ING 1015 - Chap. 7

Superposition des chargements

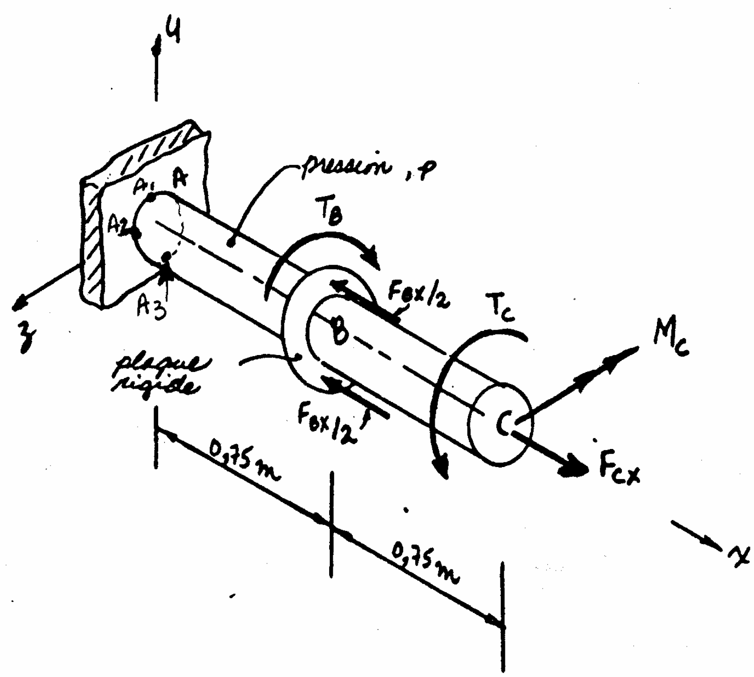
Soit un cylindre ABC fermé à paroi mince encastré à son extrémité A, tel que montré à la figure 3. La plaque rigide en B sert uniquement à appliquer le chargement à ce point. Le chargement appliqué au cylindre est le suivant:

- une pression interne de 5 MPa;

- en B: un couple T_B = 5 kN.m, dans le sens montré
  une force axiale F_{BX} = 30 kN, dans le sens montré;

- en C: un couple T_C = 2 kN.m, dans le sens montré
  une force axiale F_{CX} = 20 kN, dans le sens montré
  un moment M_C (autour de l'axe z) = 1,8 kN.m, dans le sens montré

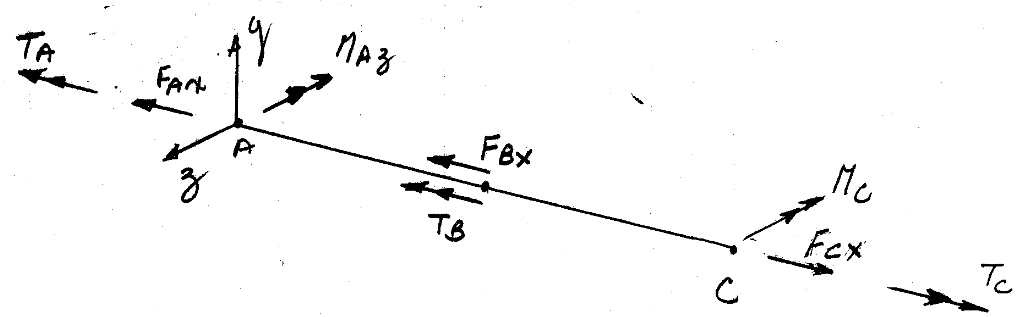
Géométrie du cylindre:
rayon, r = 50 mm
épaisseur, t = 2,5 mm
longueur, L = 1,5 m



- Évaluez l'état de contraintes aux points A_1, A_2 et A_3
- Illustrez chaque état sur un cube élémentaire entourant ces points.

Solution

I) Equilibre



- $\Sigma F_x = 0 = -F_{Ax} - F_{Bx} + F_{Cx} = 0$

$$F_{Ax} = F_{Cx} - F_{Bx} = 20\,kN - 30\,kN = -10\,kN$$

(c'est-à-dire, selon le sens inverse de celui supposé)

- $\Sigma M_x = 0 = -T_A - T_B + T_C = 0$

$$T_A = T_C - T_B = 2\,kN.m - 5\,kN.m = -3\,kN.m$$

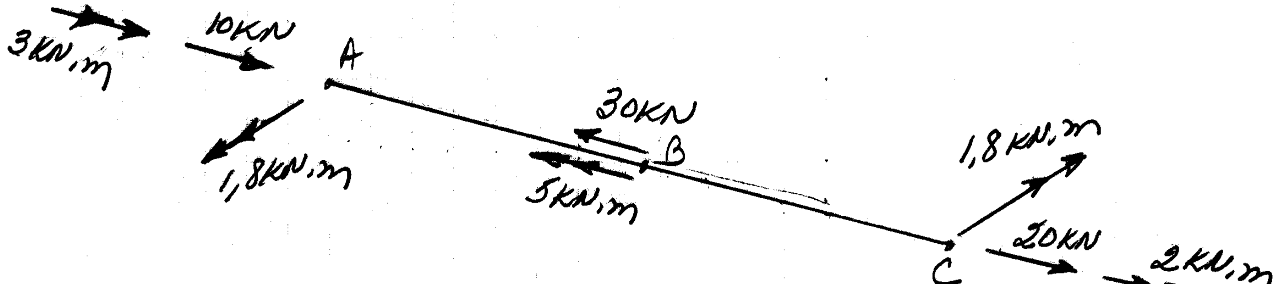
(i.e, selon le sens inverse de celui supposé)

- $\Sigma M_z = 0 = -M_{Az} - M_C = 0$

$$M_{Az} = -M_C = -1{,}8\,kN.m$$

(selon le sens inverse de celui supposé)

Avant de calculer les contraintes, illustrons les réactions selon leur sens réel:

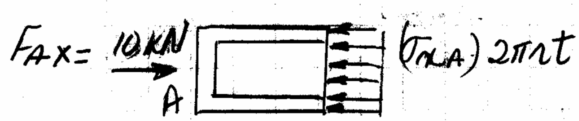


II Contraintes au point A

Entre les points A et B, le cylindre supporte le chargement suivant :

- force axiale $F_{AB} = F_{Ax}$
- moment de torsion $T_{AB} = T_A$
- moment fléchissant $m_{AB} = M_{Az}$
- pression interne $= 5\ MPa$

i) Force axiale :



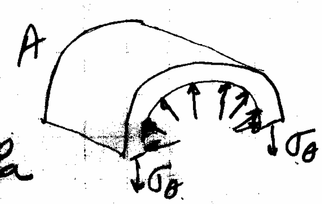
$$(\sigma_{xA})_{F.ax} = \frac{F_{Ax}}{A_{AB}} = \frac{10\times10^3\ N}{2\pi \times 50\ mm \times 2{,}5\ mm}$$

$$\left(\frac{1N}{mm^2} = 1MPa\right)$$

$(\sigma_{xA})_{F.ax.} = 12{,}73\ MPa$ en compression

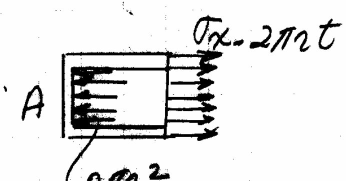
ou $-12{,}73\ MPa$

ii) Pression : $\cdot\ \sigma_{rr} = 0$

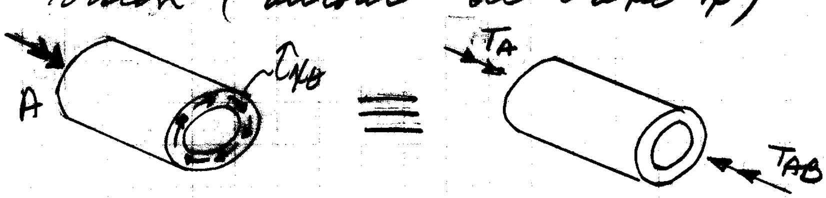


$$\cdot\ \sigma_\theta = \frac{pr}{t} = \frac{5\times 50}{2{,}5}\ (MPa) = 100\ MPa$$

$$\cdot\ (\sigma_{xA})_{pression} = \frac{pr}{2t} = \frac{5\times50}{2\times2{,}5}\ (MPa) = 50\ MPa$$



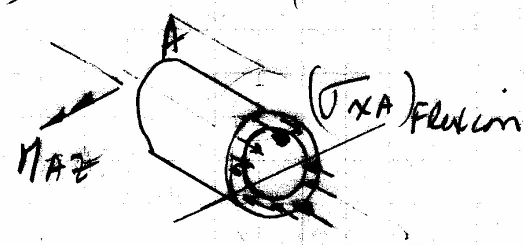
iii) Torsion (autour de l'axe x)



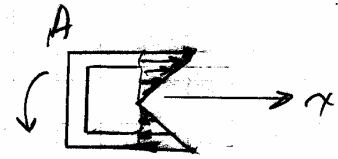
$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB} \cdot r}{J} = \frac{3 \times 10^6 \, N.mm * (50 + 2{,}5/2)\, mm}{2\pi * (50)^3 * 2{,}5 \; mm^4}$$

$$= 78{,}3 \text{ MPa}$$ selon le sens montré

iv) flexion (autour de l'axe z)



ou



À la fibre supérieure :

$$(\sigma_x)_{A_1} = -\frac{My}{I} = -\frac{(-1{,}8 * 10^6 \, N.mm)(50 + 2{,}5/2)\, mm}{\pi\,(50)^3\, 2{,}5 \; (mm^4)}$$

$$= 93{,}96 \text{ MPa}$$ i.e en tension

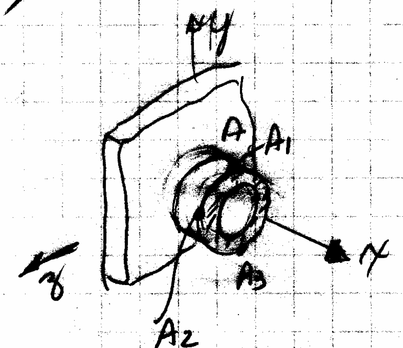
À la fibre inférieure:

$$(\sigma_x)_{A_3} = -\frac{My}{I} = \frac{-(-1{,}8 * 10^6 \, N.mm)(-51{,}25)\, mm}{\pi\,(50)^3\, 2{,}5\,(mm^4)}$$

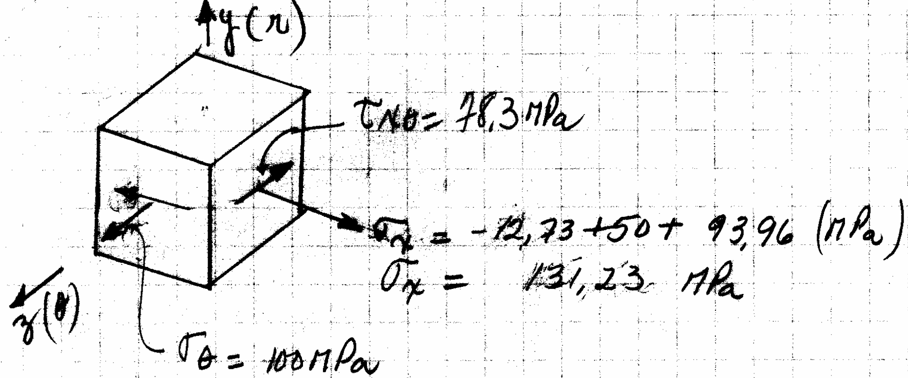
$$= -93{,}96 \text{ MPa}$$ ou 93,96 MPa en compression

b) État de contrainte sur le cube élémentaire

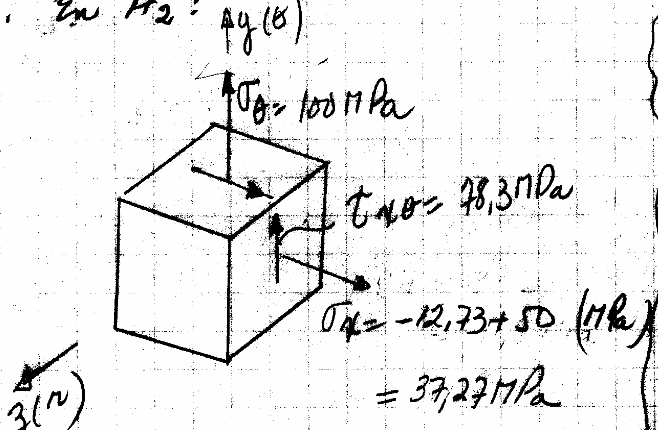
A_1, A_2 et A_3 sont en surface



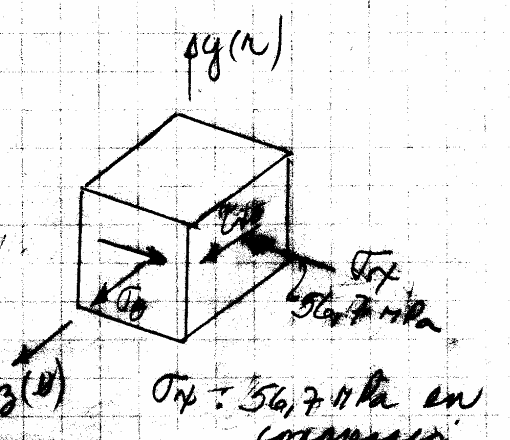
En A_1 :



En A_2 :



En A_3 :



$\sigma_x = 56{,}7$ MPa en compression
$\sigma_\theta = 100$ MPa en tens.
$\tau_{x\theta} = 78{,}3$ MPa (sens montré)