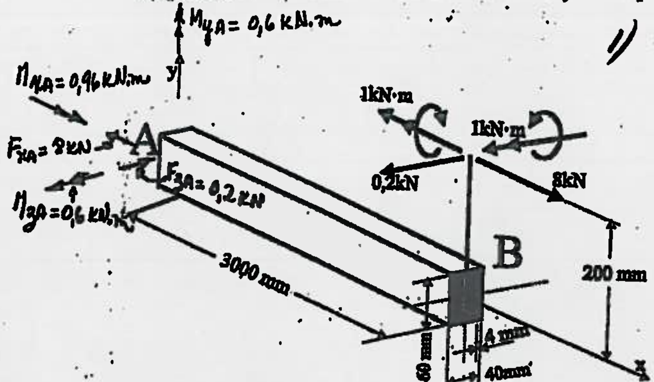
A = 736 mm²
I_z = 0.345 x10⁵ mm⁴
I_y = 0.178 x10⁶ mm⁴
S_z = 11.5 x10³ mm³
S_Y = 8.9 x10³ mm³

COURS MEC2400-PROBLÈME DE SYNTHÈSE – CHAPS 7 ET 10

La figure illustre en isométrique une poutre encastrée à son extrémité A et chargée à son extrémité B par l'intermédiaire d'un bras de levier rigide. Les dimensions sont indiquées sur la figure.

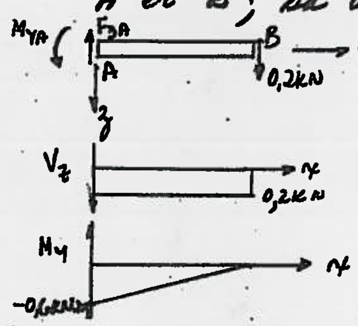
Vérifiez si la poutre possède une capacité suffisante pour supporter son chargement sans écoulement plastique.

Propriétés du matériau : E = 200 000 MPa ; S_Y = 300 MPa ; ν = 0,3



1) Équilibre : les équations ont été résolues en classe. Le résultat final est illustré à la figure, où les réactions sont montrées suivant le sens où elles agissent.

localisation du point critique :
- la force axiale est constante entre A et B
- le moment de torsion interne est constant entre A et B
- le moment fléchissant autour de l'axe z est constant entre A et B
- le moment fléchissant autour de l'axe y varie entre A et B ; sa valeur absolue max est en A et



elle est égale à 0,6 kN.m ; en B, le moment fléchissant M_y = 0
le point critique est donc le point A

2) Calcul des contraintes :

TRACTION : $\sigma_x = \dfrac{F_x}{A} = \dfrac{8 \times 10^3 N}{(60 \times 40 - 52 \times 32) mm^2} = 10,9 \text{ MPa}$

(voir l'illustration page 3)

▫ section rectangulaire fermée

• Torsion : $\tau_{xz} = \frac{M_x}{2\bar{A}t} = \frac{0{,}96 \times 10^6\ N.mm}{2 \times (60-4)(40-4)\ mm^2 \times 4mm} = 59{,}5\ MPa$

(voir page 3)

• Flexion autour de l'axe z (plan x-y)

$|\sigma_x|_{M_z} = \left|\frac{M_z \cdot c}{I_z}\right| = \left|\frac{M_z}{S_z}\right|$ où $I_z = \frac{1}{12}\left[40 \times \overline{60}^3 - 32 \times \overline{52}^3\right] mm^4 = 0{,}345 \times 10^6\ mm^4$

$S_z = \frac{I_z}{c} = \frac{0{,}345 \times 10^6 mm^4}{30mm} = 11{,}5 \times 10^3 mm^3$

$|\sigma_x|_{M_z} = \frac{0{,}6 \times 10^6\ N.mm}{11{,}5 \times 10^3\ mm^3} = 52{,}2\ MPa$

(voir page 3)

occasionnellement fournis aux quiz

• Flexion autour de l'axe y (plan x-z)

a) contrainte normale σ_x:

⚠ pas σ_y

$|\sigma_x|_{M_y} = \left|\frac{M_y \cdot c_1}{I_y}\right| = \left|\frac{M_y}{S_y}\right|$ où $I_y = \frac{1}{12}\left[60 \times \overline{40}^3 - 52 \times \overline{32}^3\right] mm^4 = 0{,}178 \times 10^6\ mm^4$

$S_y = \frac{I_y}{c} = \frac{0{,}178 \times 10^6 mm^4}{20mm} = 8{,}9 \times 10^3 mm^3$

$|\sigma_x|_{M_y} = \frac{0{,}6 \times 10^6\ N.mm}{8{,}9 \times 10^3\ mm^3} = 67{,}4\ MPa$

(voir page 3)

≠ de S_y (limite d'écoulement)

b) Contrainte de cisaillement τ_{xz} (associée à F_z) :

Cette contrainte n'influencera pas l'écoulement car sa valeur max. est à l'axe neutre c'est-à-dire sur l'axe y, là où $(\sigma_x)_{M_y} = 0$: Nous la calculons pour réviser cette notion :

m̂ dir.

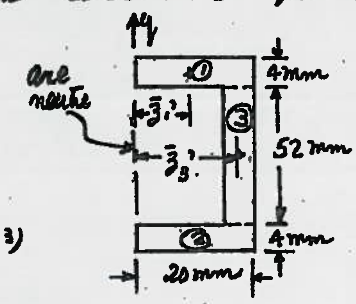
$\tau_{xz} = \frac{V_z Q_y}{I_y b}$ où $Q_y = \Sigma A_i' \bar{z}_i'$
$= A_1'\bar{z}_1' + A_2'\bar{z}_2' + A_3'\bar{z}_3'$
$= 2 \times 20 \times 4 \times 10 + 52 \times 4 \times 18\ (mm^3)$

$Q_y = 5{,}34 \times 10^3 mm^3$

autour axe y

⊥ à l'axe y

⚠ multiplier par 2



$\tau_{xz} = \frac{200N \times 5{,}34 \times 10^3 mm^3}{0{,}178 \times 10^6 mm^4 \times 2 \times 4 mm}$

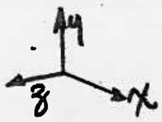
2 épaisseurs

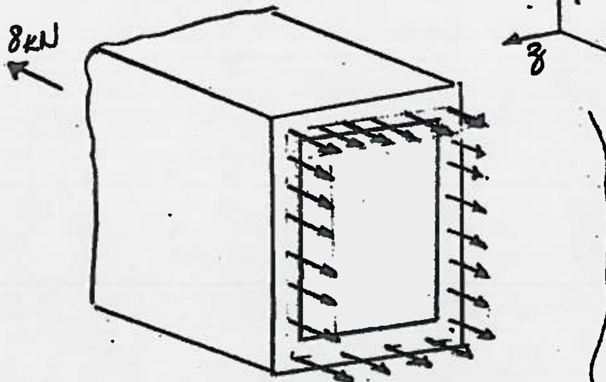
$\tau_{xz} = 0{,}75\ MPa$ (négligeable)

(voir illustration page 3)

illustration des contraintes au point A:

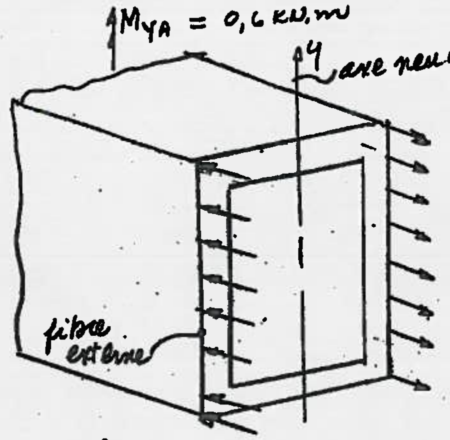
TRACTION:





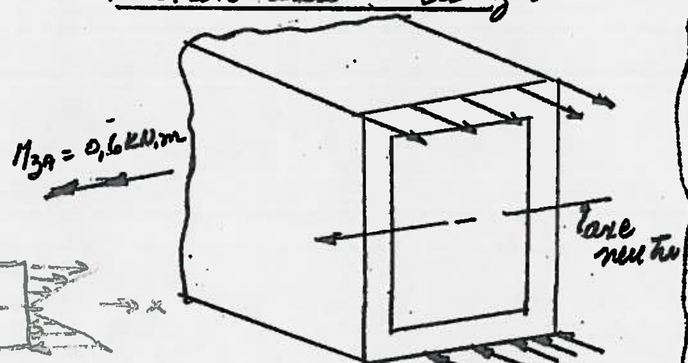
$\sigma_x = 10,9$ MPa
(uniforme sur la section)

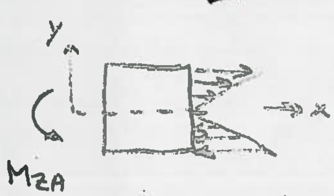
flexion autour de y:



$(\sigma_x)_{\text{fibre ext.}} = \pm 67,4$ MPa

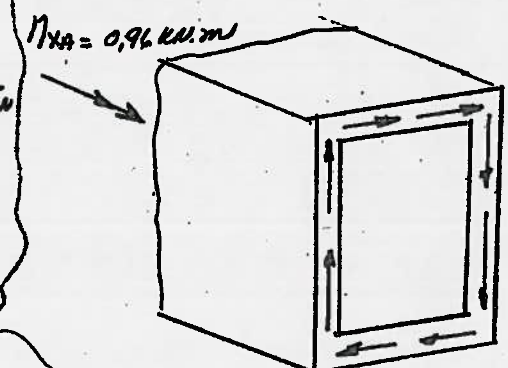
Flexion autour de z:





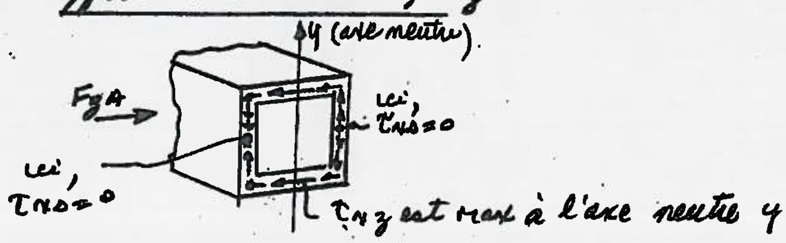
$(\sigma_x)_{\text{fibre ext}} = \pm 52.2$ MPa.

Torsion autour de x



$\tau_{x\theta} = 59,5$ MPa

effort tranchant, F_y



Superposition:

On examine les endroits où les contraintes normales sont de même signe. Ici, puisque la force axiale induit une contrainte en tension, le point le plus sollicité est celui où les contraintes normales induites par M_y et M_z sont en tension $\Rightarrow$

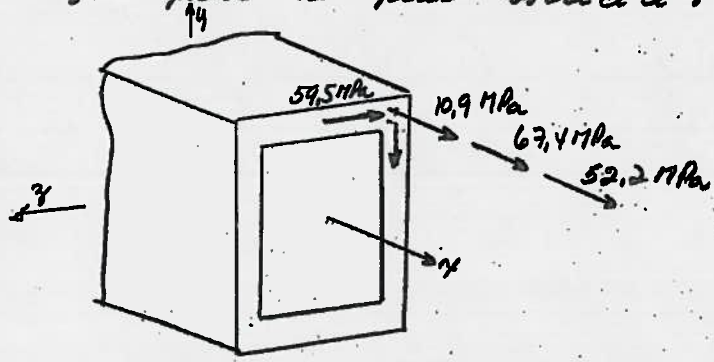
$\sigma_x = (10{,}9 + 67{,}4 + 52{,}2)$ MPa

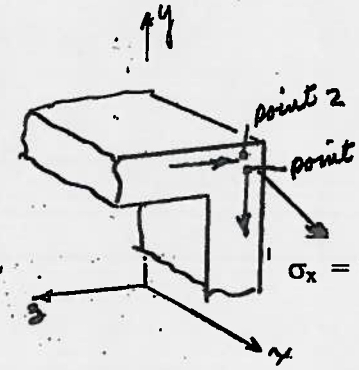
$= 130{,}5$ MPa

et, à cet endroit :

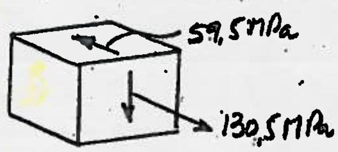
$\tau_{xz} = 59{,}5$ MPa

- Au point le plus sollicité :





Point 1:



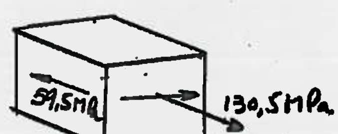
$\sigma_x = 130{,}5$ MPa ; $\sigma_y = \sigma_z = 0$

$\tau_{xy} = -59{,}5$ MPa

$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_z$: contr. princ.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Point 2:



$\sigma_x = 130{,}5$ MPa ; $\sigma_y = \sigma_z = 0$

$\tau_{xz} = -59{,}5$ MPa

$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_y$: contr. princ.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

au point 1 :

$$\sigma_{1,2} = \frac{130,5+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{130,5-0}{2}\right)^2 + (-59,5)^2}$$

$\sigma_1 = 153,5\ MPa$; $\sigma_2 = -23\ MPa$; $\sigma_3 = \sigma_z = 0$

<u>TRESCA</u> :
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2} = \frac{153,5-(-23)}{2}\ MPa = 88,3\ MPa.$$

$$FS = \frac{S_y}{2\tau_{max}} = \frac{300\ MPa}{2 \times 88,5\ MPa} = 1,7$$

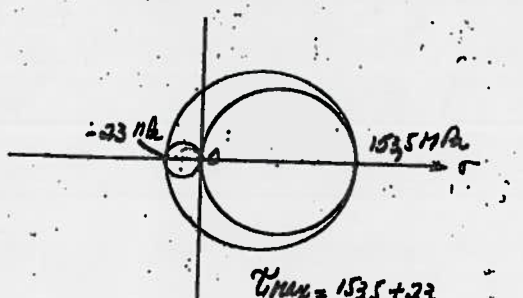
<u>MISES</u> :
$$FS = \frac{S_y}{\sqrt{\frac{1}{2}\left((153,5+23)^2 + (-23,5+0)^2 + (0-153,5)^2\right)}}$$
$$= 300 / 166.2 = 1,8$$

Au point 2 :

$$\sigma_{1,2} = \frac{130,5+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{130,5-0}{2}\right)^2 + (-59,5)^2}$$

$\sigma_1 = 153,5\ MPa$; $\sigma_2 = -23\ MPa$; $\sigma_3 = \sigma_y = 0$.

Ce qui donne le même <u>résultat qu'au point 1</u>

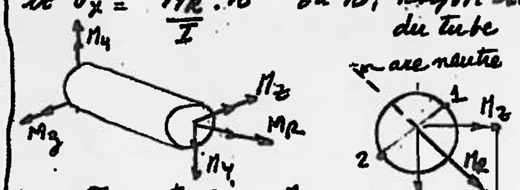


$$\tau_{max} = \frac{153,5+23}{2} = 88,3\ MPa$$

Note : Si le profilé est un tube circulaire, on calcule le moment résultant :

$$M_R = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = 0,848 \times 10^6\ N.mm$$

et $\sigma_x = \frac{M_R \cdot r}{I}$ où r : rayon ext. du tube



en 1 : σ_x en tension $= \frac{M_R \cdot r}{I}$

en 2 : σ_x en compr. = "

p.e.q.

$I_y = I_z = I$

$c_y = c_z = c$

(i.e. r)