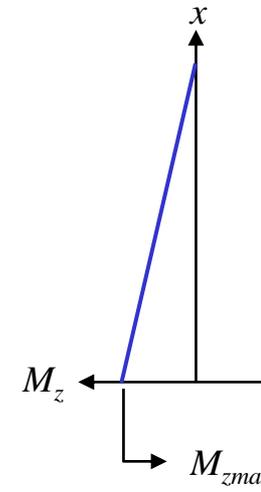
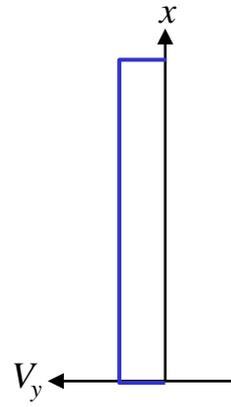
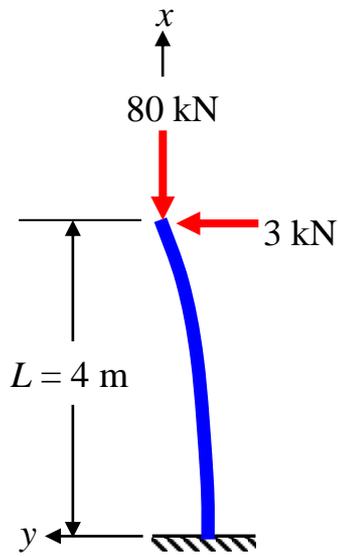
Figure de l'exemple 11.7

# 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

- Solution
  - Identifier s'il y a flexion dans 1 ou 2 plans (diagramme  $V$  et  $M$ )

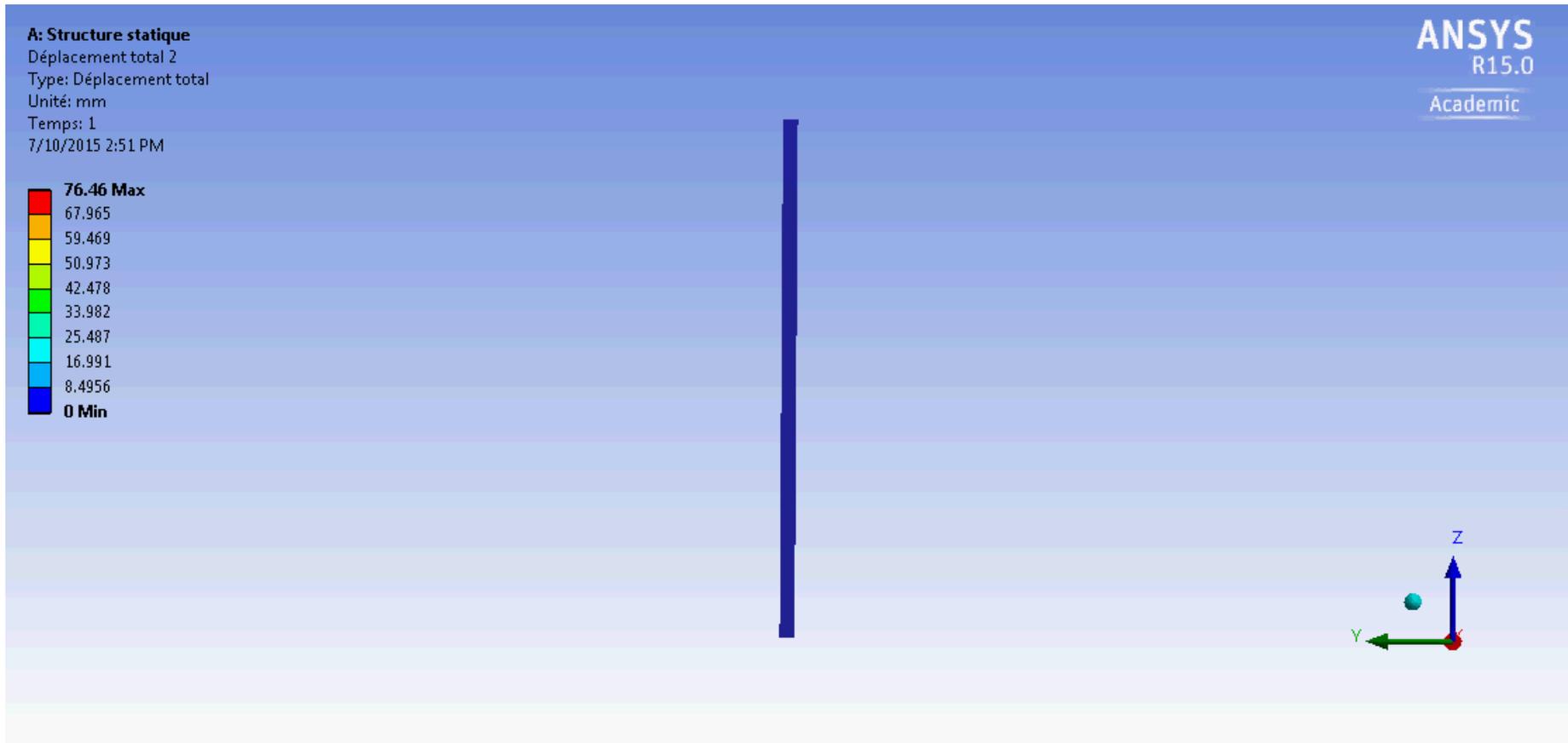


Plan  $x$ - $y$  (flexion autour de  $z$ )



Condition limite: encastree – libre ( $K = 2$ )

# Simulation ÉF (vue de profil)

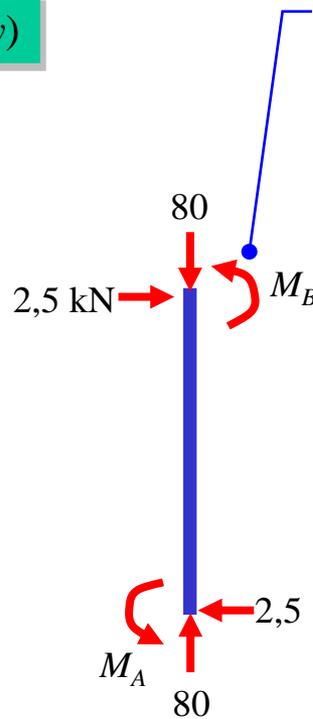
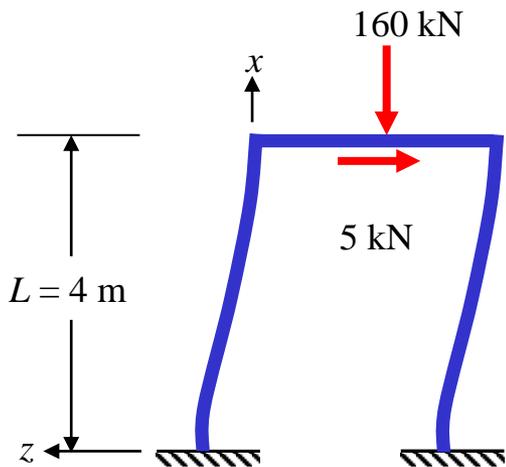


Déformation amplifiée 20 fois

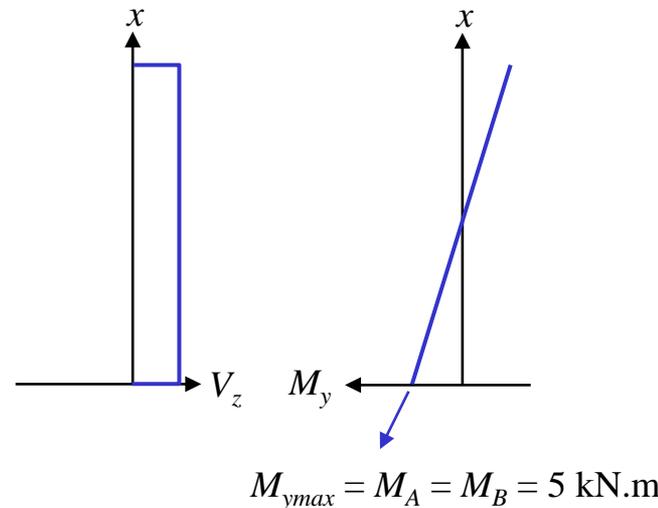
# 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

- Solution
  - Identifier s’il y a flexion dans 1 ou 2 plans (diagramme  $V$  et  $M$ )

Plan  $x-z$  (flexion autour de  $y$ )

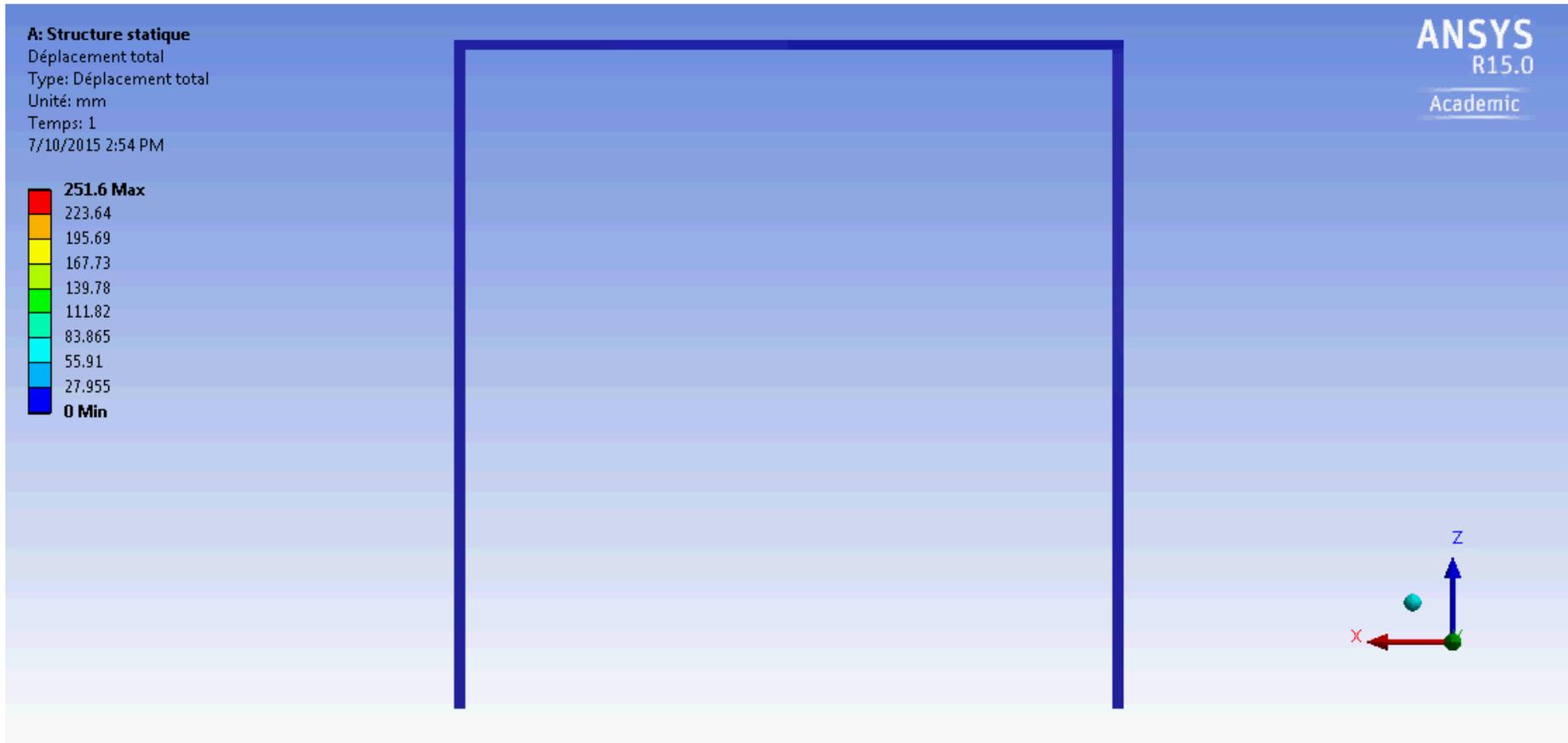


Problème hyperstatique: trouver  $M_B = ?$   
 (1) Approche énergétique avec Castigliano  
 (2) Truc du point d’inflexion  
 [voir document supplémentaire sur le site]  
 $M_A = M_B = 5 \text{ kN.m}$



Condition limite: encastree – encastree avec deplacement lateral permis ( $K = 1$ )

# Simulation ÉF (vue de face)



Déformation amplifiée 2.5 fois

# 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

- Solution

- Pondération de toutes les charges

- $C = \alpha \cdot P = 1,5 * 80 = 120 \text{ kN}$
- $M_z = \alpha \cdot M_{zmax} = 1,5 * 12 = 18 \text{ kN.m}$
- $M_y = \alpha \cdot M_{ymax} = 1,5 * 5 = 7,5 \text{ kN.m}$

} Valeurs à utiliser pour tous les autres calculs

- Capacité de résistance des colonnes en **compression pure** (calcul de  $C_r$ )

- Plan x-y:  $\left(\frac{KL}{r}\right)_z = \frac{2 \times 4000}{72,2} = 110,8$

- Plan x-z:  $\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{1 \times 4000}{42} = 95,2$

**Coefficients d'élançement**  
 Pour la flexion dans 2 plans: prendre la valeur la plus grande

## 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

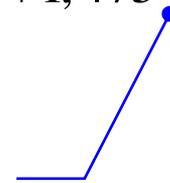
- Solution
  - Capacité de résistance des colonnes en **compression pure** (calcul de  $C_r$ ) (suite)

$$\lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{S_Y}{\pi^2 E}} = 110,8 \sqrt{\frac{350}{\pi^2 \times 200 \times 10^3}} = 1,475$$

$$C_r = \phi A S_Y (1 + \lambda^{2n})^{-1/n} = 0,9 \times 3610 \times 350 \times (1 + 1,475^{2,68})^{-1/1,34}$$

$$C_r = 417,14 \text{ kN}$$

$n = 1,34$  (pas de traitement pour relaxer les contraintes résiduelles)



## 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

- Solution

- Capacité de résistance des colonnes en flexion seulement: plan x-y (flexion autour de z)

$$- M_{rz} = \phi S_z S_Y = 0,9 \times 185 \times 10^3 \times 350 = 58,28 \text{ kN.m}$$

Au début de l'écoulement  $(M_Y)_z$

$$P_{cr/z} = \frac{\pi^2 EI_z}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3 \times 18,8 \times 10^6}{(2,0 \times 4000)^2}$$

Formule d'Euler

$$P_{cr/z} = 579,84 \text{ kN}$$

Prendre K dans le plan approprié

$$F_{amp/z} = \frac{1}{1 - \frac{C}{P_{cr/z}}} = \frac{1}{1 - \frac{120}{579,84}} = 1,261$$

Facteur d'amplification

# 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

- Solution

- Capacité de résistance des colonnes en flexion seulement: plan x-z (flexion autour de y)

- $M_{ry} = \phi S_y S_Y = 0,9 \times 125 \times 10^3 \times 350 = 39,38 \text{ kN.m}$

Au début de l'écoulement  $(M_Y)_y$

$$P_{cr/y} = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3 \times 6,35 \times 10^6}{(1,0 \times 4000)^2}$$

Formule d'Euler

$$P_{cr/y} = 783,40 \text{ kN}$$

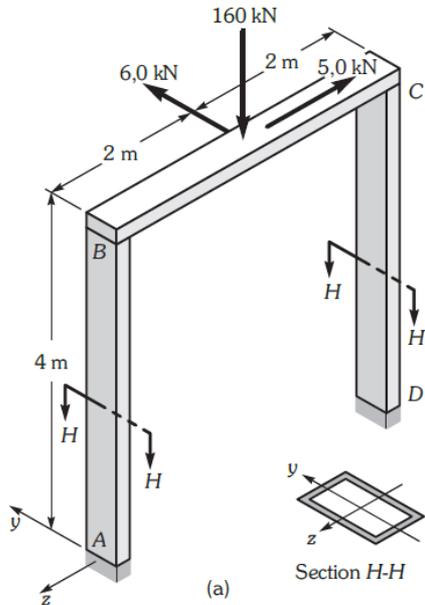
Prendre K dans le plan approprié

$$F_{amp/y} = \frac{1}{1 - \frac{C}{P_{cr/y}}} = \frac{1}{1 - \frac{120}{783,40}} = 1,181$$

Facteur d'amplification

# 3.7 Poutres-colonnes : Chargement combiné

- Solution
  - Capacité de résistance des colonnes



$$\frac{C}{C_r} + \frac{F_{amp/z} M_z}{M_{rz}} + \frac{F_{amp/y} M_y}{M_{ry}} \leq 1,0$$

Rappel du code ACNOR

$$\frac{120}{417,14} + \frac{1,261 \times 18}{58,28} + \frac{1,181 \times 7,5}{39,38} = 0,902 < 1$$

Donc, le cadre possède une capacité de résistance suffisante.

# 3.8 Déversement latéral des poutres

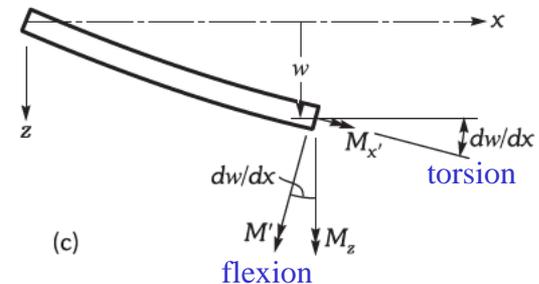
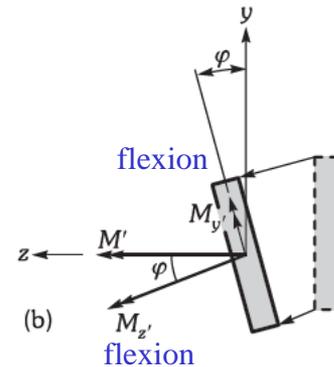
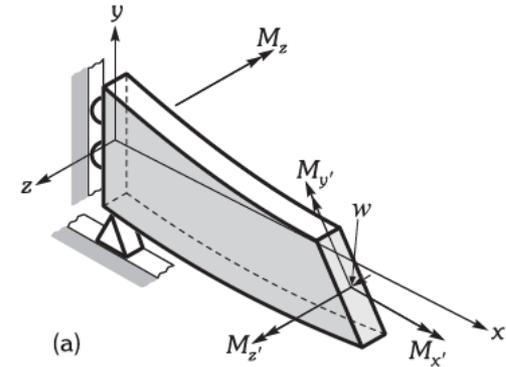
- Exemple d'une poutre encastrée-libre
  - Moment fléchissant:  $M_z$
  - Flambement
    - Flexion latérale
    - Rotation autour de l'axe longitudinal

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + m^2\varphi = 0 \quad \text{où} \quad m^2 = \frac{M_z^2}{EI_y GJ}$$

Rectangulaire  $(M_z)_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ}$

Poutre en I  $(M_z)_{cr} = \frac{\pi}{wL} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi E}{L}\right)^2 I_y C_w}$

Coefficient de gauchissement



# 3.9 Voilement ou flambement local des sections à parois minces

- Solution théorique (domaine élastique)

$$\sigma_{cr} = \frac{K\pi^2 E}{12(1-\nu^2) \left(\frac{b}{t}\right)^2}$$

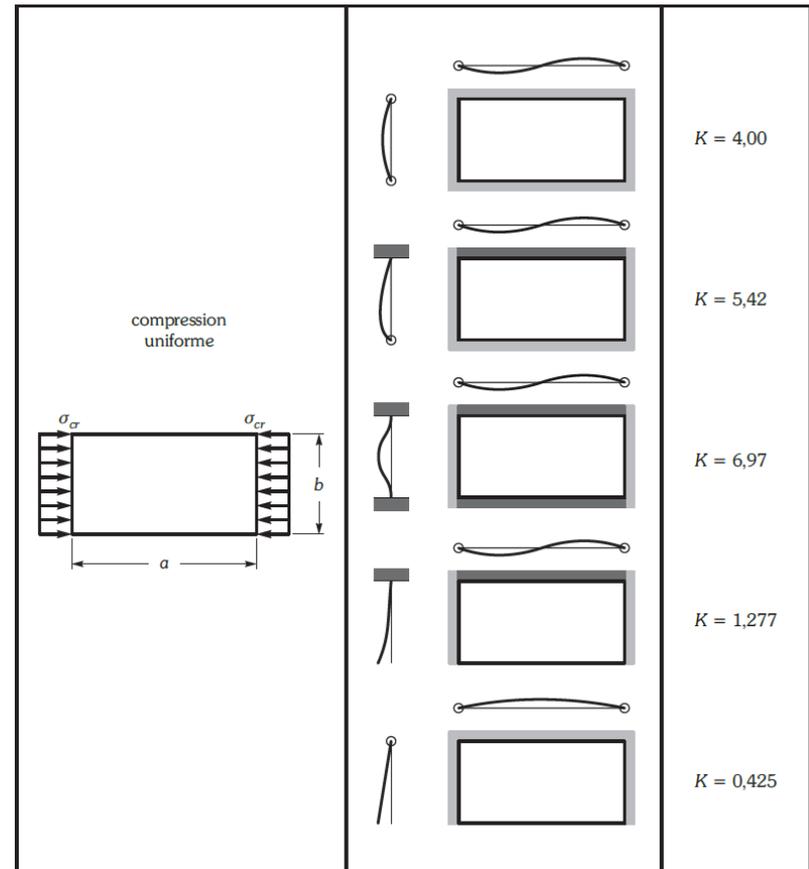
où  $K$  = condition d'appui

$b/t$  = rapport d'élanement de la plaque

- Considération d'ordre pratique

$$\frac{b}{t} \leq \frac{B}{\sqrt{S_Y}}$$

où  $B$  = constante qui dépend de la partie considérée dans la section  
(**phénomène localisé**)



# Illustration du flambement



Flambement d'un rail causé par l'élévation de température  
 (Source: MEC 430 Mécanique des Milieux Continus I, Jean-Jacques Marigo, école Polytechnique)



Flambement d'une colonne  
 (Source: *Interdisciplinary Research Drivers and Serendipity Factor: An Applied Mechanics Perspective*, Chih-Kung Lee & al.)



Flambement d'une canette métallique  
 (Source: *ETUDE DE LA RESISTANCE AU FLAMBEMENT DE CANETTES METALLIQUES*, ENSMP 1ère année, Mécanique des Matériaux Solides)