

Synthèse torsion et déformations

La figure 1i) montre une poutre de section complexe encastree-libre, soumise à un effort tranchant et à un moment de torsion à son extrémité libre. De plus, la partie tubulaire de la poutre est soumise à une pression interne. La figure 1ii) donne les dimensions relatives à la section de cette poutre. Une rosette à 45° a été collée sur la paroi externe du tube à l'endroit indiqué sur la figure 1i) ($z = 0$). La figure 1iii) présente l'orientation de cette rosette par rapport aux axes de la pièce. Pour ce chargement, les lectures des jauges sont :

$$\epsilon_a = 1.674 \times 10^{-3} ; \quad \epsilon_b = 1.2 \times 10^{-3} ; \quad \epsilon_c = -2.165 \times 10^{-4}$$

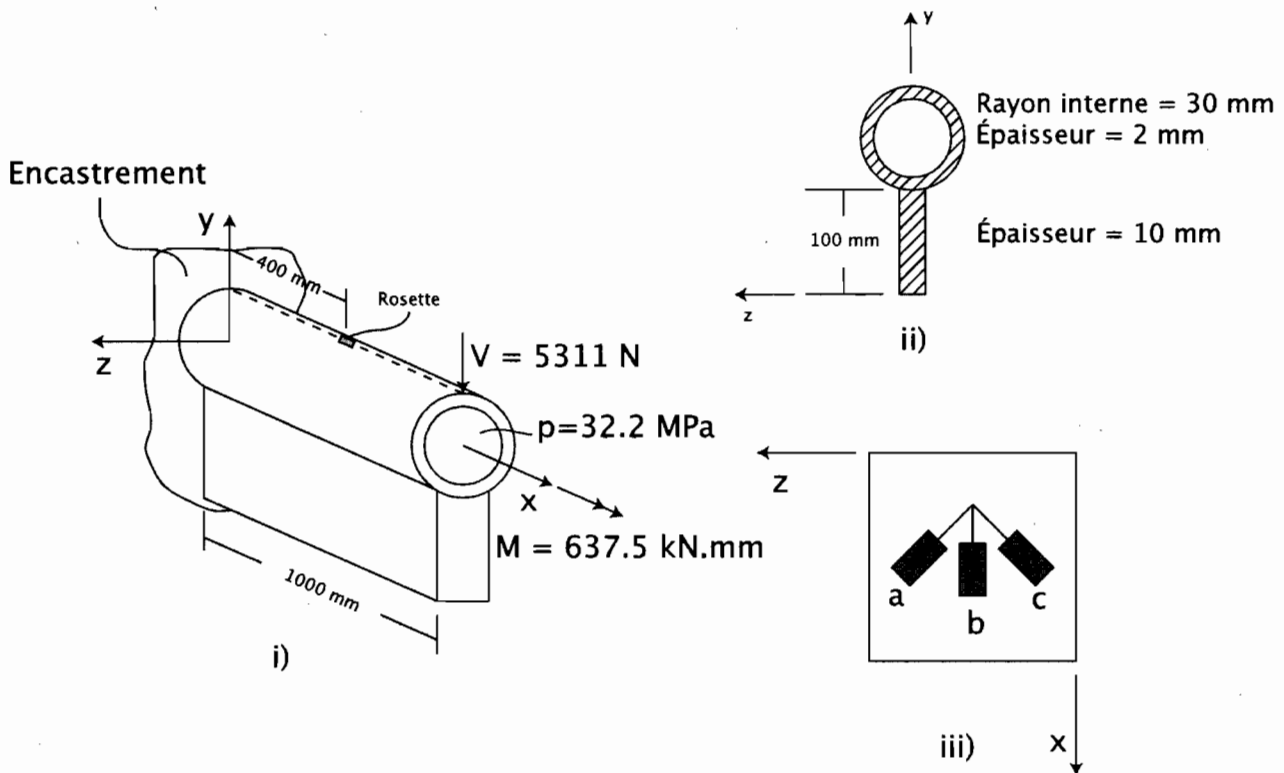


FIG. 1: Poutre de section complexe, encastree-libre, soumise à un effort tranchant, un moment de torsion et une pression interne.

Question : Déterminez le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν du matériau constituant cette poutre.

a) Calcul des propriétés de section

$$\bar{y} = 0 \text{ car symétrique}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{100 \times 10 \times 50 + \pi(32^2 - 30^2) \times 132}{(10 \times 100) + \pi(32^2 - 30^2)}$$

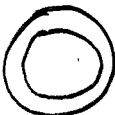
$$\approx 73 \text{ mm}$$


erreur pour la pression $p = 3,22 \text{ MPa}$ et σ_x causé par la pression est négligé

I_z avec la théorème des axes //

$$I_z = \frac{10 \times 100^3}{12} + ((73-50)^2 \times 10 \times 100) + \frac{\pi(32^4 - 30^4)}{4} + (132-73)^2 \times \pi(32^2 - 30^2)$$
$$\approx 2.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

J : Explosion de la section

①  $J_1 = \frac{\pi(32^4 - 30^4)}{2} \approx 3.75 \times 10^5 \text{ mm}^4$

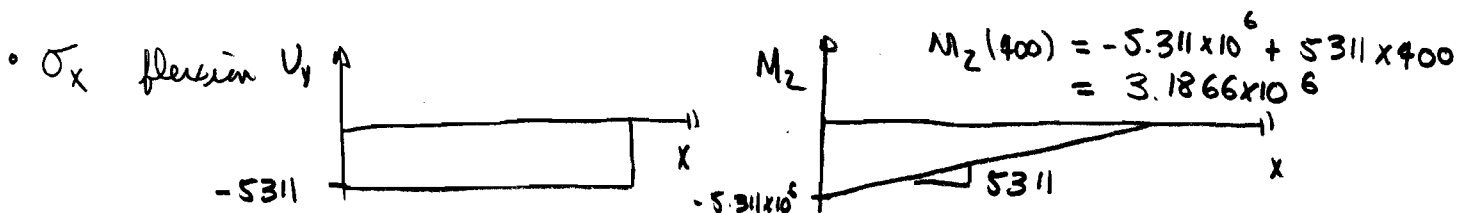
②  $J_2 = \frac{bt^3}{3} = \frac{100 \times 10^3}{3} = 3.33 \times 10^4 \text{ mm}^4$

Comme la poutre est fabriquée du même matériau,

$$J_{\text{TOT}} = J_1 + J_2 = 4.08 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad \text{et} \quad \frac{T_{\text{TOT}}}{J_{\text{TOT}}} = \frac{T_i}{J_i}$$

b) Calcul des contraintes

• $\sigma_\theta = \frac{Pr}{t} \approx \frac{32.2 \times 31}{2} \approx 50 \text{ MPa}$

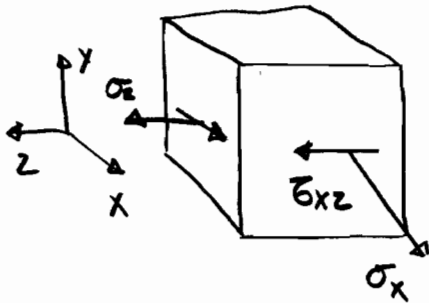


$$\sigma_x = \frac{M_c}{I} = \frac{3.1866 \times 10^6 \times (164 - 73)}{2.9 \times 10^6} \approx 100 \text{ MPa en tension}$$

$$\tau_{x\theta} = \frac{T_2 r}{J_2} = \frac{T_{TOT} r_e}{J_{TOT}} = \frac{6.375 \times 10^5 \times 32}{4.08 \times 10^5} = 50 \text{ MPa.}$$



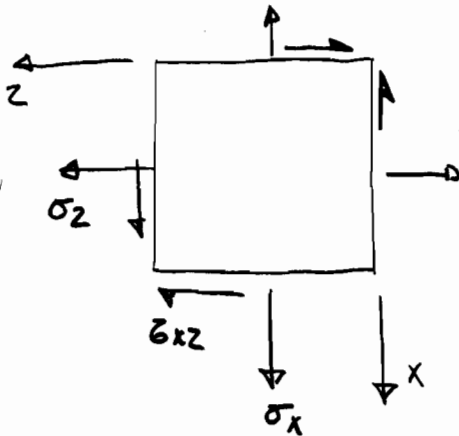
c) Réprésentation des contraintes



$\sigma_z = \sigma_\theta = 50 \text{ MPa}$ en tension

$\sigma_x = 100 \text{ MPa}$ en tension

$\tau_{xz} = 50 \text{ MPa}$, positif



Z : Axe premier

X : Axe second

d) Calcul des déformations

$\theta_a = 45, \theta_b = 90, \theta_c = 135$

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_z + \epsilon_x}{2} + \frac{\epsilon_z - \epsilon_x}{2} \cos 90 + \frac{\gamma_{xz}}{2} \sin 90$$

$\epsilon_b = \epsilon_x$

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_z + \epsilon_x}{2} + \frac{\epsilon_z - \epsilon_x}{2} \cos 270 + \frac{\gamma_{xz}}{2} \sin 270$$

$$\varepsilon_a + \varepsilon_c = \varepsilon_z + \varepsilon_x \quad \text{mais } \varepsilon_x = \varepsilon_b$$

$$\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b}$$

$$2\varepsilon_a = (\varepsilon_a + \varepsilon_c - \varepsilon_b + \varepsilon_b) + \gamma_{xz}$$

$$\boxed{\varepsilon_a - \varepsilon_c = \gamma_{xz}}$$

$$\text{Ainsi, } \varepsilon_z = 1.674 \times 10^{-3} + (-2.165 \times 10^{-4}) - 1.2 \times 10^{-3} \\ = 2.575 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_x = 1.2 \times 10^{-3}$$

$$\gamma_{xz} = 1.89 \times 10^{-3} \quad (\text{pas nécessaire ici})$$

e) Utilisation de la loi de comportement

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \text{et} \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

car état plan de contraintes. ici, $x=z$ et $y=x$

$$2.575 \times 10^{-4} = \frac{1}{E} (50 - \nu \times 100) \rightarrow \underline{2.575 \times 10^{-4} E + 100 \nu = 50} \quad \textcircled{1}$$

$$1.2 \times 10^{-3} = \frac{1}{E} (100 - \nu \times 50) \rightarrow \underline{1.2 \times 10^{-3} E + 50 \nu = 100} \quad \textcircled{2}$$

$$E = 1.94175 \times 10^5 - 3.8835 \times 10^5 \nu \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow 233 - 466 \nu + 50 \nu = 100 \rightarrow \nu = \frac{133}{416} \approx \boxed{0.32 = \nu}$$

$$\boxed{E \approx 70\,000 \text{ MPa} = 70 \text{ GPa}}$$

④