

Section 1: Rappel de résistance des matériaux I (MEC1420)

« L'ingénieur est un type qui sait ce qu'il peut négliger. »

Prof. E. Juillard, 1886-1982

Pouvoir négliger est, en technique, une nécessité tout aussi impérieuse que savoir calculer. Mais savoir négliger est un art difficile et subtil qui exige à la fois une connaissance approfondie des phénomènes ainsi que des techniques, et un jugement sûr pour évaluer le degré d'approximation nécessaire, encore compatible avec les buts à atteindre. L'ingénieur doit savoir que les modèles simples sont faux, mais que ceux qui ne le sont pas sont inutilisables. Entre un perfectionnisme fatal parce que trop coûteux et un empirisme dangereux par son caractère aléatoire, il doit trouver le juste compromis qui satisfait en même temps les exigences de qualité et les impératifs économiques. Il y a des choses que l'on peut calculer, il y en a d'autres qu'il faut estimer ou sentir. L'ingénieur doit être capable des deux démarches et, plus encore, il doit avoir le discernement nécessaire pour faire la distinction entre les deux.

La réalité est toujours plus complexe que la théorie qui tente de la décrire. En effet, pour appréhender cette réalité, on est bien obligé de la simplifier et de la schématiser. Elle s'en venge quelquefois avec malice ou violence, rappelant l'ingénieur imprudent à sa condition d'homme ... Mais souvent aussi, elle se prête à ce jeu et accepte de donner à l'ingénieur la joie d'avoir participé à une création ...

1.0: Conception de structures mécaniques

- Critères de conception

1. Résistance

Révision RDM I, flexion gauche, analyse limite, concentration de contrainte

2. Rigidité

Révision RDM I, méthodes énergétiques

3. Instabilité

Instabilité de membrures rigides, flambement de membrures élastiques

4. Fatigue

Chargements cycliques



1.0: Conception de structures mécaniques

1. Résistance

- Prédire les contraintes maximales et les comparer à un critère de défaillance
- Éviter les déformations plastiques



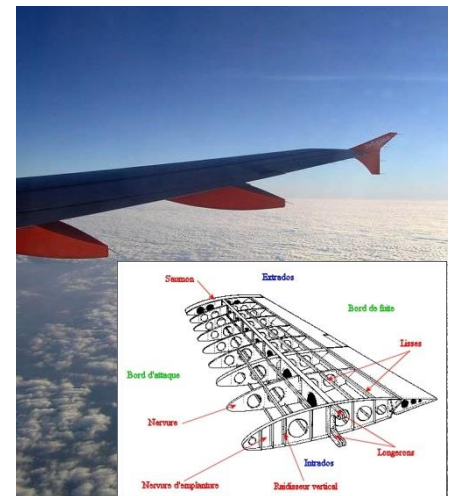
2. Rigidité

- Prédire les valeurs maximales des déformations ou des déplacements



3. Instabilité

- Éviter l'effondrement de la structure suite à un phénomène d'instabilité



4. Fatigue

- Prédire la durée de vie d'une structure sous chargements cycliques

1.0: Conception de structures mécaniques

1. Résistance

- Prédire les contraintes maximales et les comparer à un critère de défaillance

Facteur de sécurité en résistance

$$F S = \frac{\text{Contrainte permise}}{\text{Contrainte induite}}$$

2. Rigidité

- Prédire les valeurs maximales déformations ou les déplacements

Ex. critère sur le déplacement

$$d < d_{\max}$$

3. Instabilité

- Éviter l'effondrement de la structure suite à un phénomène d'instabilité

Formule d'Euler, Code ACNOR

$$\frac{C}{C_r} + \frac{F_{amp/z} M_z}{M_{rz}} + \frac{F_{amp/y} M_y}{M_{ry}} \leq 1,0$$

4. Fatigue

- Durée de vie d'une structure sous chargements cycliques

Loi de Goodman, Loi de Miner

$$\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = 1,0$$

1.0: Conception de structures mécaniques

Critères de défaillance

Évaluation de la résistance de pièces mécaniques, l'ingénieur doit évaluer le facteur de sécurité (FS) :

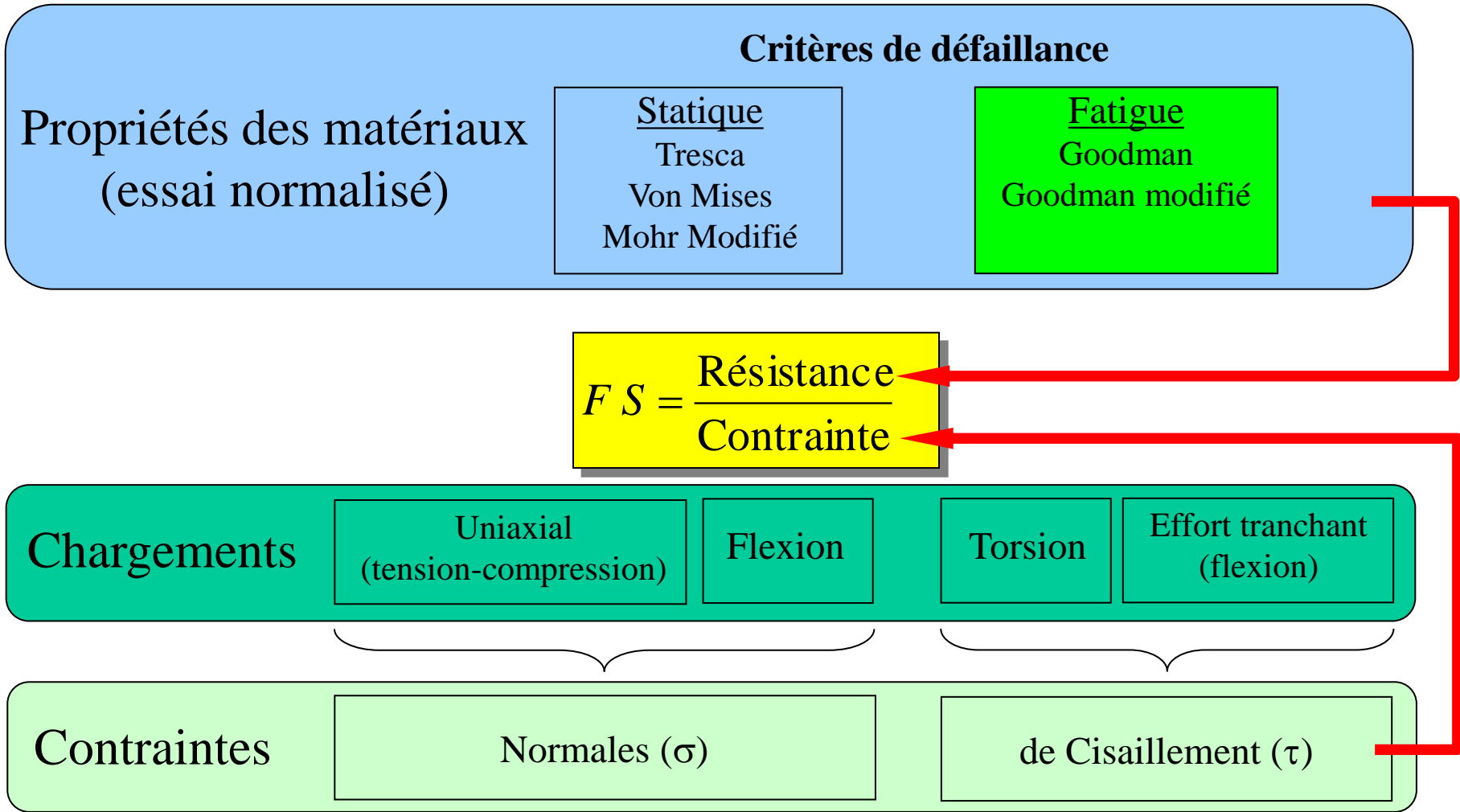
$$FS = \frac{\text{Contrainte permise}}{\text{Contrainte induite}} = \frac{\text{Résistance}}{\text{Contrainte}}$$

Contrainte permise est évaluée à partir des propriétés du matériau de la pièce et des critères de défaillance

Contrainte induite est calculée à partir du chargement et de la géométrie de la pièce

1.0: Conception de structures mécaniques

Critères de défaillance



1.1: Rappel de Statique (MEC1410)

- **Diagramme de corps libéré (DCL) en 3D**
 - Addition vectorielle
 - Calcul du moment causé par une force

Équations d'équilibre d'un corps 3D

Les équations d'équilibre d'un corps rigide 3D sous forme vectorielle sont :

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

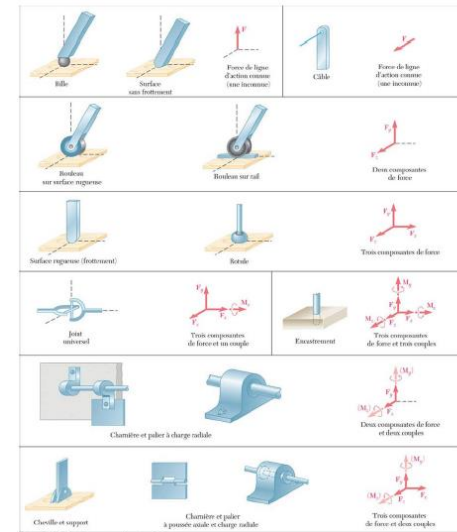
Les conditions d'équilibre peuvent se traduire par six équations scalaires comme suit:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad \sum F_y = 0 & \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \quad \sum M_y = 0 & \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

Ces 6 équations donnent une solution pour un maximum de 6 inconnues.

MEC1410: Cours #6 p. 5

Réactions aux appuis et liaisons des corps rigides 3D



MEC1410: Cours #6 p. 6

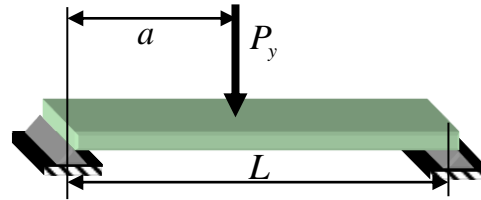
1.2: Notions de contrainte

- Études des contraintes pour les trois types de chargement simple d'une membrure droite

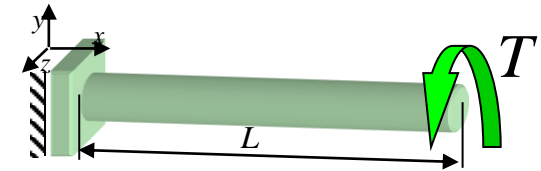


Chargement axial

Traction-compression et réservoir sous pression



Chargement en flexion



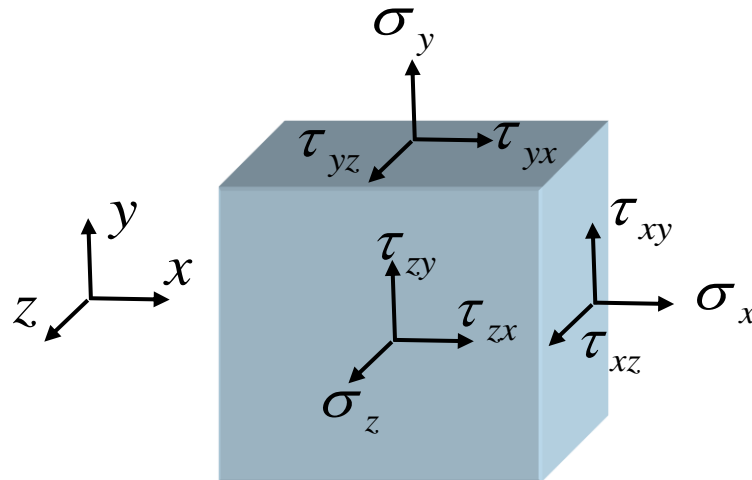
Chargement en torsion

Combinaisons des chargements

1.2: Notions de contrainte

Contrainte et élément infinitésimal

- Dans un **état de contrainte le plus complet**, chaque cube (ou élément) infinitésimal d'un solide est soumis à trois contraintes sur chacun de ses six plans
 - Une contrainte normale σ_i
 - Deux contraintes de cisaillement τ_{ij} orthogonales entre elles et qui reposent dans le plan



1.2: Notions de contrainte

Contrainte et élément infinitésimal

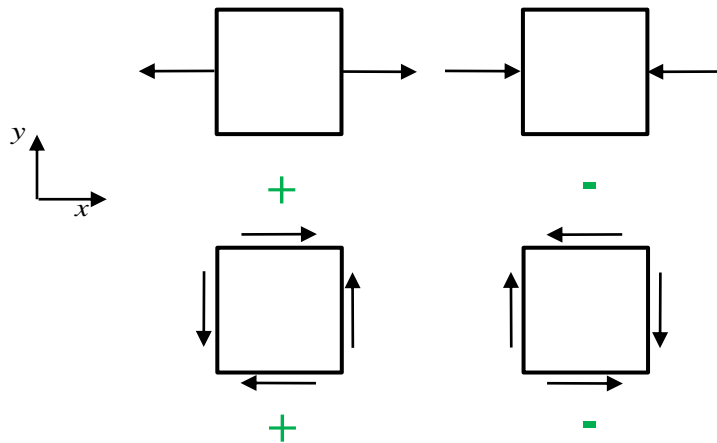
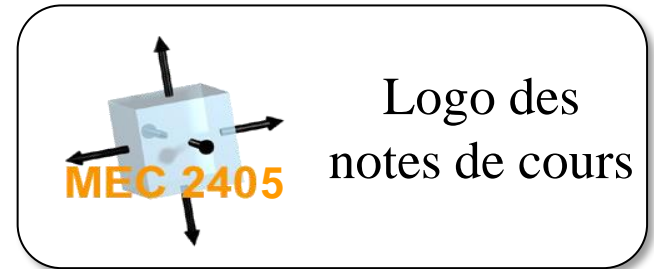
Contrainte :

- Normale σ (ex. σ_x)
- De cisaillement τ (ex. τ_{xy})

Face et direction

Face

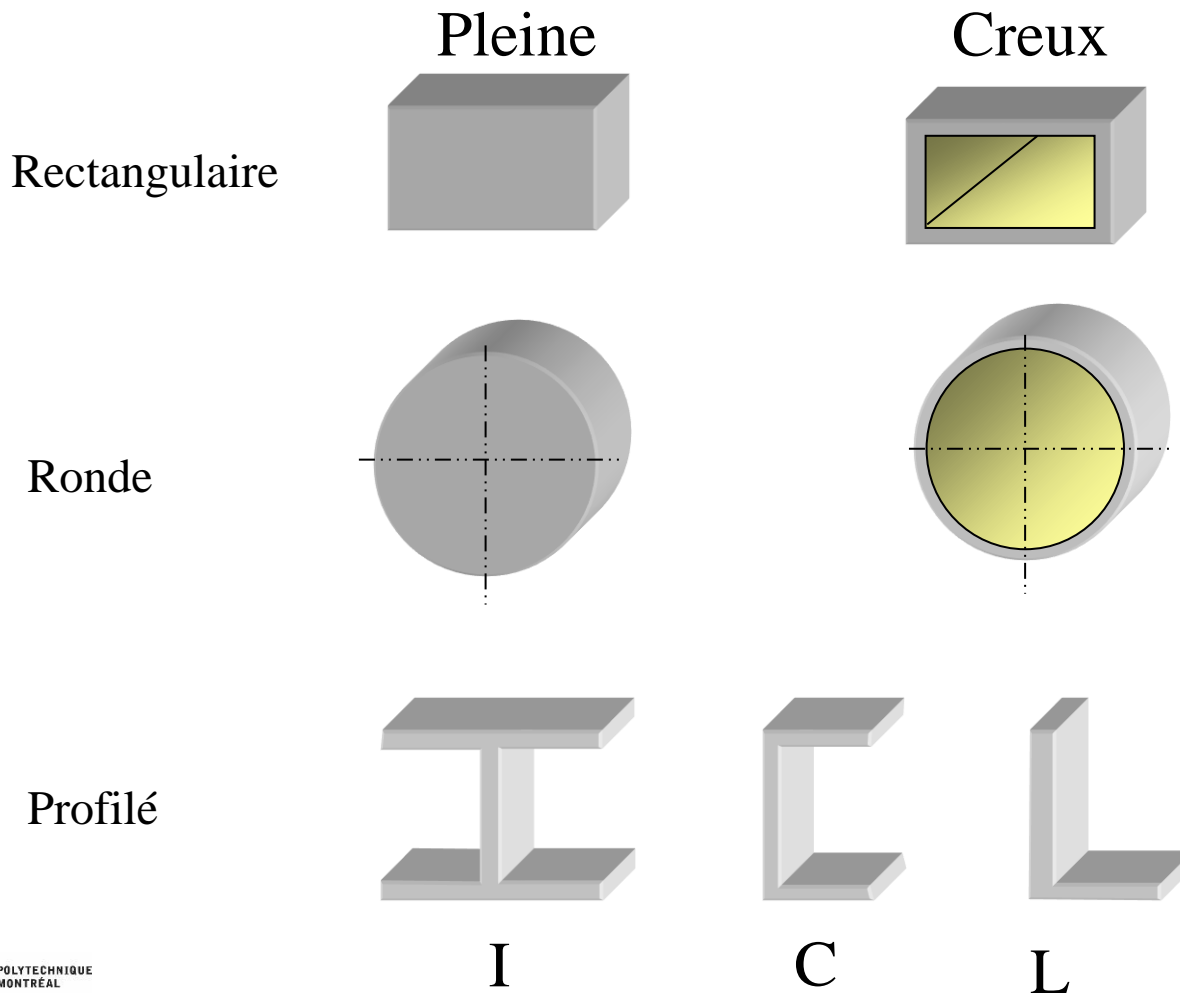
Direction



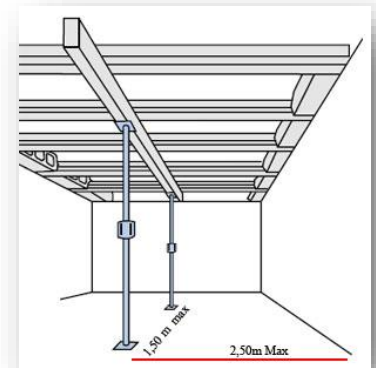
(+) si face (+) et direction (+)
 ou
 (+) si face (-) et direction (-)
 } sinon (-)

1.2: Notions de contrainte

Sections les plus couramment rencontrées en ingénierie



Arbres de transmission



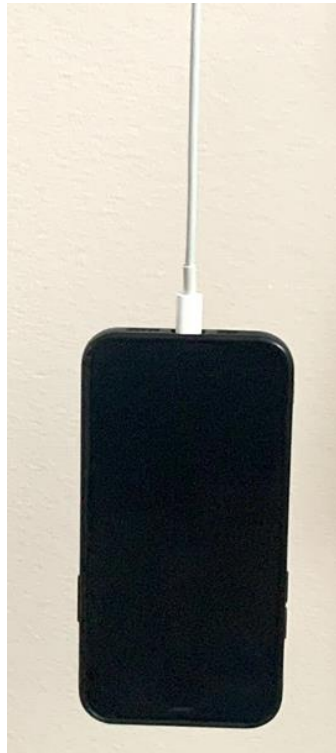
Plancher de maison

1.2: Notions de contrainte

Dans la grande majorité des cas, les équations que l'ingénieur utilise pour calculer les contraintes se résument à :

- Chargement uniaxial
- Chargement de flexion
- Chargement de torsion
- Chargement combiné :
 - axial-flexion
 - axial-torsion
 - flexion-torsion
 - flexion-axial-torsion

1.3: Chargement uniaxial



Phénomène physique

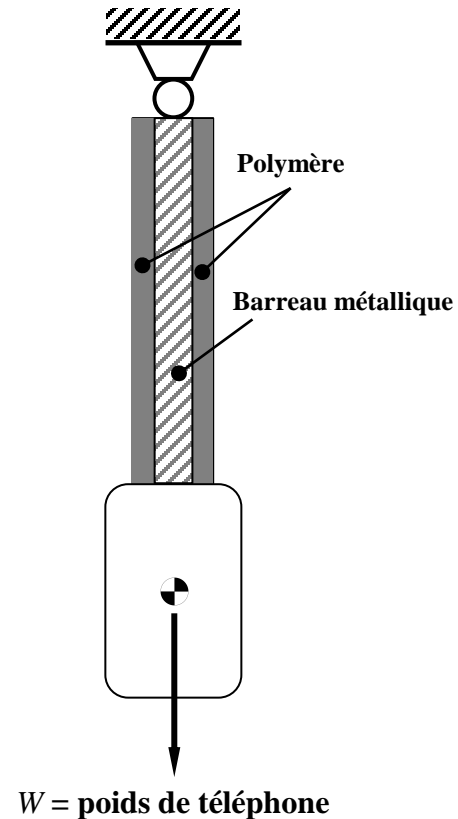
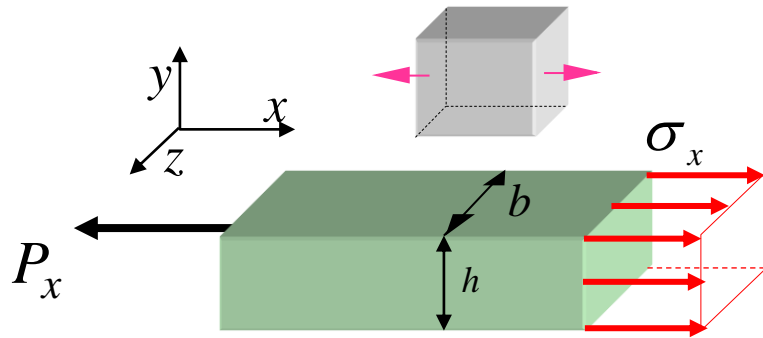
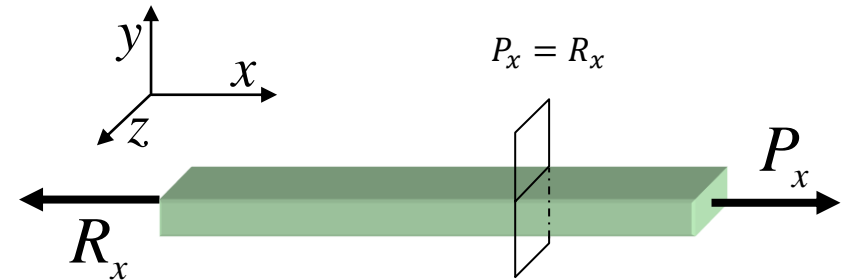


Schéma de l'étude

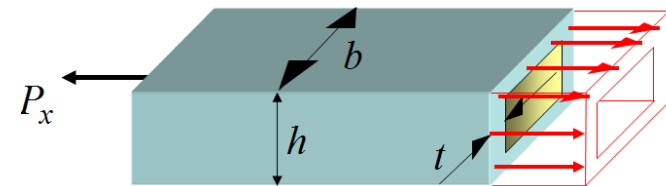
1.3: Chargement uniaxial

Chargement uniaxial, section rectangulaire



Section pleine

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A} \quad ; \quad A = b \cdot h$$



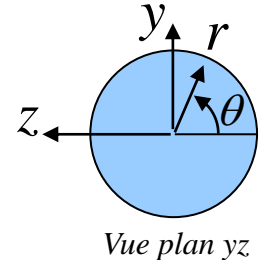
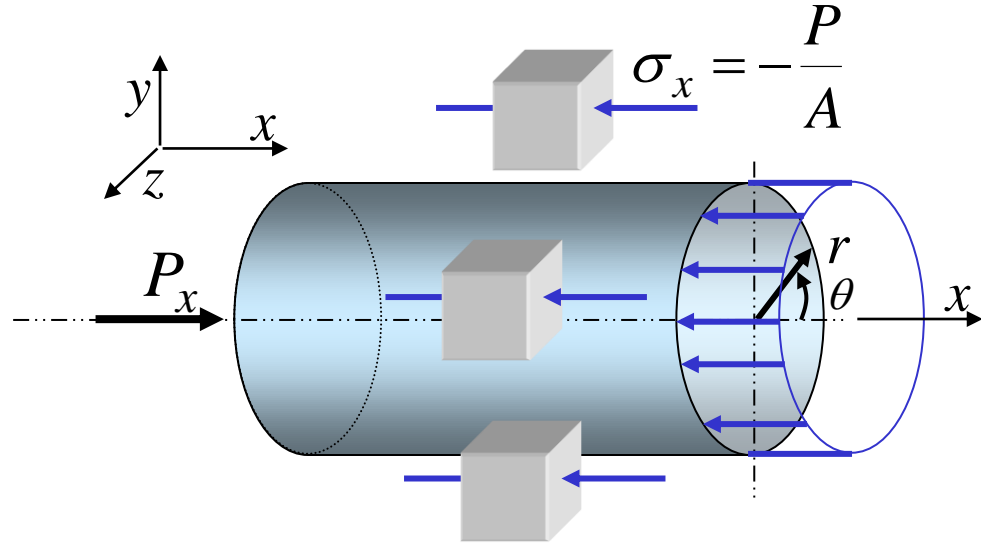
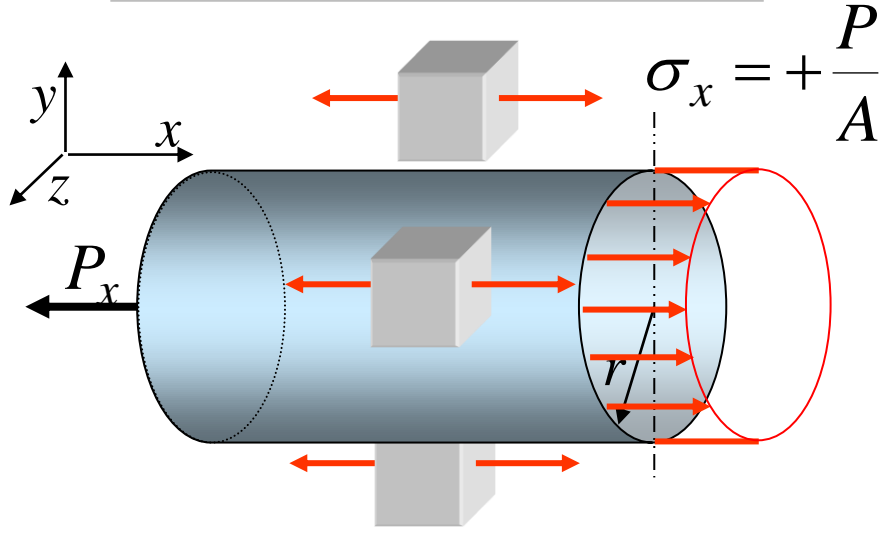
Section évidée

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A} \quad A = (b \cdot h) - [(b - 2t)(h - 2t)]$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

1.3: Chargement uniaxial

Chargement uniaxial, barreau circulaire plein



Pour un barreau plein: $A = \pi r^2$

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A}$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{x\theta} = \tau_{xr} = \tau_{\theta r} = 0$$

1.3: Chargement uniaxial

Cylindre à paroi mince sous pression

- Cas particulier de chargement uniaxial
- Important en génie mécanique



Source : primagaz.fr

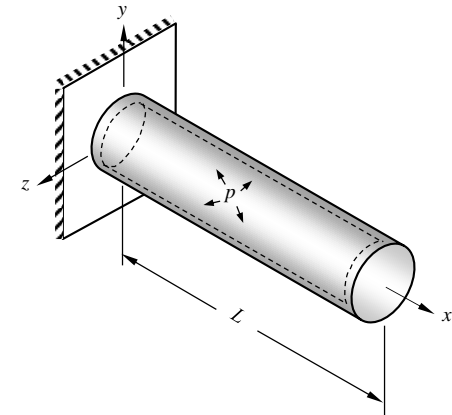


Schéma de l'étude

Phénomène physique

- Applications
 - Vérins pneumatiques et hydrauliques,
 - Tuyauterie de distribution d'eau, d'air comprimé ou de vapeur
 - Réservoirs sous pression tels que les chaudières thermiques, les échangeurs de chaleur, les réservoirs d'air comprimé

MEC3200 - Transmission de chaleur

MEC3210 - Systèmes de pompage, ventilation et compresseurs

MEC3350 - Systèmes hydrauliques et pneumatiques

1.3: Chargement uniaxial

Cylindre à paroi mince sous pression

- Rapport: rayon moyen (r_m) / épaisseur de la paroi (t) > 10
- Distribution de la contrainte tangentielle (σ_θ) est constante à travers la paroi
- Type:

OUVERT

Contrainte dans la direction x ,

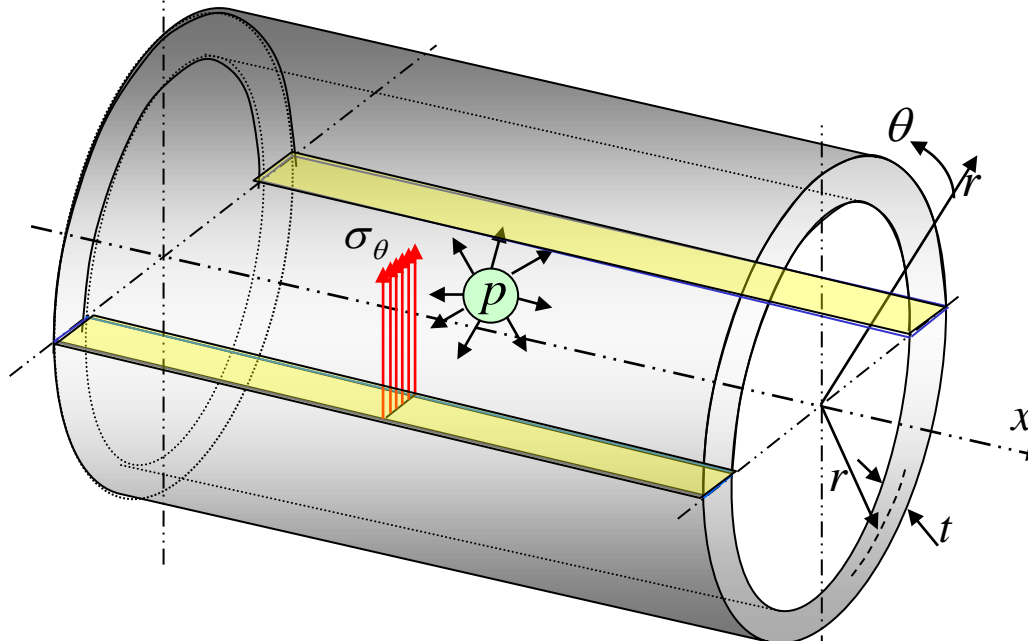
$$\sigma_x = 0$$

ou

FERMÉ

Contrainte dans la direction x ,

$$\sigma_x \neq 0$$



1.3: Chargement uniaxial

Cylindre **fermé** à paroi mince soumis à une pression interne p et à une force axiale F en tension

À la surface interne À la surface externe

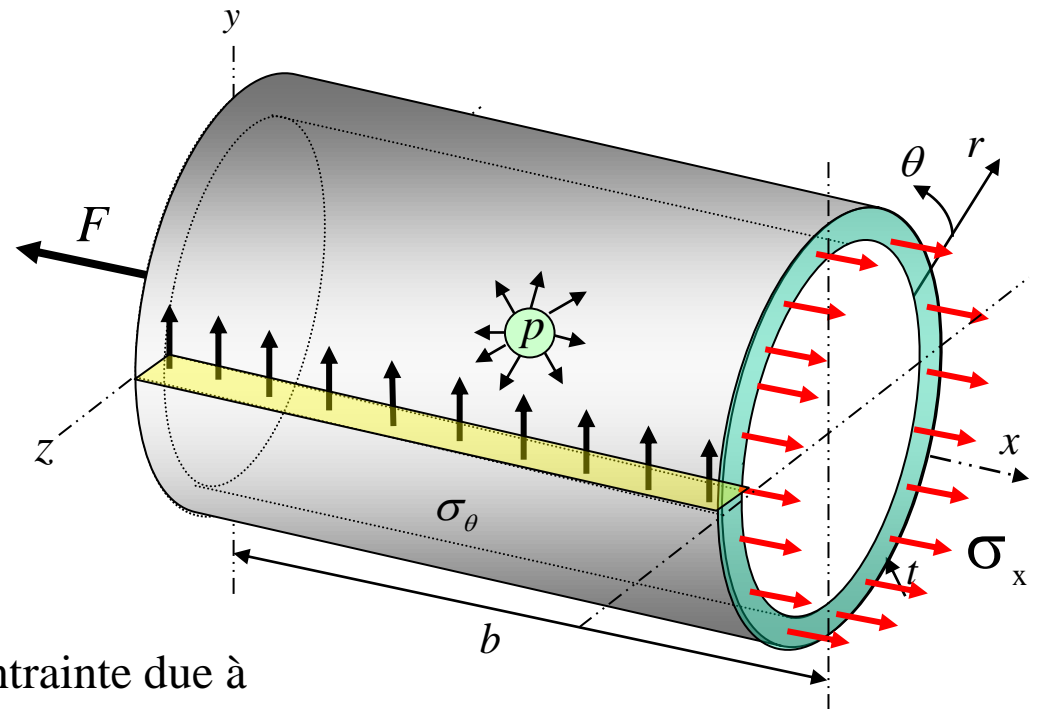
$$\sigma_r = -p \quad \text{ou} \quad 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{p r_m}{t}$$

$$\sigma_x = \underbrace{\frac{p r_m}{2t}} + \underbrace{\frac{F}{2\pi r_m t}}$$

Partie de la contrainte due à la pression

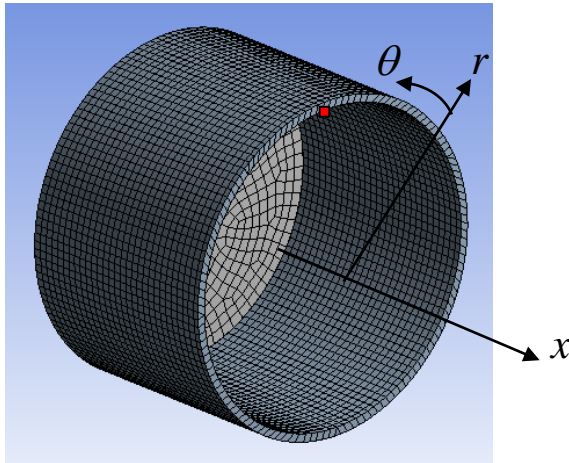
Partie de la contrainte due à la force extérieure F



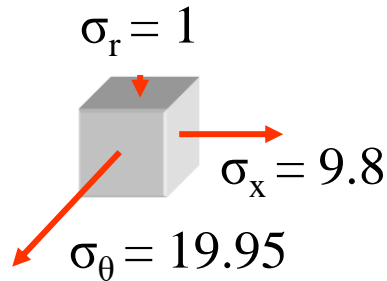
1.3: Chargement uniaxial

Vérification des formules par éléments finis (Ansys)

Paroi mince ($t = 4\text{mm}$)

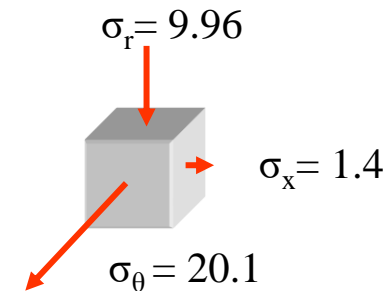
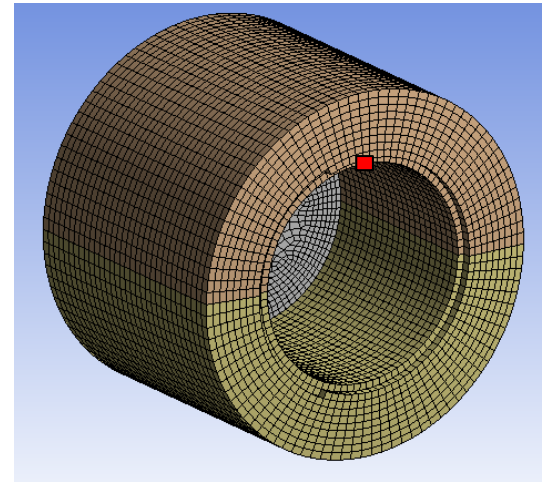


- $P = 1 \text{ MPa}$
- $r_m = 80\text{mm}$



Contrainte en MPa

Paroi épaisse ($t = 20\text{mm}$)



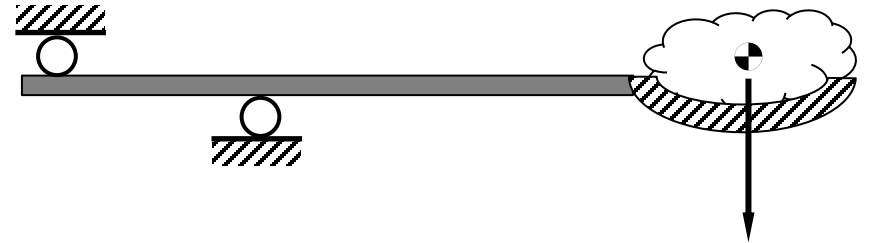
Valeurs prises sur la surface intérieure

1.4: Chargement de flexion



Phénomène physique

Source : montaugo.ca



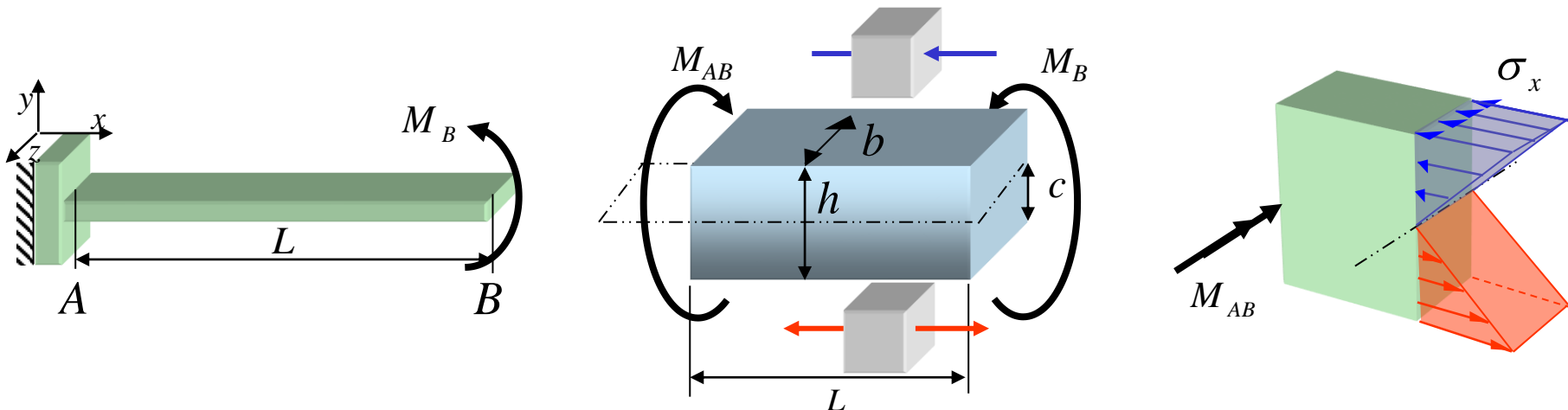
$W = \text{poids de la neige}$

Schéma de l'étude

1.4: Chargement de flexion

Flexion pure

- Moment concentré (M_B) sur une poutre rectangulaire pleine
- Moment interne (M_{AB}) qui engendre la contrainte; ici M_{AB} est égal à M_B
 - c = distance du plan neutre à la fibre extrême (ici, $c = h/2$)



Contraintes aux fibres extrêmes

$$\sigma_x = \pm \frac{M_{AB} c}{I_z} = \pm \frac{M_{AB}}{S_z}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$S_z = \frac{bh^2}{6}$$

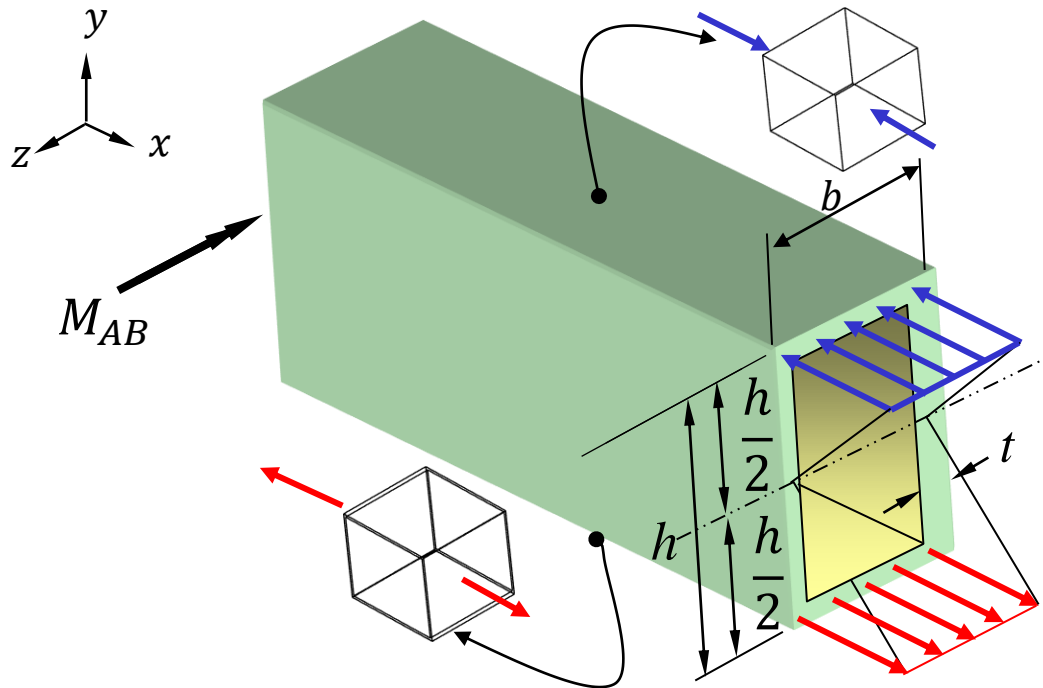
$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

1.4: Chargement de flexion

Flexion pure

- Moment concentré sur une poutre rectangulaire à paroi mince



Augmentation linéaire de la contrainte normale en fonction de la distance par rapport au plan neutre

$$\sigma_x = - \frac{M_{AB} y}{I_z}$$

Contraintes aux fibres extrêmes

$$\sigma_x = \pm \frac{M_{AB} c}{I_z}$$

où $c = \frac{h}{2}$

Rappel : Comment calculer I_z ?

Propriétés de surface

- Position du centroïde

Centres géométriques: Surfaces

Pour une plaque homogène d'épaisseur uniforme :

$$\Delta W = \rho g t \Delta A \quad W = \rho g t A$$

ρ = masse volumique du matériau, g = accélération gravitationnelle, t = épaisseur de la plaque

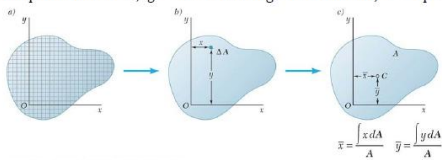


Figure 5.3 Centre géométrique d'une surface

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$$

À partir des équations d'équivalence :

$$\sum M_y : \bar{x} A = x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \dots + x_n \Delta A_n$$

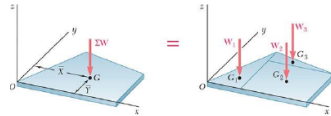
$$\sum M_x : \bar{y} A = y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \dots + y_n \Delta A_n$$

À la limite $dA \rightarrow 0$:

$$\bar{x} A = \int x dA \quad \bar{y} A = \int y dA$$

Figures composées

Pour obtenir les coordonnées \bar{X} et \bar{Y} du centre de gravité G de la plaque, on subdivise la plaque en géométries simples:

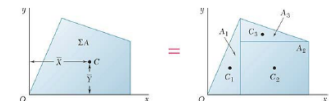


$$\sum M_x : \bar{X} \Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$

$$\sum M_y : \bar{Y} \Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

Figure 5.9 Centre de gravité d'une plaque composée

Pour une plaque homogène d'épaisseur uniforme, le centre de gravité G coïncide avec le centre géométrique C de sa surface.



$$Q_x = \bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$

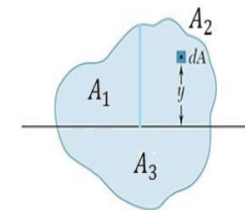
$$Q_y = \bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

Figure 5.10 Centre géométrique d'une surface composée

- Second moment de surface

Surfaces composées

Considérons une surface A composée de plusieurs surfaces A_1, A_2, A_3, \dots



On peut écrire:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

$$\int y^2 dA = \int y^2 dA_1 + \int y^2 dA_2 + \int y^2 dA_3 + \dots$$

$$I_x(A) = I_x(A_1) + I_x(A_2) + I_x(A_3) + \dots$$

Théorème des axes parallèles

Considérons le second moment d'une surface A par rapport à l'axe AA' . En ajoutant un axe BB' passant par le centre géométrique, on a $y = y' + d$ où d correspond à la distance entre les axes AA' et BB' .

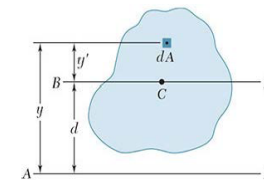


Figure 9.9

En remplaçant y dans l'équation du second moment de surface on trouve:

$$I_{AA'} = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

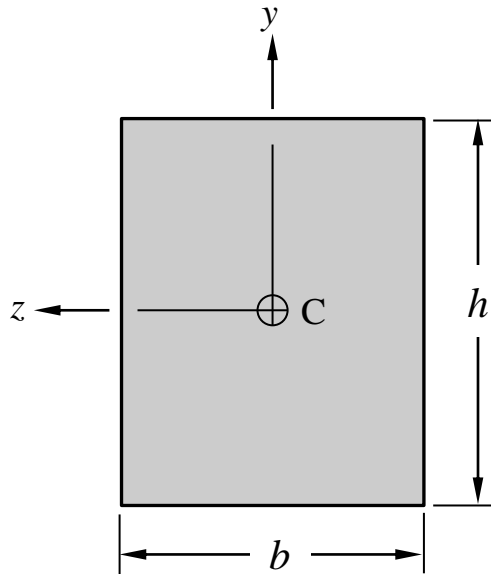
$$Q_{BB'} = \int y' dA = 0$$

$$I = \bar{I} + A d^2$$

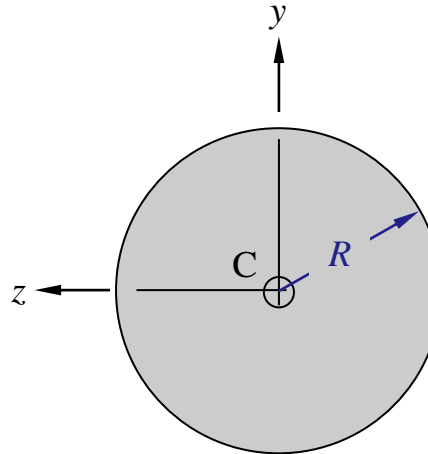
MEC1410: Cours #7

MEC1410: Cours #11

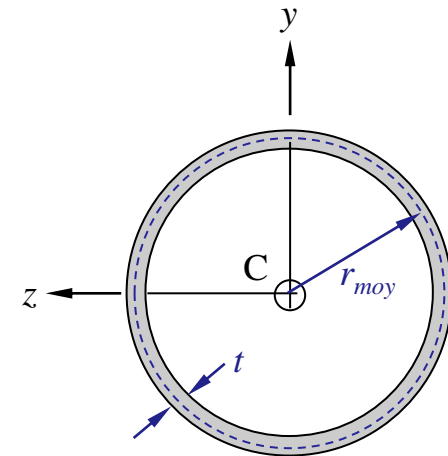
Propriétés de surface



Section rectangulaire



Section circulaire pleine



Section circulaire à paroi mince

Second moment de surface

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_z = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_z = I_y = \pi r_m^3 t$$

Second moment polaire

$$J = I_z + I_y$$

$$J = \frac{\pi R^4}{2}$$

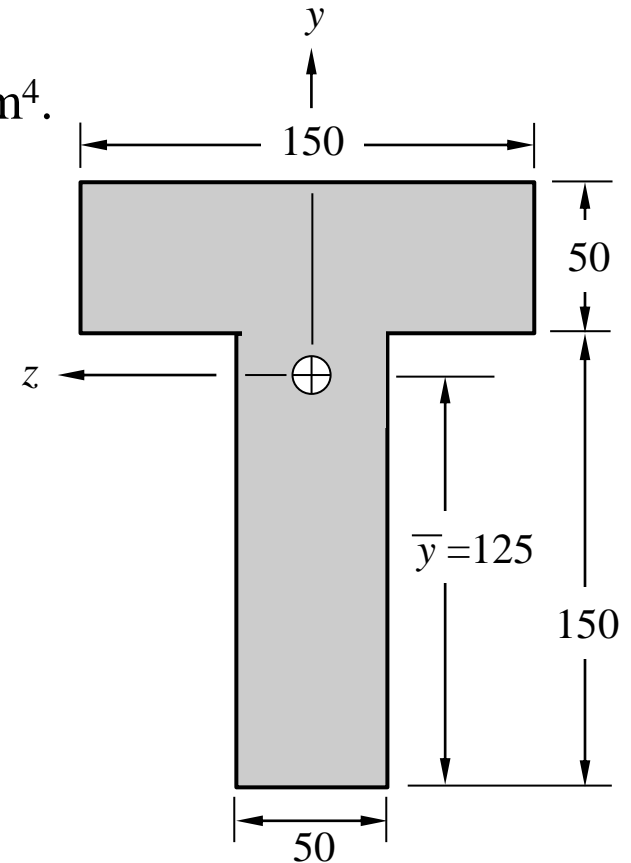
$$J = 2\pi r_m^3 t$$

Propriétés de surface

(Exercice 1)

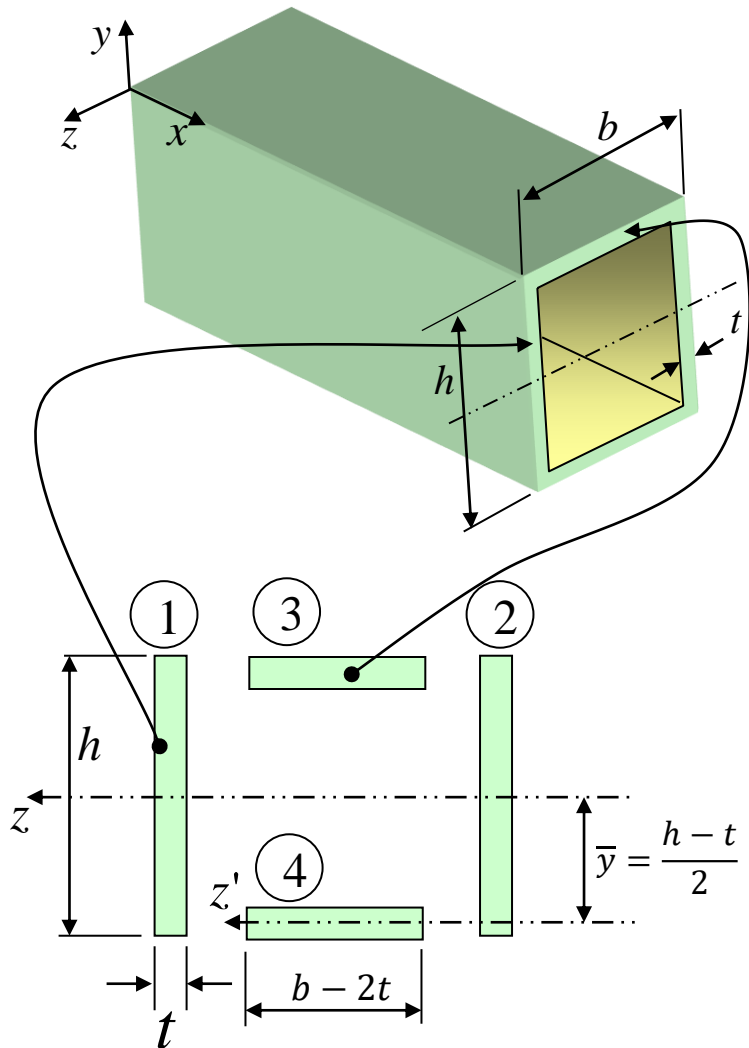
Pour la section de la poutre représentée sur la figure ci-dessous, vérifiez que :

- a) La position de centroïde $\bar{y} = 125 \text{ mm}$;
- b) Le second moment de surface $I_z = 53,125 \times 10^6 \text{ mm}^4$.



Dimensions en mm

Propriétés de surface



$$I_z = I_{z1+2} + I_{z3+4}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow I_{z1+2} = 2 \frac{th^3}{12}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \Rightarrow I_{z3+4} = 2 \left(I_{z'} + \bar{y}^2 A \right)$$

$$I_{z3+4} = 2 \left(\frac{(b-2t)t^3}{12} + \left(\frac{h-t}{2} \right)^2 (b-2t)t \right)$$

$$I_z = \frac{1}{6} (th^3 + (b-2t)t^3 + 3(h-t)^2(b-2t)t)$$

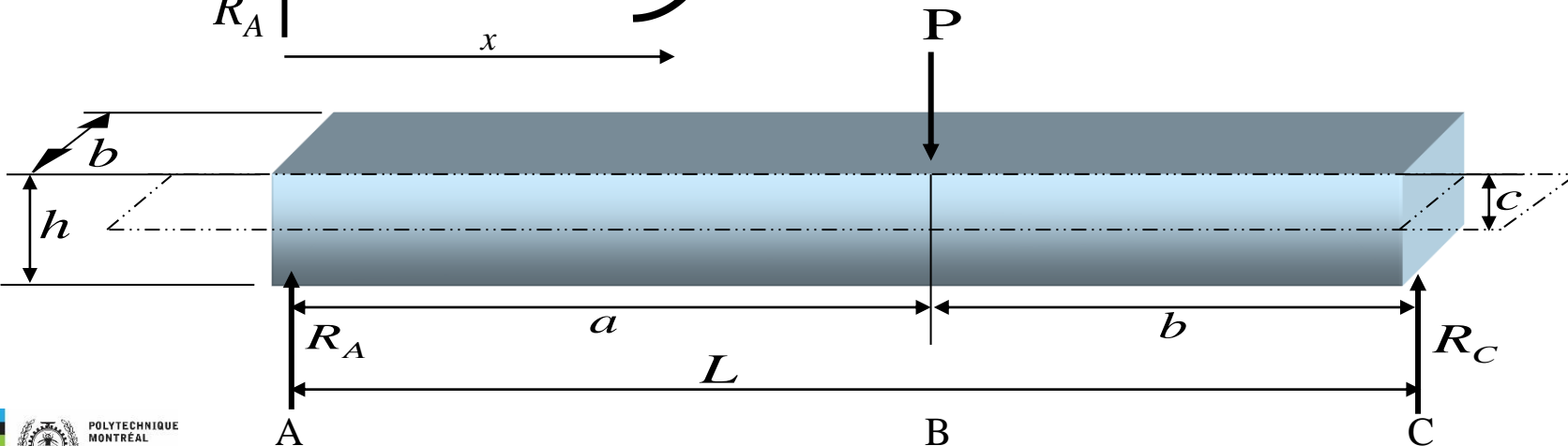
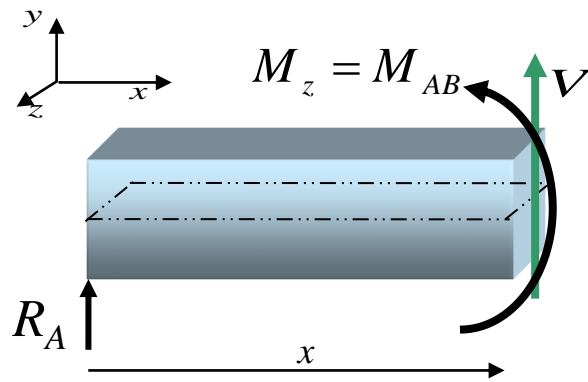
1.4: Chargement de flexion

Flexion ordinaire

Charge concentrée sur une poutre ayant des appuis simples

Après avoir calculer les réactions R_A et R_B la procédure de solution est :

- 1- Tracer le diagramme des efforts tranchants
- 2- Tracer le diagramme des moments fléchissants (M_z)
- 3- Calculer les contraintes σ_x et τ_{xj}

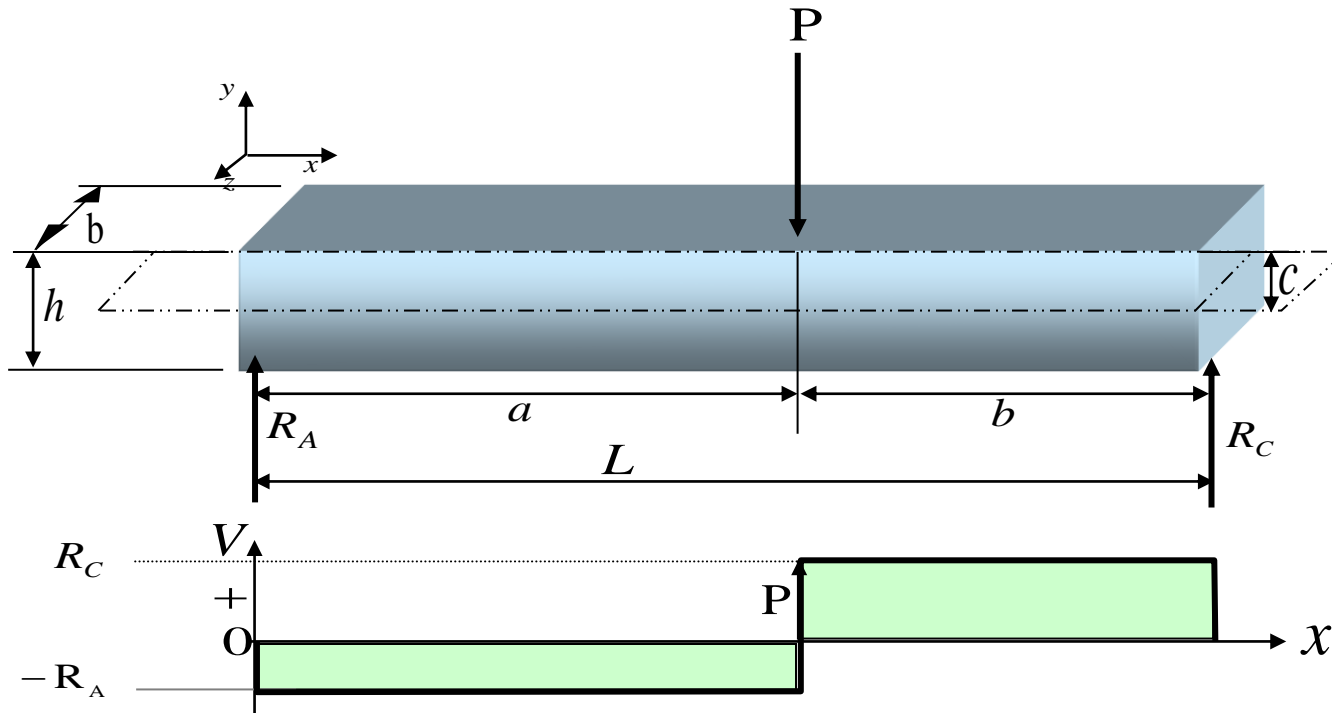


1.4: Chargement de flexion

Flexion ordinaire

1- Tracer le diagramme des efforts tranchants

Le diagramme des efforts tranchants varie d'une quantité égale à - (*la force concentrée*) à l'endroit où celle-ci est appliquée



$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$\Delta V = -q \Delta x$$

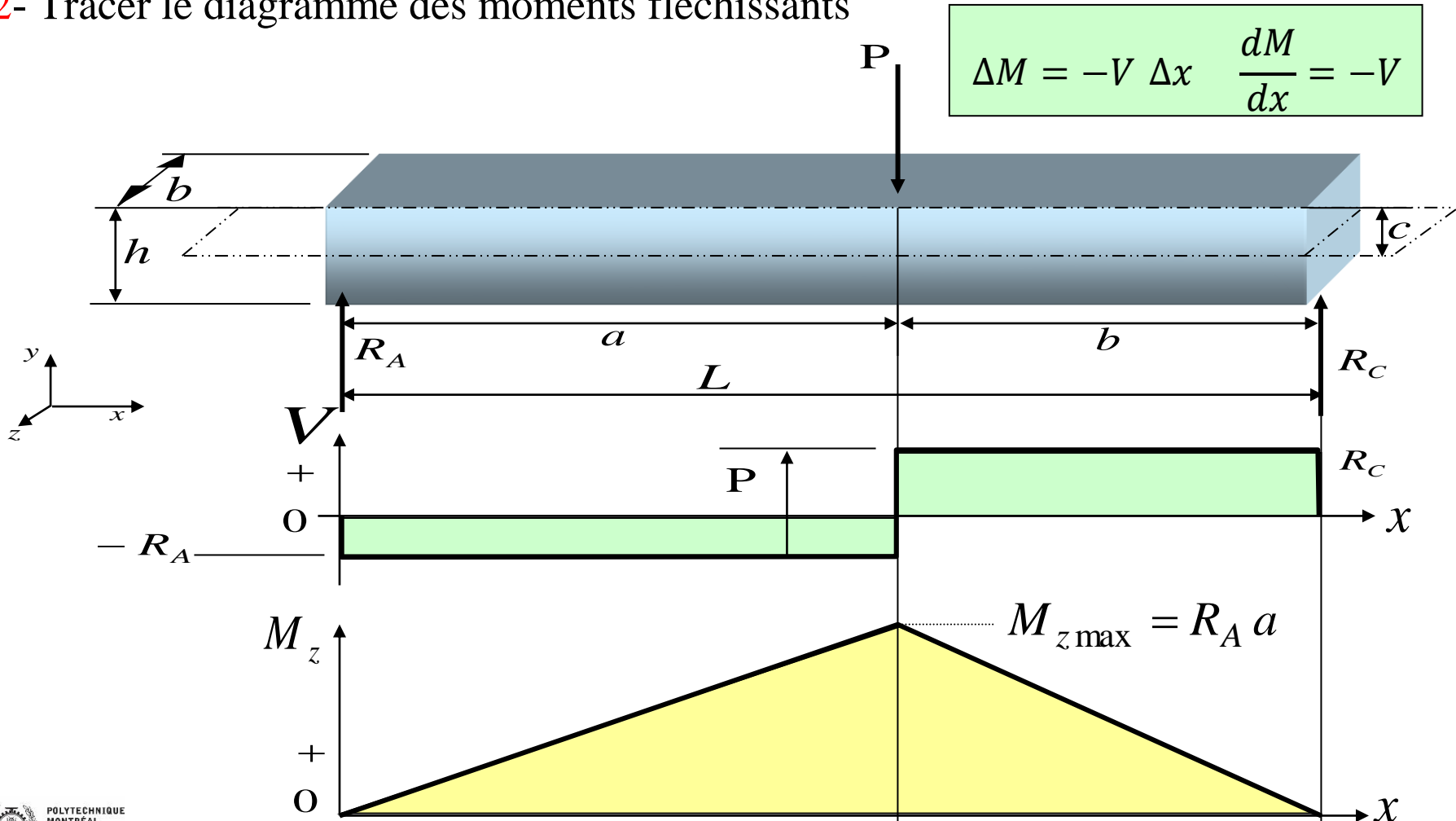
$$\frac{dM}{dx} = -V$$

$$\Delta M = -V \Delta x$$

1.4: Chargement de flexion

Flexion ordinaire

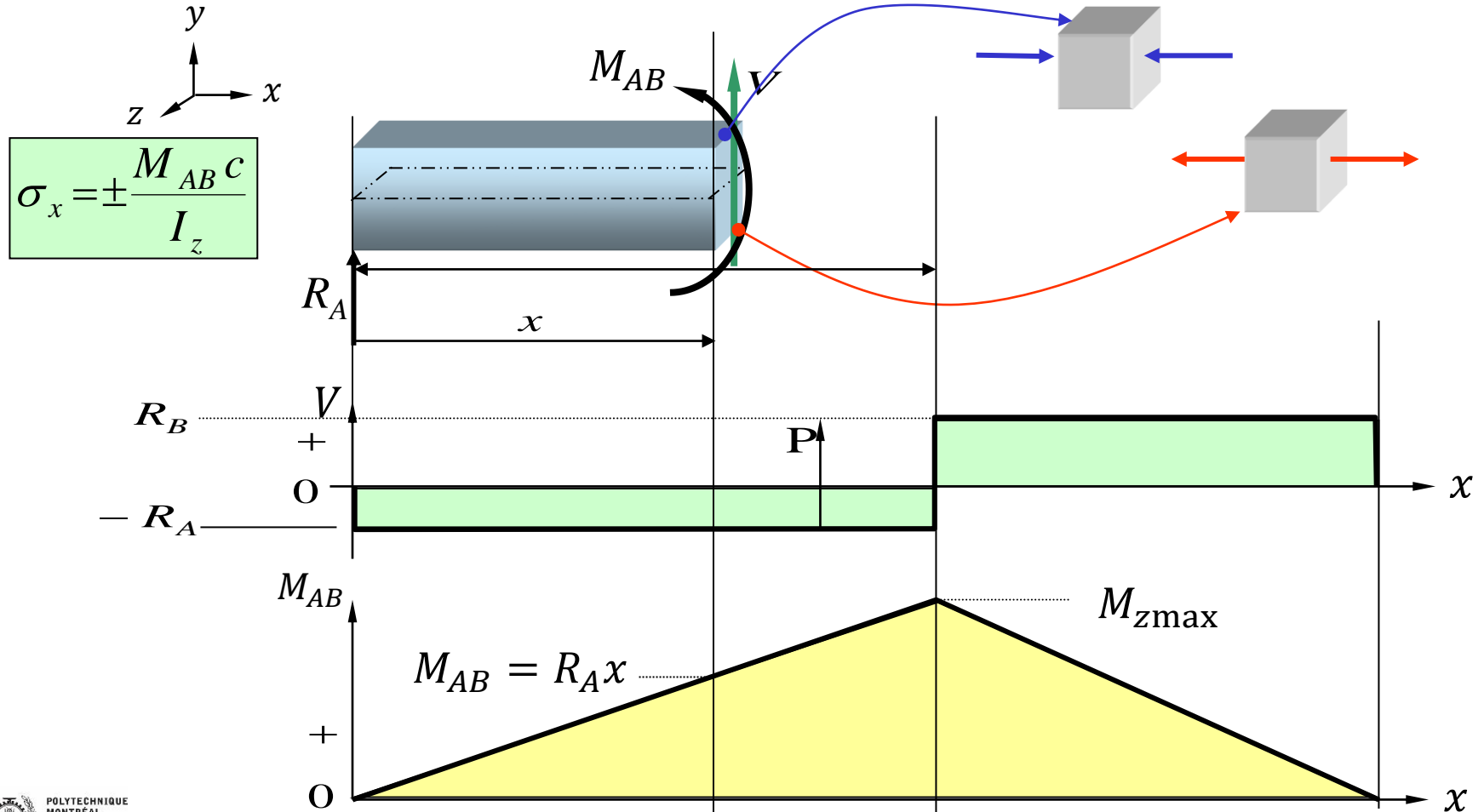
2- Tracer le diagramme des moments fléchissants



1.4: Chargement de flexion

3 - Calculer la contrainte σ_x Flexion ordinaire

On fait une coupe de la pièce à une distance x de l'appui gauche

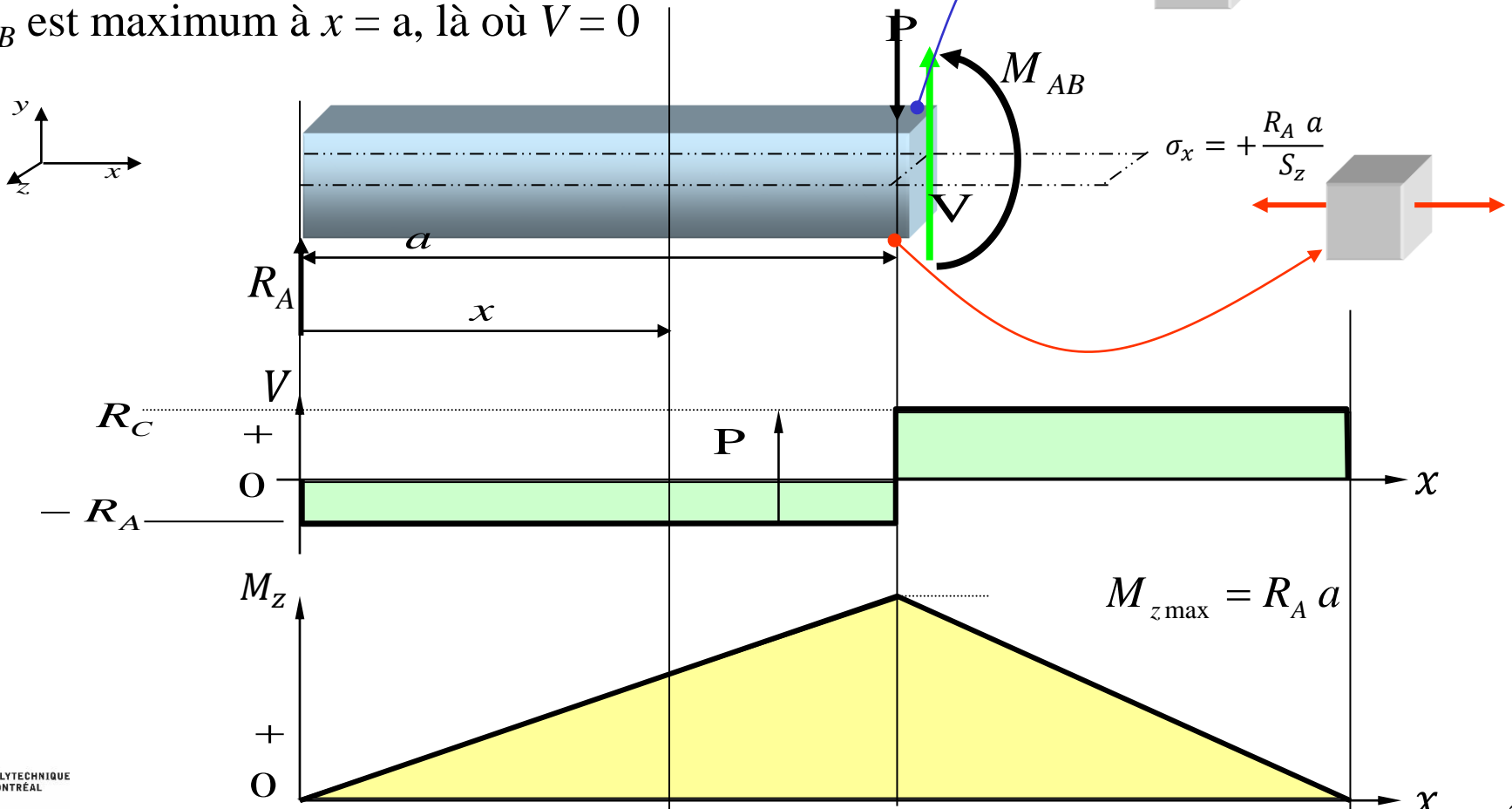


1.4: Chargement de flexion

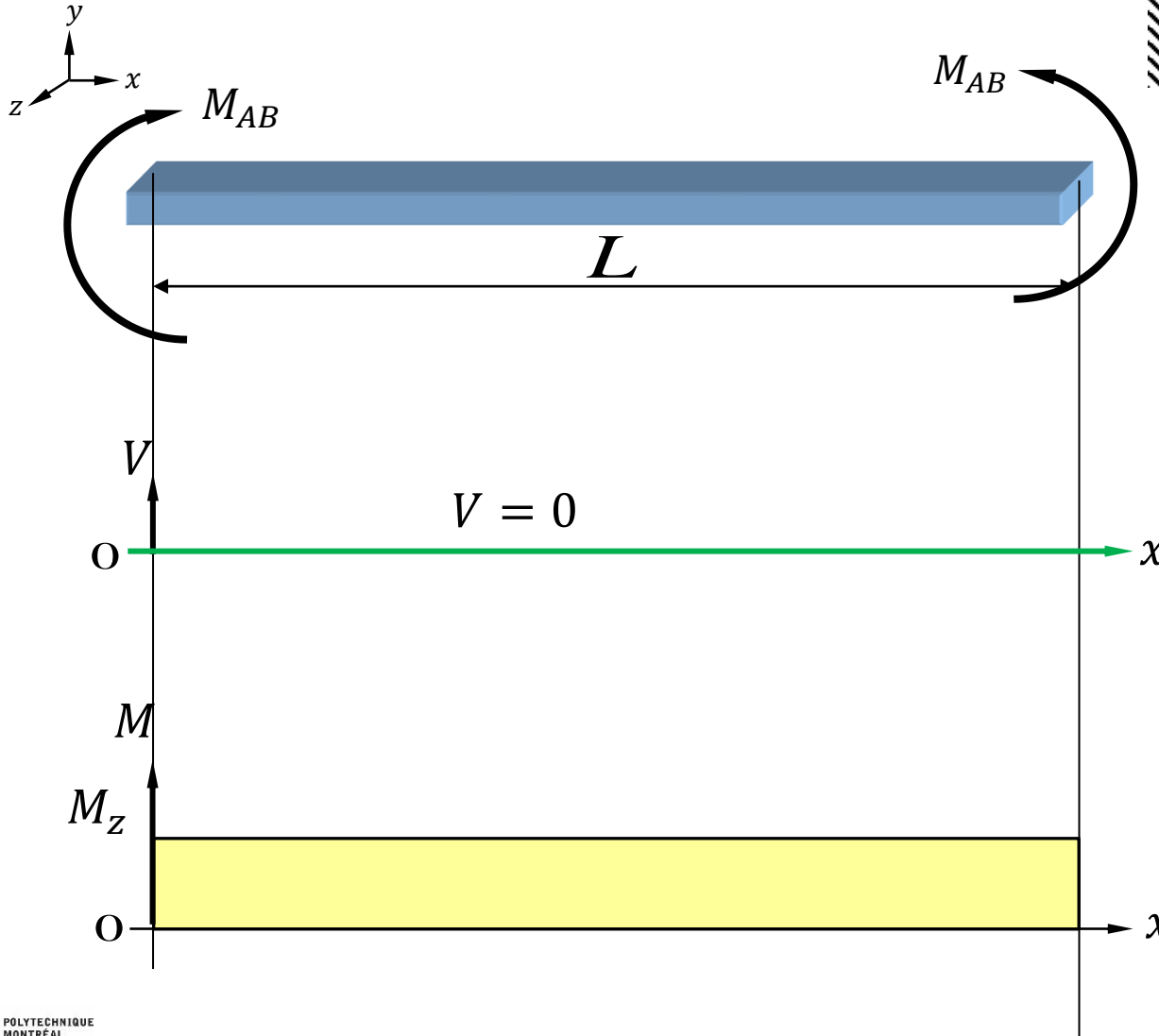
Flexion ordinaire

3- Calculer la contrainte σ_x au point critique

M_{AB} est maximum à $x = a$, là où $V = 0$



Exemple 1: Flexion pure



$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$\Delta V = -q \Delta x$$

$$\frac{dM}{dx} = -V$$

$$\Delta M = -V \Delta x$$

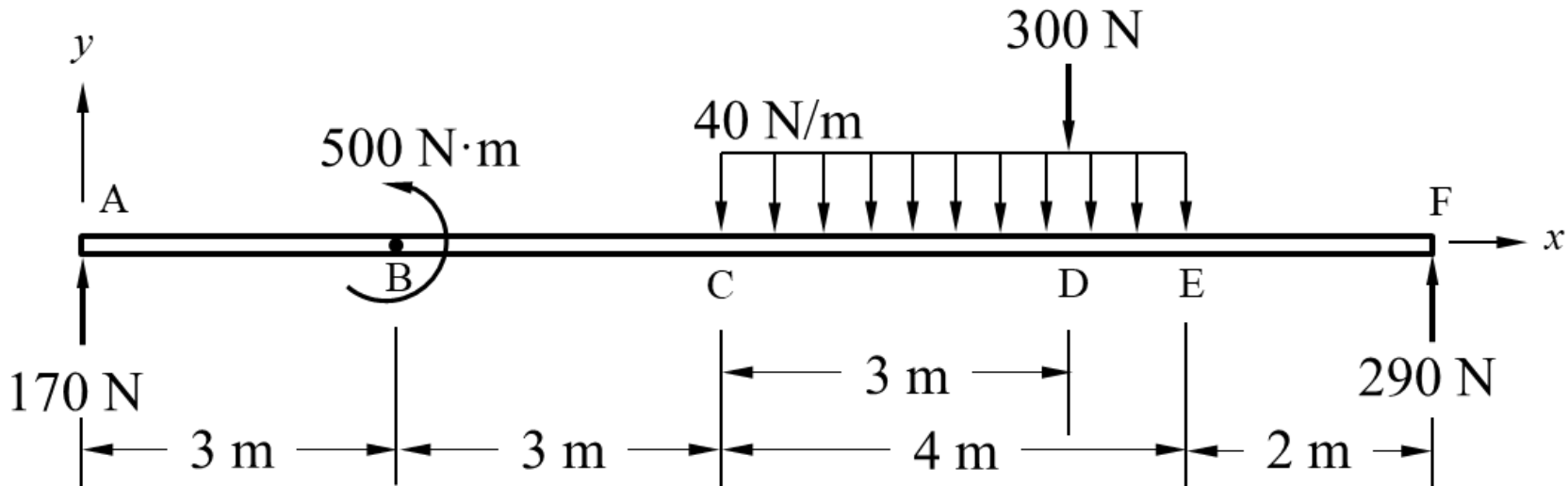
1.4: Chargement de flexion

Exercice 2

Pour la poutre illustrée ci-dessous, les réactions aux appuis A et F ont été calculées; leurs valeurs sont indiquées sur la figure :

$$R_A = 170 \text{ N} ; R_F = 290 \text{ N}$$

- a) Tracez le diagramme de l'effort tranchant en indiquant les valeurs importantes;
- b) Complétez le diagramme du moment fléchissant; en indiquant les valeurs importantes.

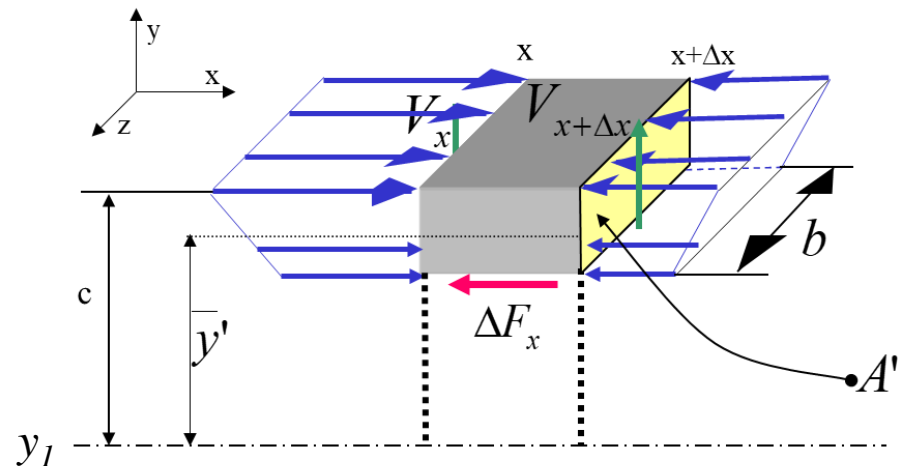


1.4: Chargement de flexion

Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant

En écrivant les équations d'équilibre sur un élément de section, on peut démontrer que la formule pour le calcul de la contrainte de cisaillement due à un effort tranchant est la suivante :

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z b} = \frac{V_y \overline{A' y'}}{I_z b}$$



b est mesuré à y_1 (surface glissante)

I_z est le second moment de toute la section par rapport à z

Q est le premier moment de surface

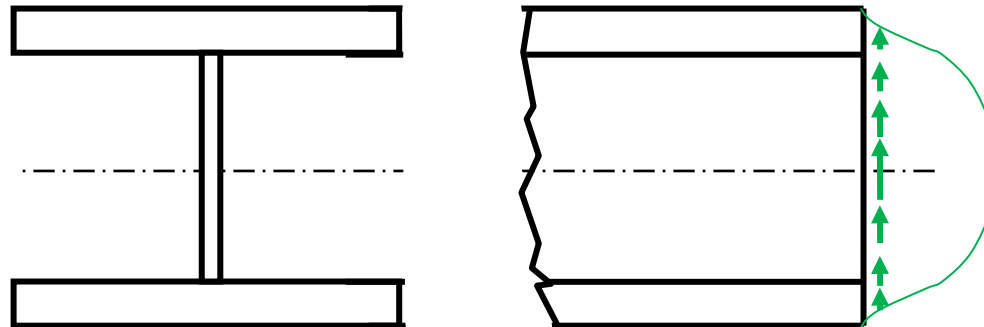
1.4: Chargement de flexion

Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant

La figure ci-dessous illustre la répartition en intensité des contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant dans un profilé en I.

On remarque :

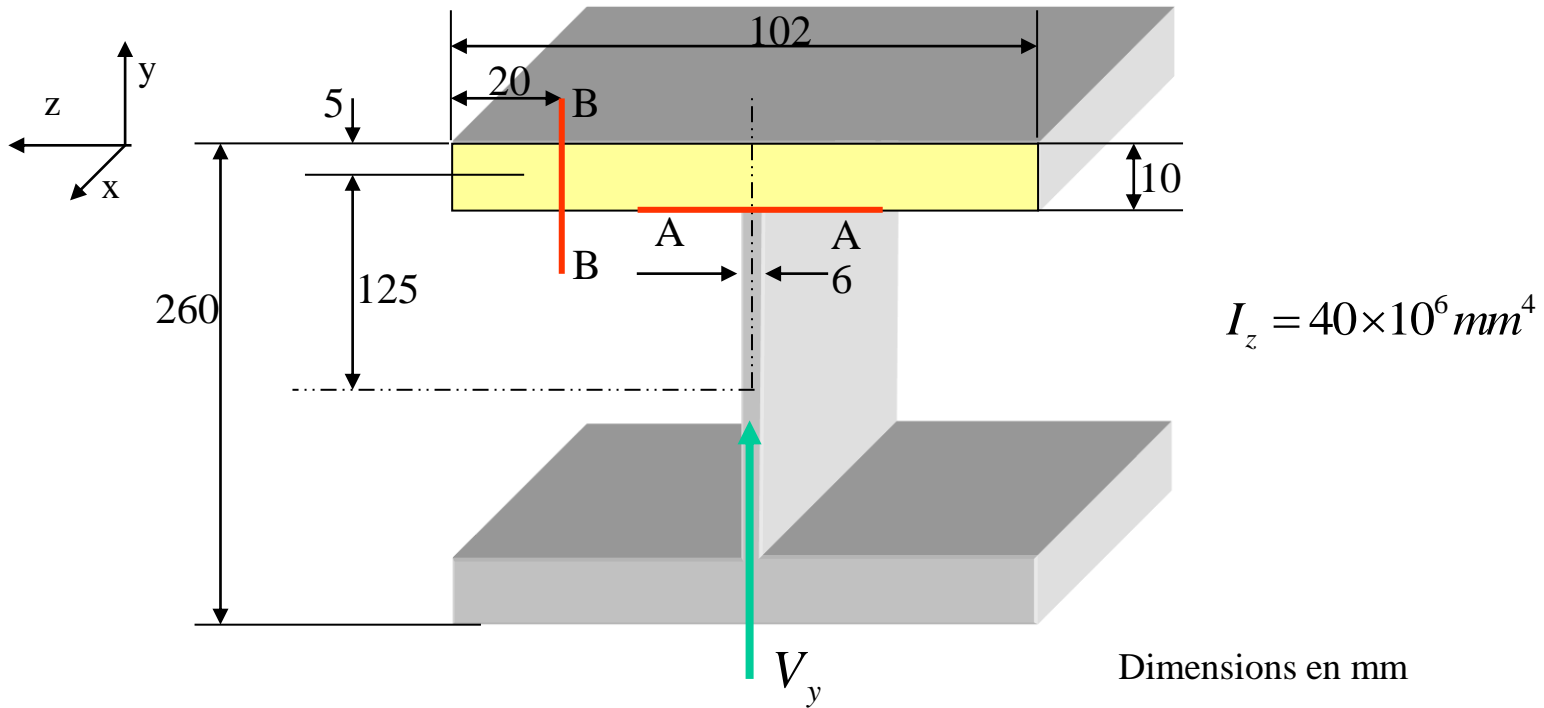
- les contraintes de cisaillement sont nulles aux fibres extrêmes de la poutre
- la contrainte de cisaillement est maximale à l'axe neutre de la poutre
- la majeure partie de l'effort tranchant est reprise dans l'âme de la poutre
- les contraintes de cisaillement sont relativement constantes dans l'âme



1.4: Chargement de flexion

Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant

Exemple : Calculer les contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant V_y en A-A et en B-B :



Section A-A est dans l'âme de la poutre, sous la semelle supérieure.

Section B-B est dans la semelle supérieure, à 20 mm de l'extrémité gauche.

1.4: Chargement de flexion

Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant

À la section d'étude A-A :

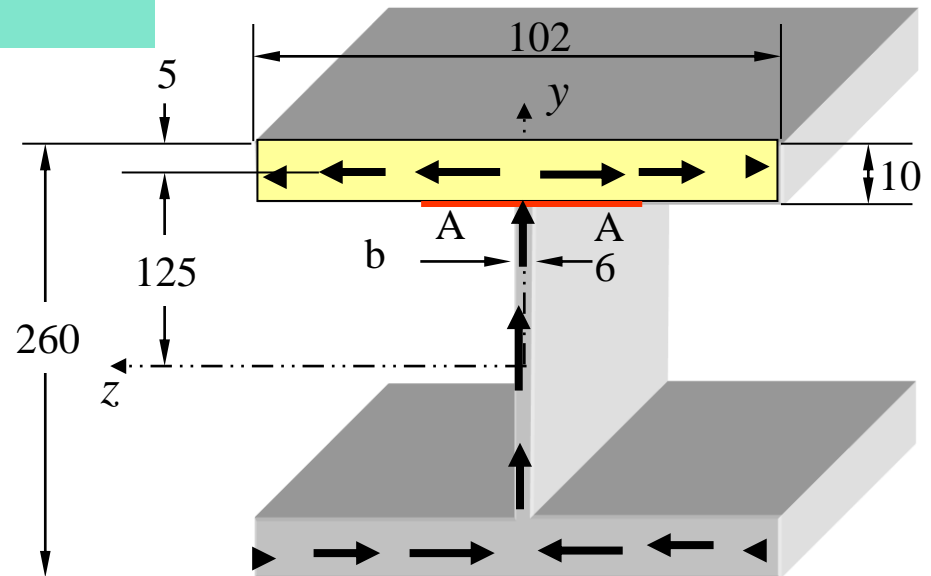
La contrainte de cisaillement se calcule :

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z b}$$

où $Q =$ le premier moment de l'aire de la section de la poutre qui est au dessus de la section d'étude par rapport à l'axe neutre, soit

$$Q = A' \cdot \bar{y}' = (102 \cdot 10) \cdot 125 = 127,5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

et $b = 6 \text{ mm}$

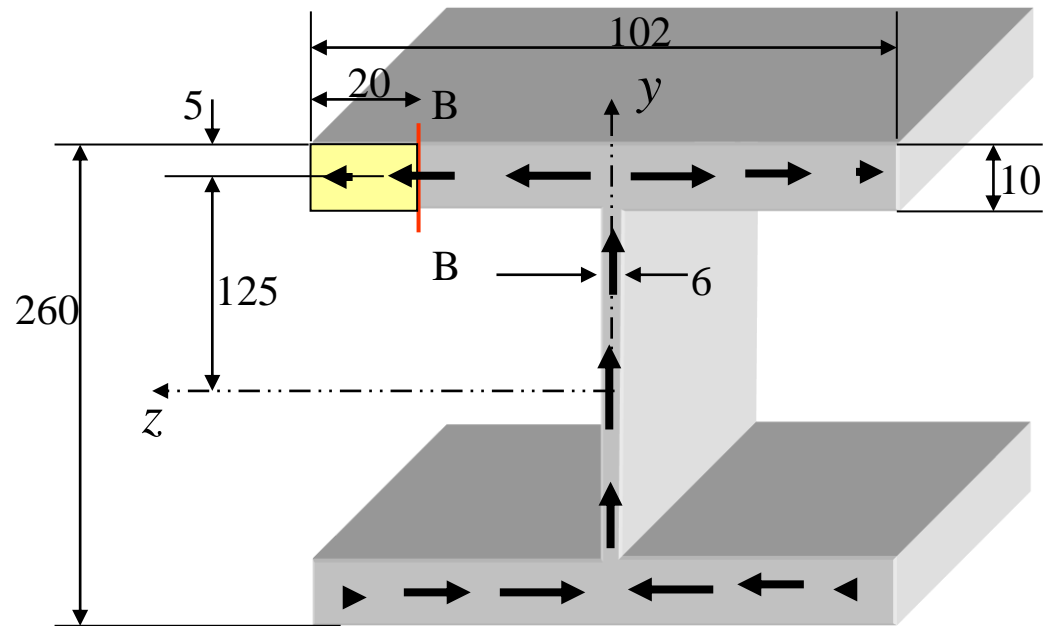


1.4: Chargement de flexion

Contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant

$$\tau_{xz} = \frac{V_y Q}{I_z b}$$

À la section d'étude B-B :



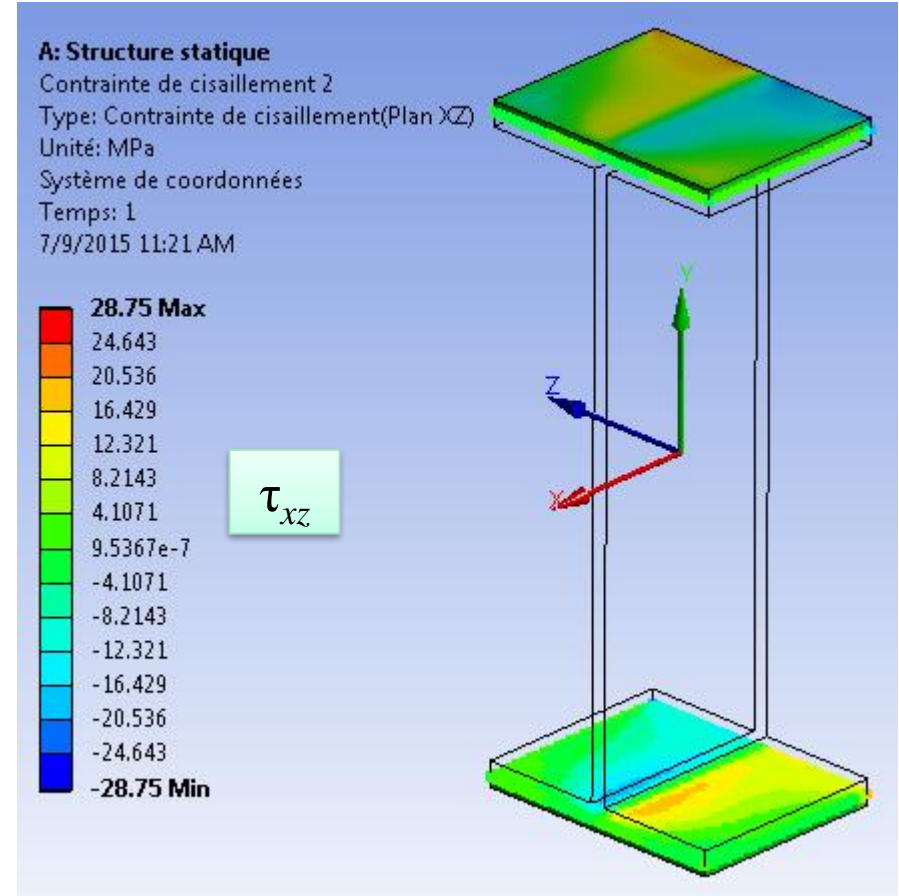
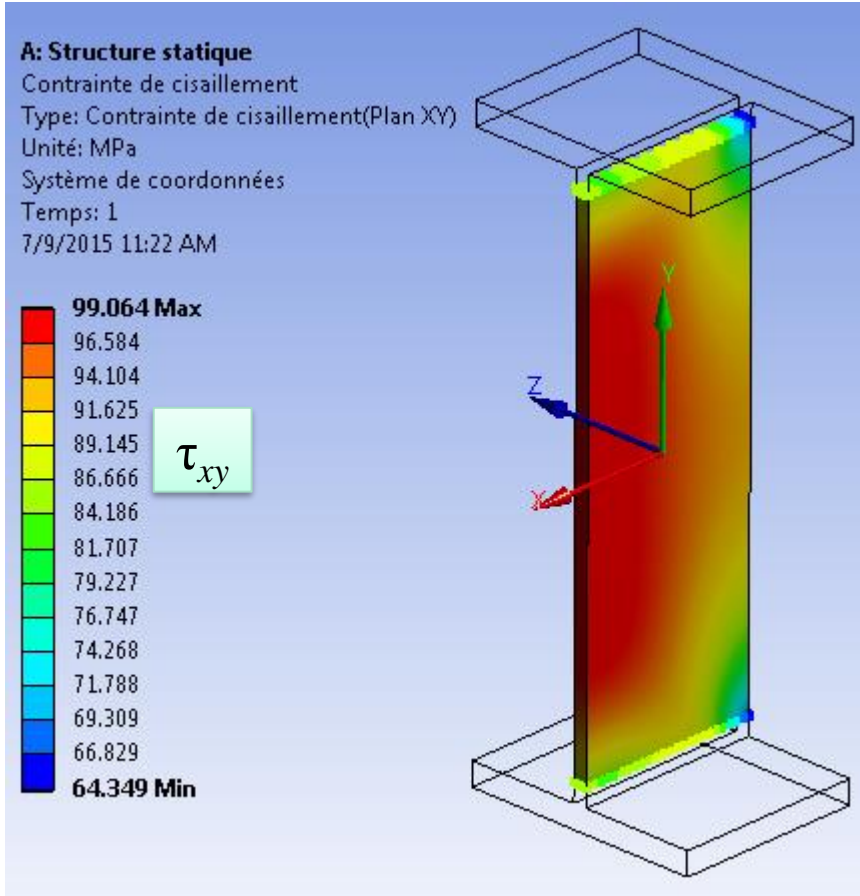
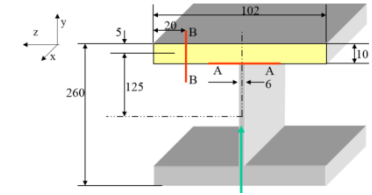
$$Q = A' \cdot \bar{y}' = (20 \cdot 10) \cdot 125 = 25 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

et

$$b = 10 \text{ mm}, \text{ l'épaisseur de la semelle}$$

Résultats FEM

Force de cisaillement $V_y = 142.4 \text{ kN}$



1.5: Chargement de torsion



Source: mikrantod.com

Phénomène physique

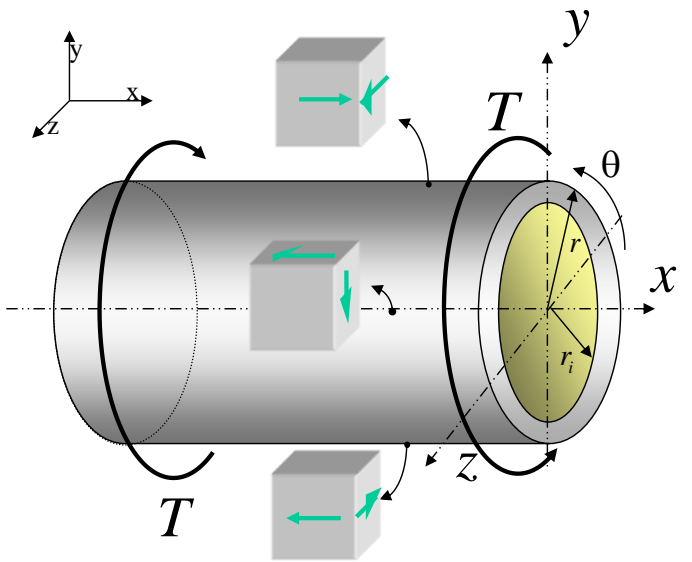
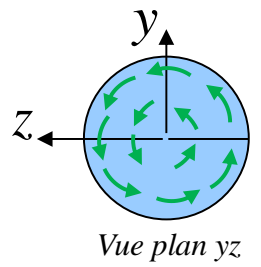
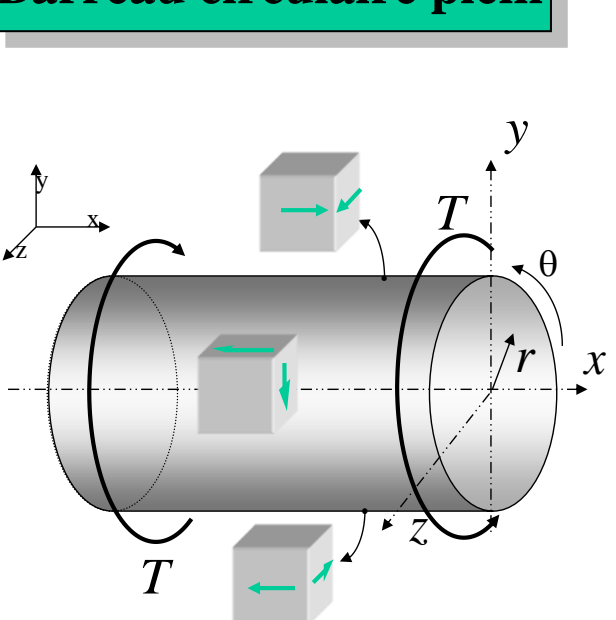


Schéma de l'étude

1.5: Chargement de torsion

Barreau circulaire plein

Tube circulaire



$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

J : second moment polaire
(constante de torsion)

$$J = \frac{\pi(r_e^4 - r_i^4)}{2}$$

$J = 2\pi r^3 t$
où r est le rayon moyen

Contrainte de cisaillement à la surface externe

$$|\tau_{x\theta}| = \left| \frac{Tr}{J} \right|$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_r = \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{xr} = \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

1.5: Chargement de torsion

Exercice 3

Le réservoir à paroi mince ABC encastré-libre (voir figure a) est chargé à son extrémité libre C selon les sens montrés. Les chargements externes sont les suivants :

$$p = 4,5 \text{ MPa} ; F = 90,48 \text{ kN} ; T = 23,255 \text{ kN.m} ; M_y = 10,465 \text{ kN.m} ; M_z = 2,907 \text{ kN.m}.$$

La section du tube est montrés sur la figure b).

- Déterminez l'état de contrainte complet au point B₁ (voir figures a et b).
- Illustrez cet état de contrainte sur l'élément montré à la figure c).

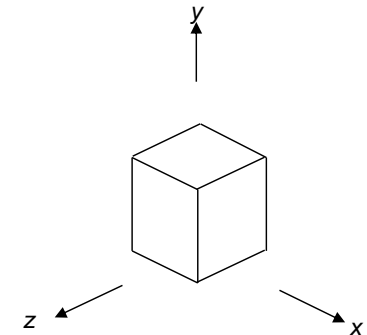
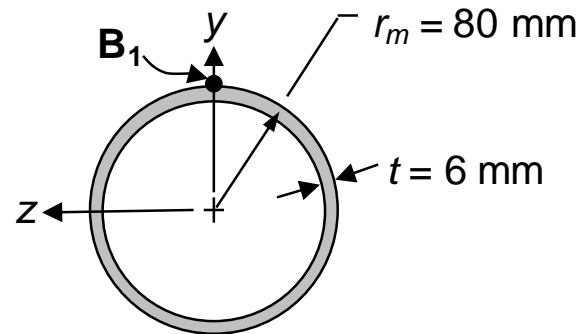
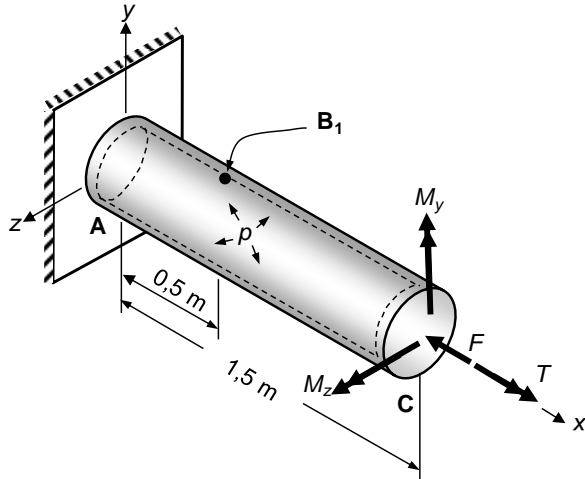


Fig. a) Tube à paroi mince sous pression

Fig. b) Section du tube

Fig. c) Élément infinitésimal B₁

1.5: Chargement de torsion

Section fermée

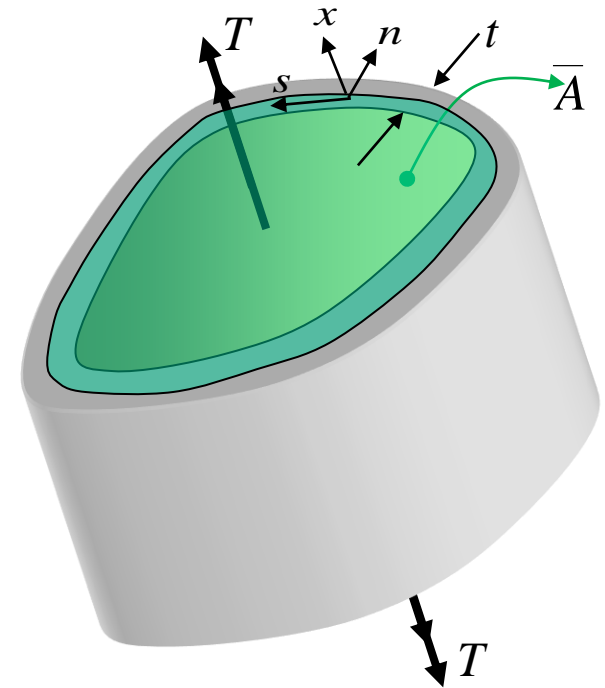
$$\tau_{xs} = \frac{T}{2 \bar{A} t}$$

T : représente le moment interne obtenu à partir de DCL et de l'équation d'équilibre.

Note : Pour obtenir la valeur de la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{xs,max}$, il faut prendre la valeur minimale de l'épaisseur t_{min} .

\bar{A} : est l'aire à l'intérieur du périmètre moyen de la section

On parle d'une section à paroi mince lorsque le rapport entre la longueur et l'épaisseur est égal ou supérieur à 10 : $\frac{L}{t} \geq 10$

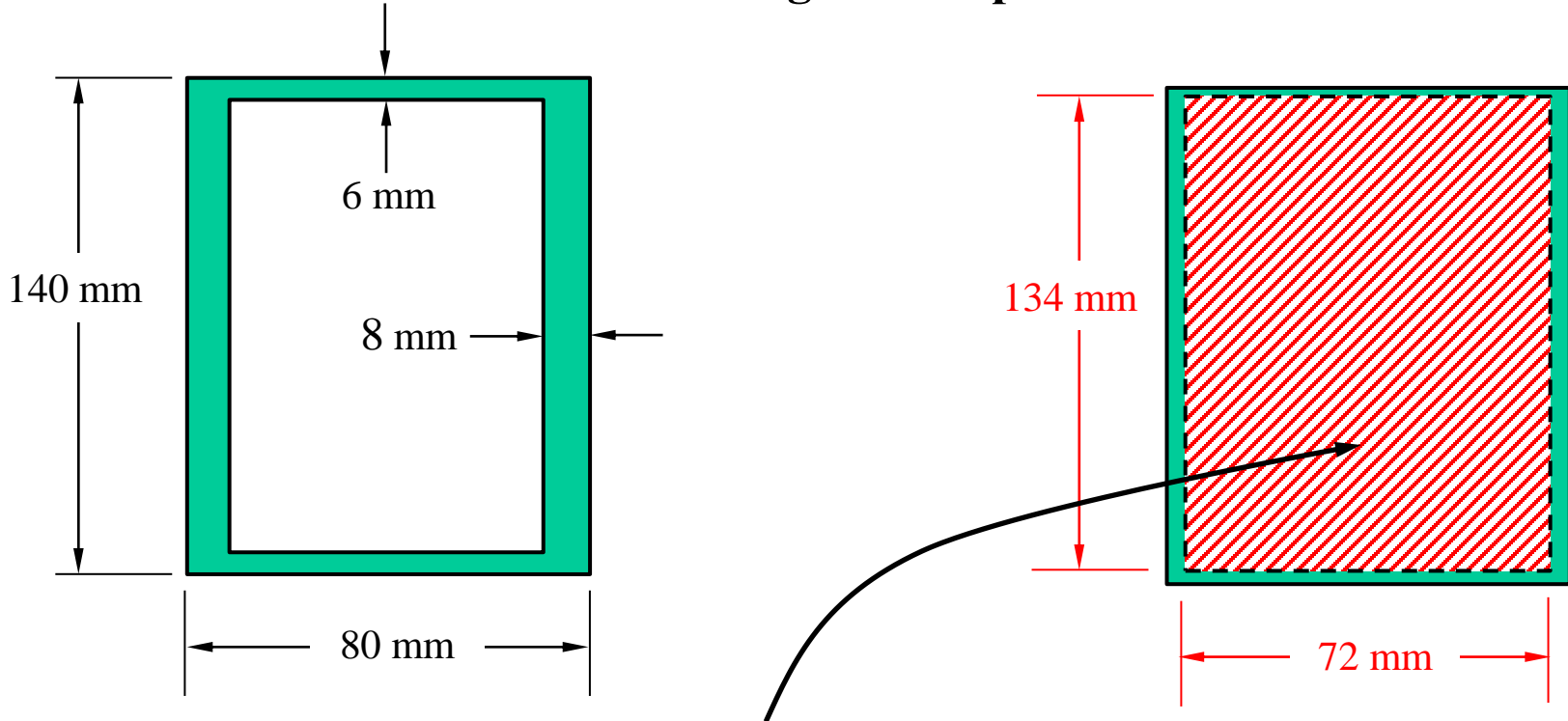


1.5: Chargement de torsion

Section fermée

Comment calculer \bar{A} ?

Cas d'un tube rectangulaire à paroi mince

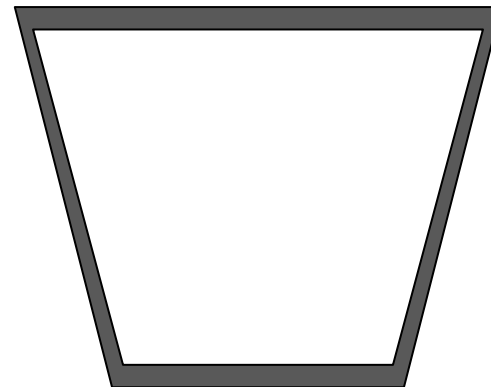
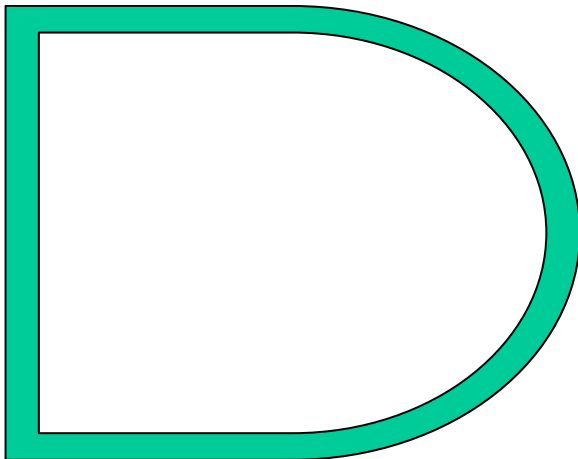
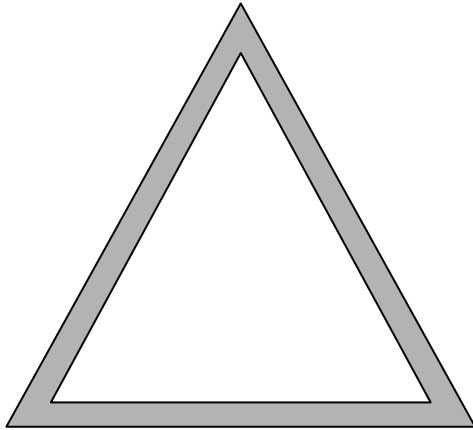


$$\bar{A} = (134) \times (72) = 9648 \text{ mm}^2$$

$$t_{min} = 6 \text{ mm}$$

1.5: Chargement de torsion

Exemples de section fermée



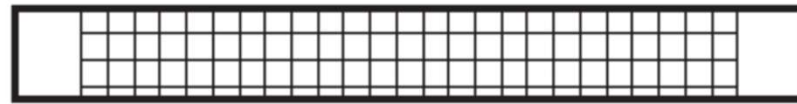
1.5: Chargement de torsion

Déformation observée en torsion

Dans un barreau circulaire

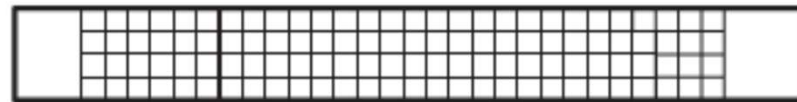
$$\tau_{x\theta}$$

$$\theta \equiv y \quad \text{ou} \quad \theta \equiv z$$



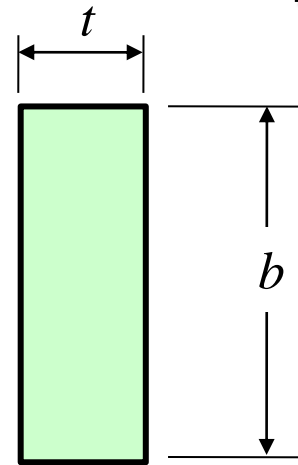
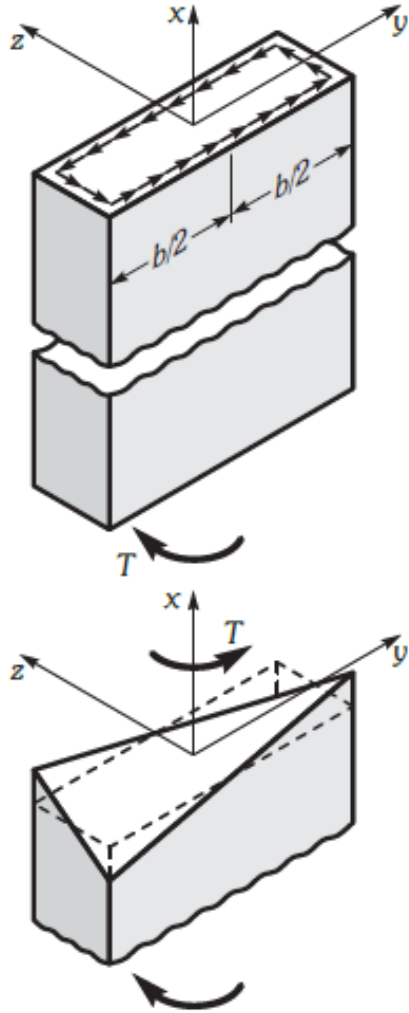
Dans un barreau prismatique

$$\tau_{xy} \quad \text{ou} \quad \tau_{xz}$$



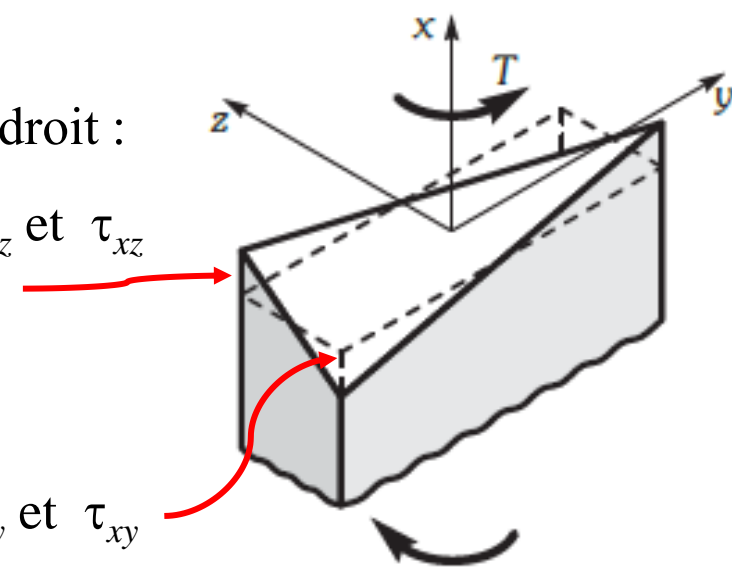
1.5: Chargement de torsion

Déformations de cisaillement pour section prismatique

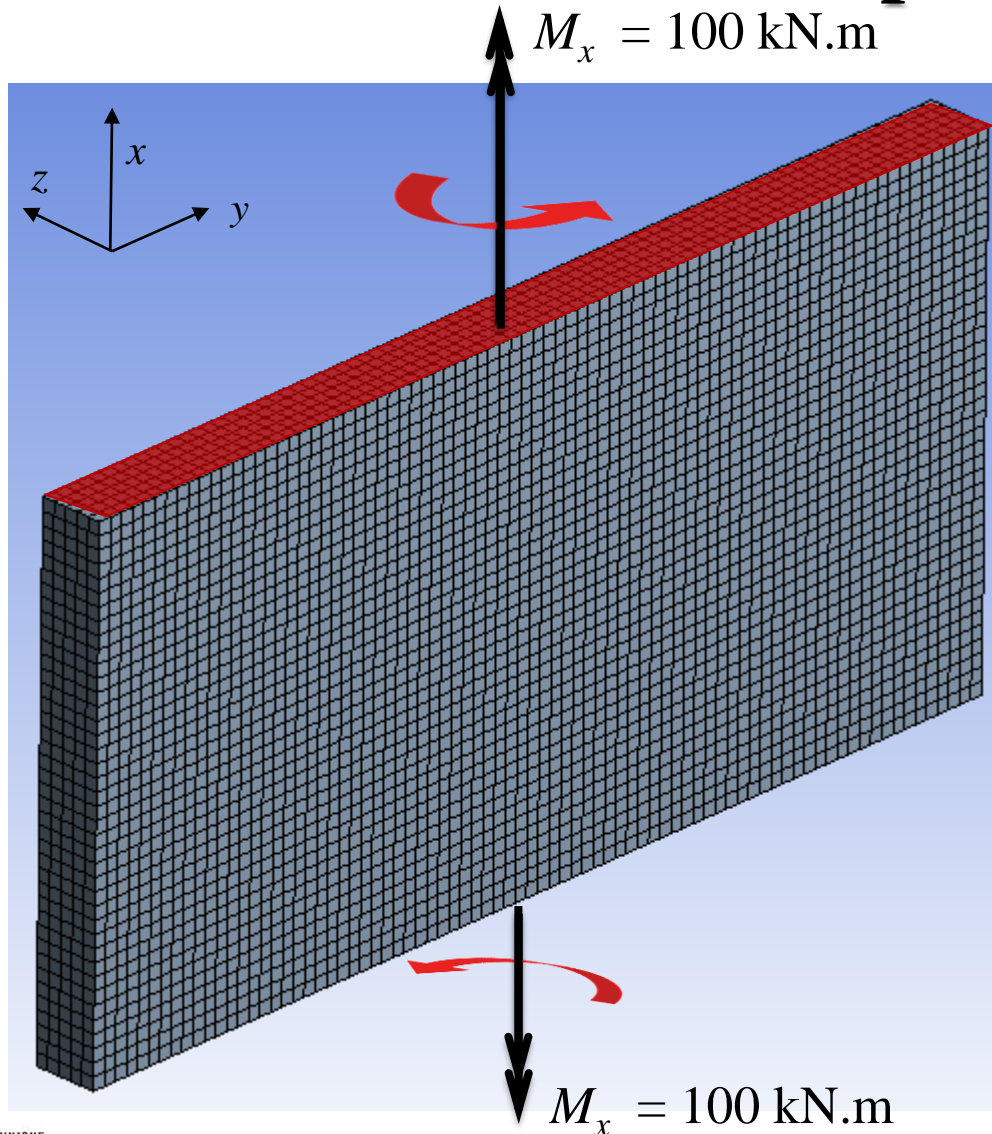


Changement de l'angle droit :
dans le plan $x-z$, donc γ_{xz} et τ_{xz}

dans le plan $x-y$, donc γ_{xy} et τ_{xy}



Simulation par ÉF



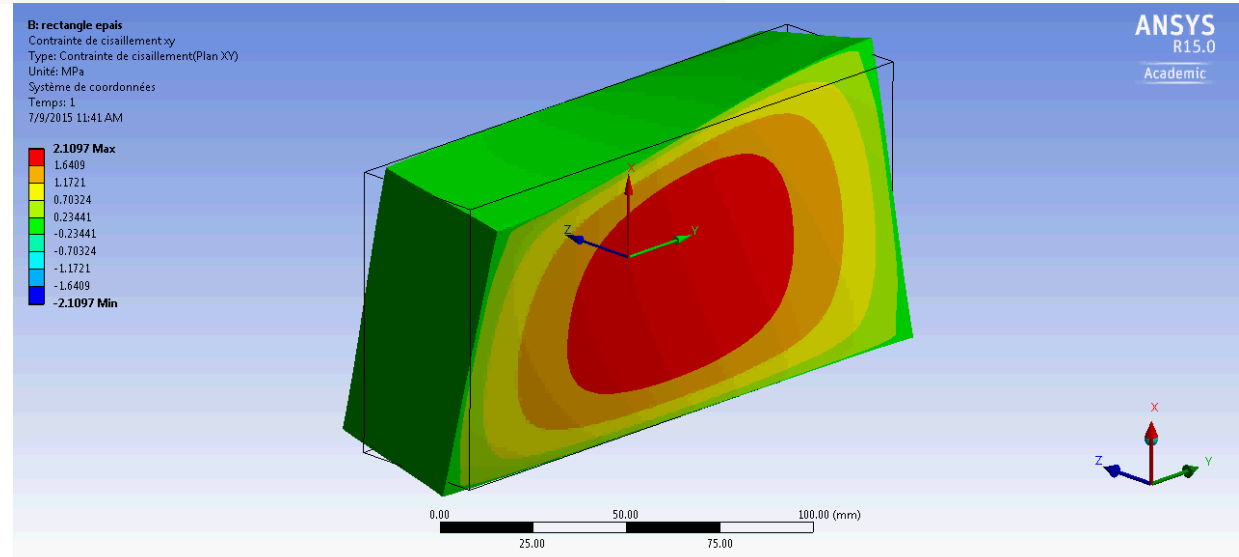
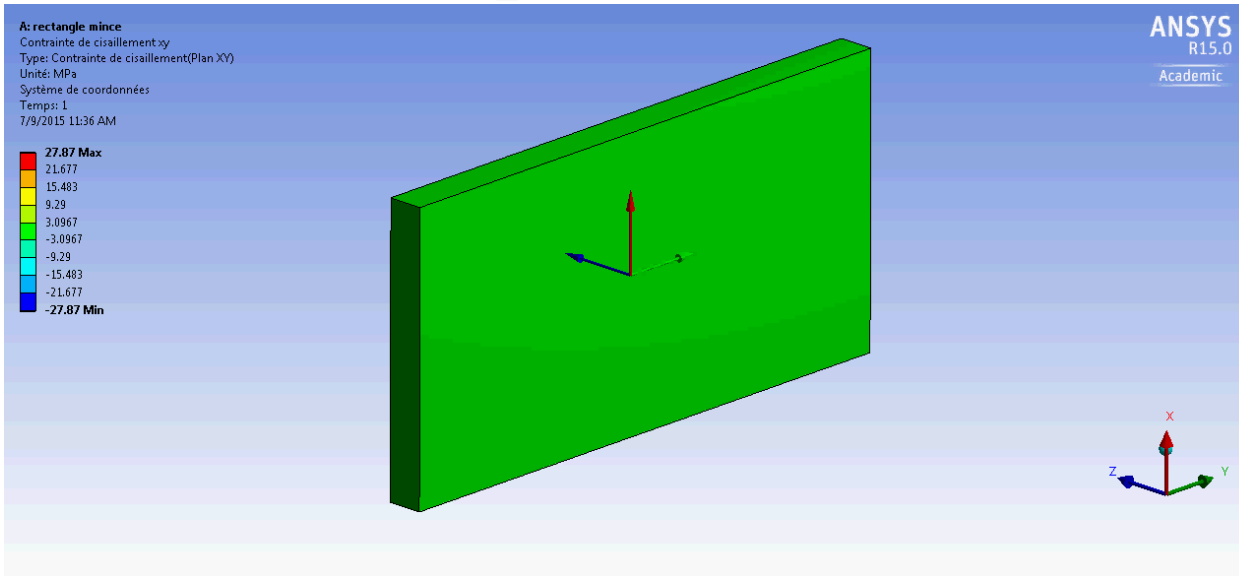
Rectangle mince:

$$160 \times 10 \times 80 \text{ mm}$$

Rectangle épais:

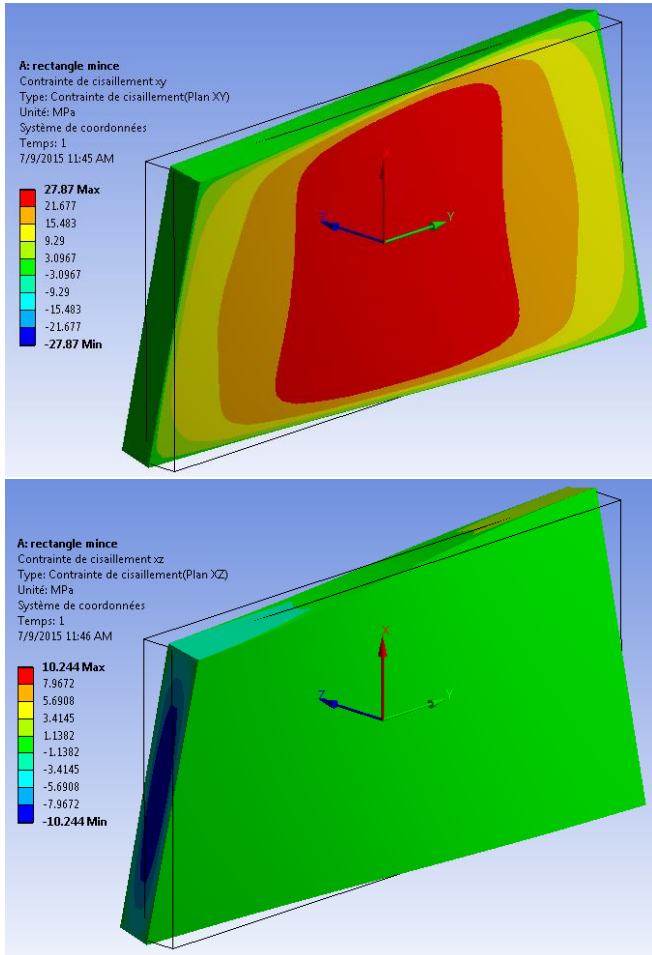
$$160 \times 40 \times 80 \text{ mm}$$

Simulation par ÉF: rectangle mince en torsion

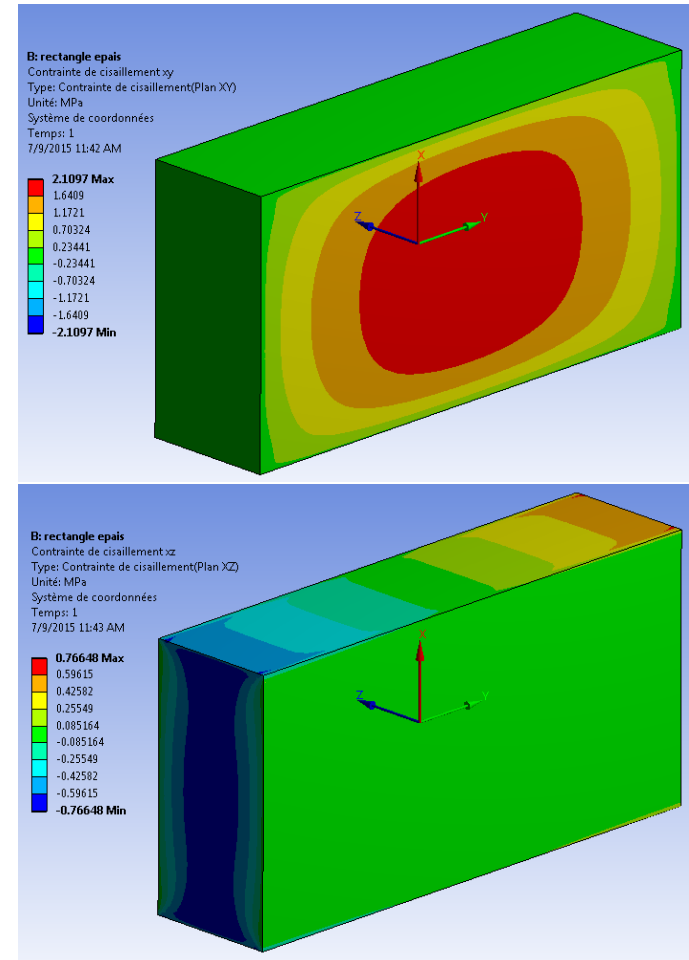


Contraintes de cisaillement pour les 2 épaisseurs

Rectangle mince



Rectangle épais



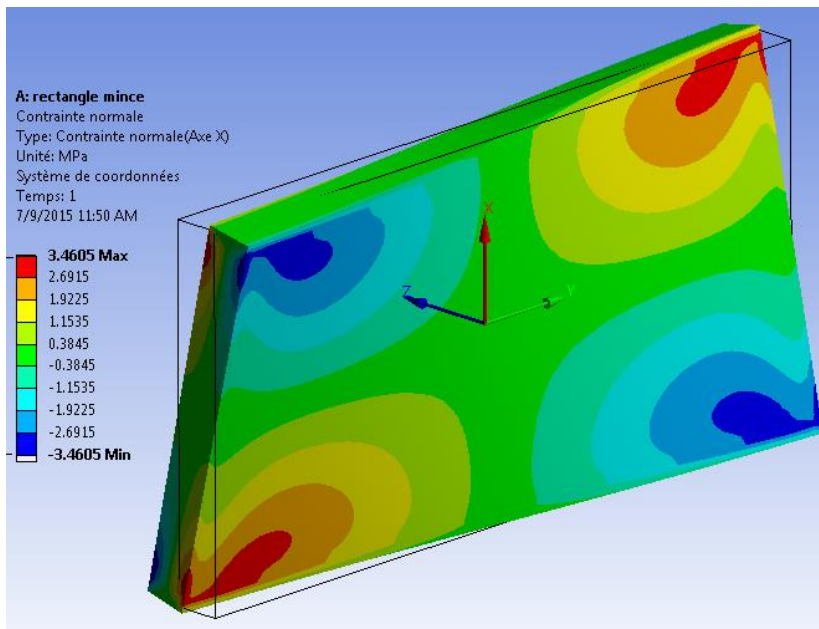
τ_{xy}

τ_{xz}

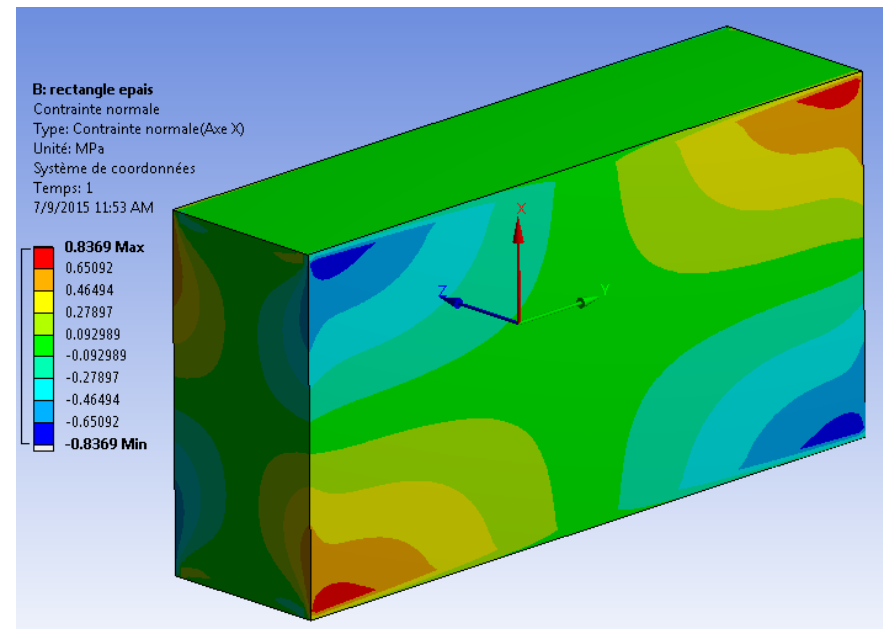
La déformation a été amplifiée d'un facteur 100

Contrainte normale σ_x pour les 2 épaisseurs

Rectangle mince



Rectangle épais



La déformation a été amplifiée d'un facteur 100

Préparé par Henri Yelle, ing, Marie Bernard, ing et Daniel Therriault, ing.

1.5: Chargement de torsion

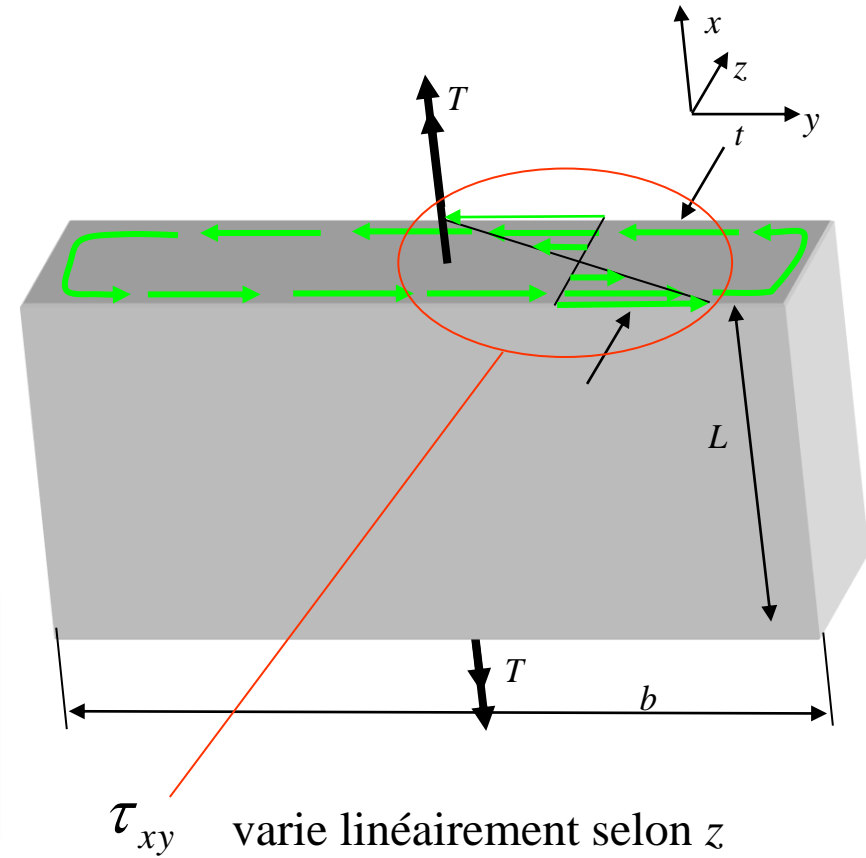
Section ouverte

- Contrairement à une section fermée, le *flux* q , pour circuler, doit passer **deux fois** (aller retour) sur l'épaisseur t .
- Ceci fait que le cisaillement change de sens sur l'épaisseur t et la section est **beaucoup moins efficace** pour transmettre de la *torsion*
- Contraintes et constante de torsion

$$\tau_{xy} = \frac{Tt}{J} \quad J = \frac{1}{3}bt^3$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{xz} \approx 0$$

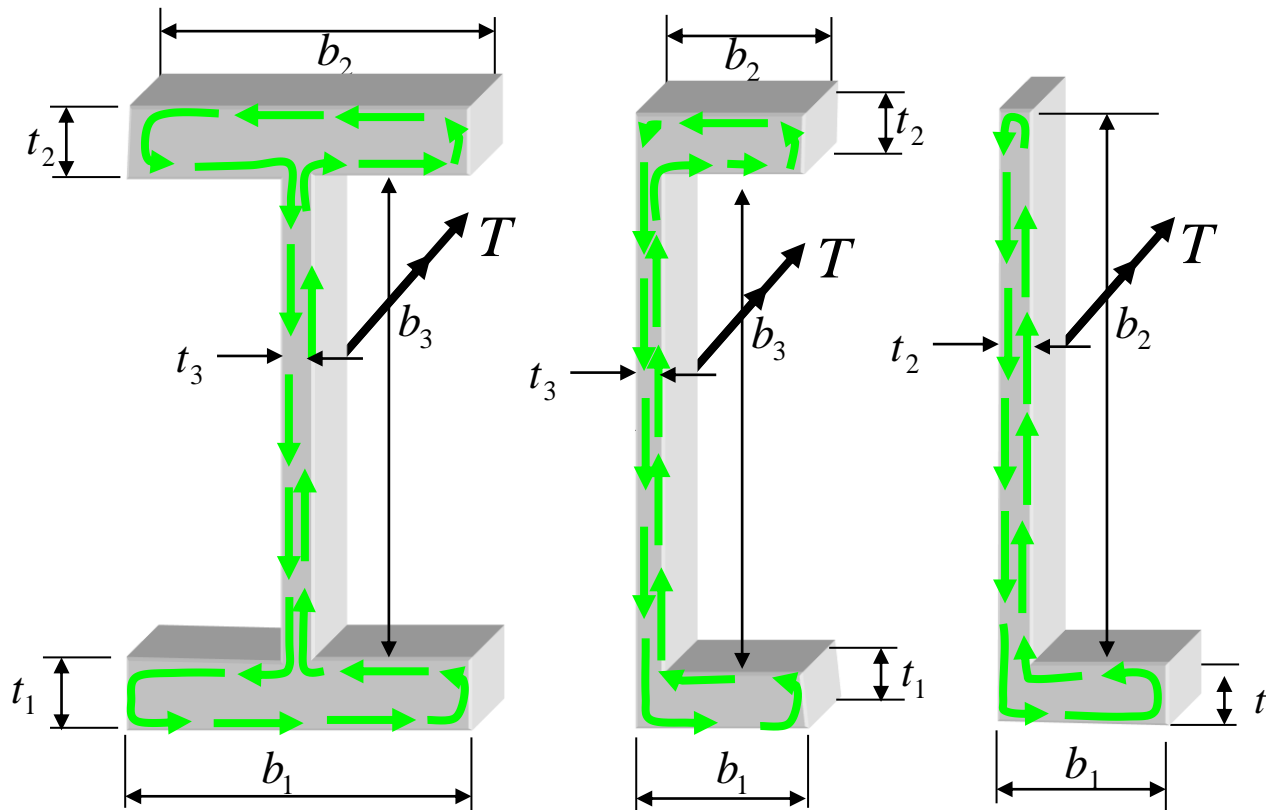
Donc $\sigma_z = \sigma_3 = 0$ (contrainte principale)



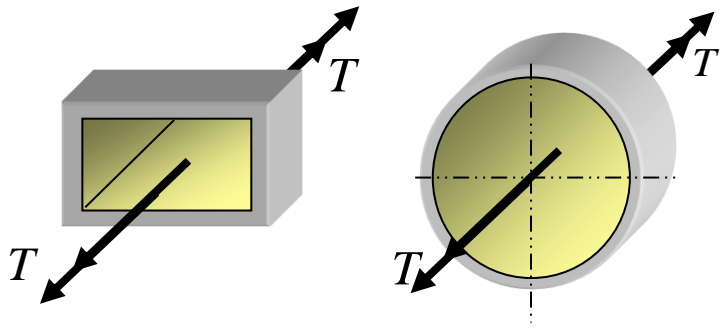
1.5: Chargement de torsion

Section ouverte

- Sections en I, en C ou en L (exemples de sections ouvertes)
 - Inefficaces pour transmettre un couple de torsion.



Sections fermées

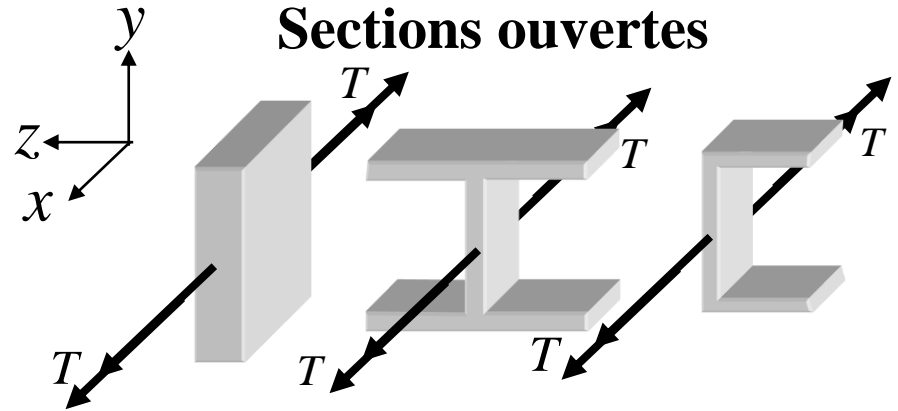


$$\tau_{xs} = \frac{T}{2At}$$

$$J = \frac{4\bar{A}^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

Formule générale

Sections ouvertes



$$\tau_{xy} = \frac{Tt}{J}$$

$$J = \frac{1}{3}bt^3$$

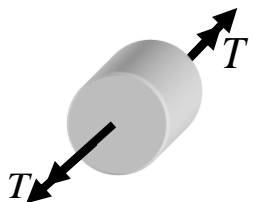
Section circulaire

$$\tau_{x\theta} = \frac{Tr}{J}$$

$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$J = \frac{\pi(r_e^4 - r_i^4)}{2} = 2\pi r^3 t$$

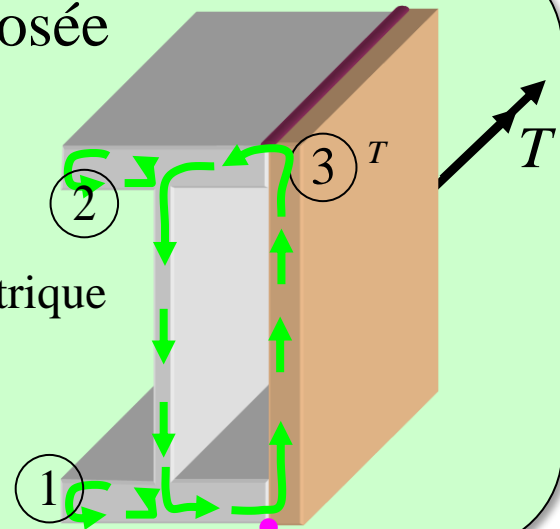
Rayon moyen



Section composée

Compatibilité géométrique

$$\Delta\phi = \frac{TL}{GJ}$$



1.6: Section composée

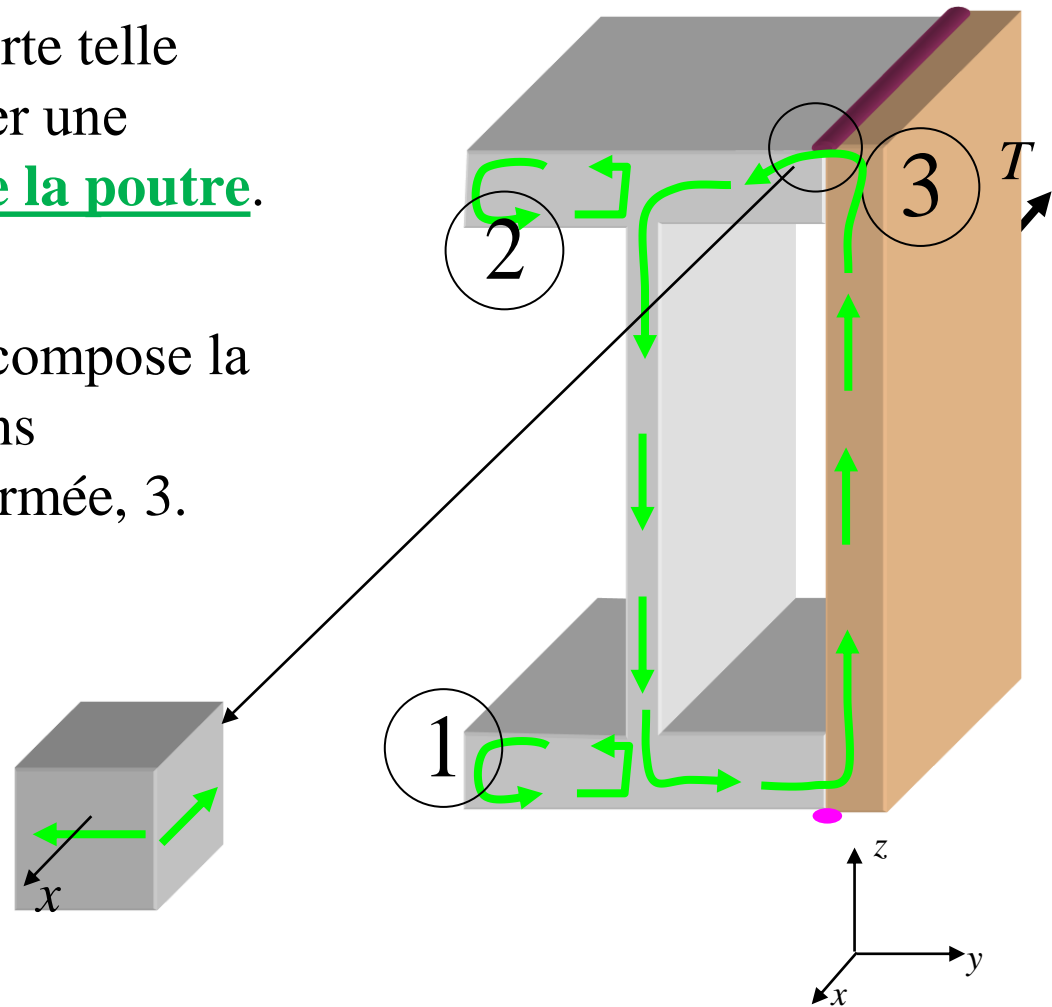


Source: btselfar.shop

1.6: Section composée

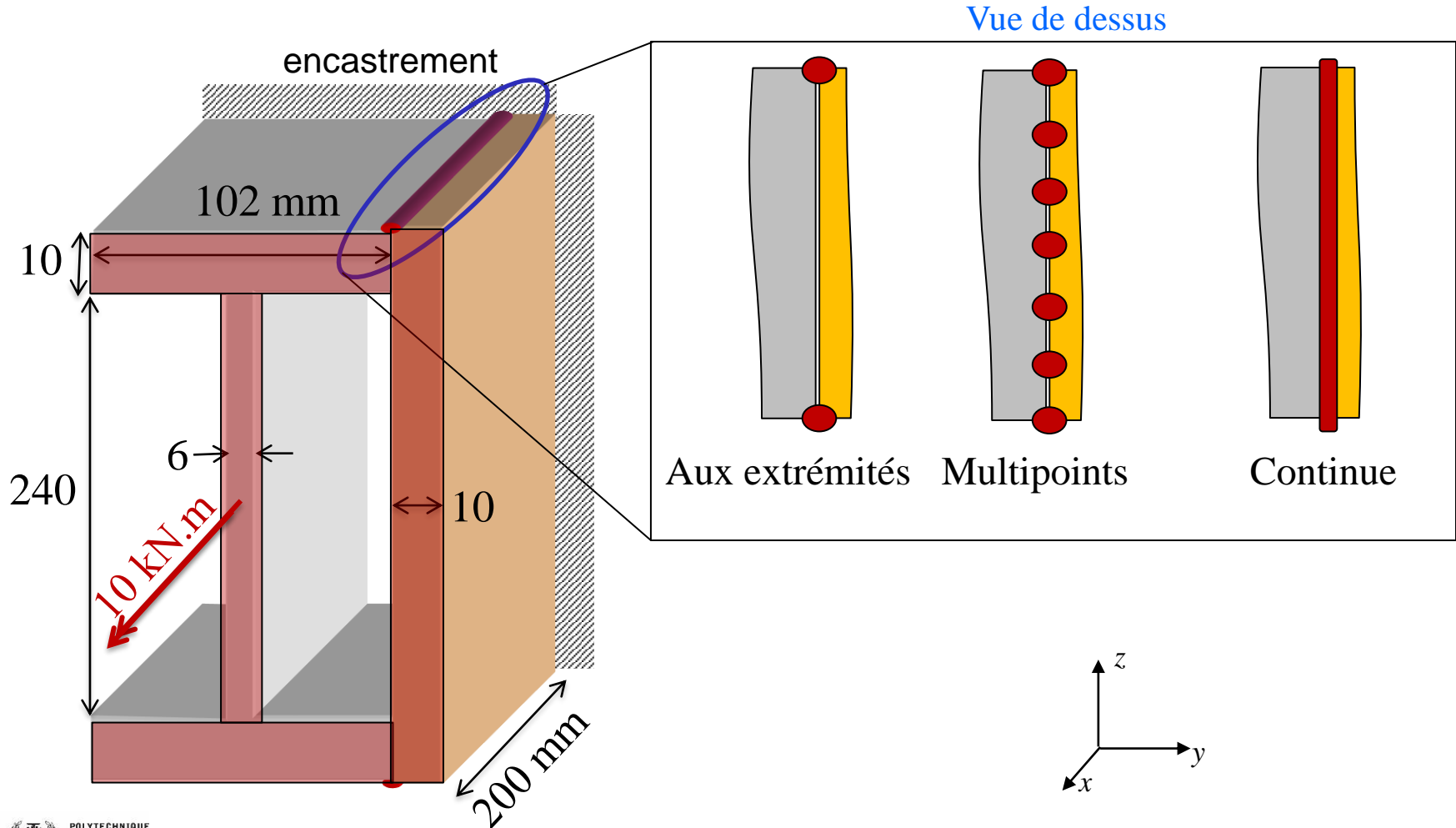
Pour améliorer une section ouverte telle qu'un profilé en I, on peut souder une plaque sur toute la longueur de la poutre.

Pour l'analyse en torsion, on décompose la poutre combinée en deux sections ouvertes, 1 et 2, et une section fermée, 3.



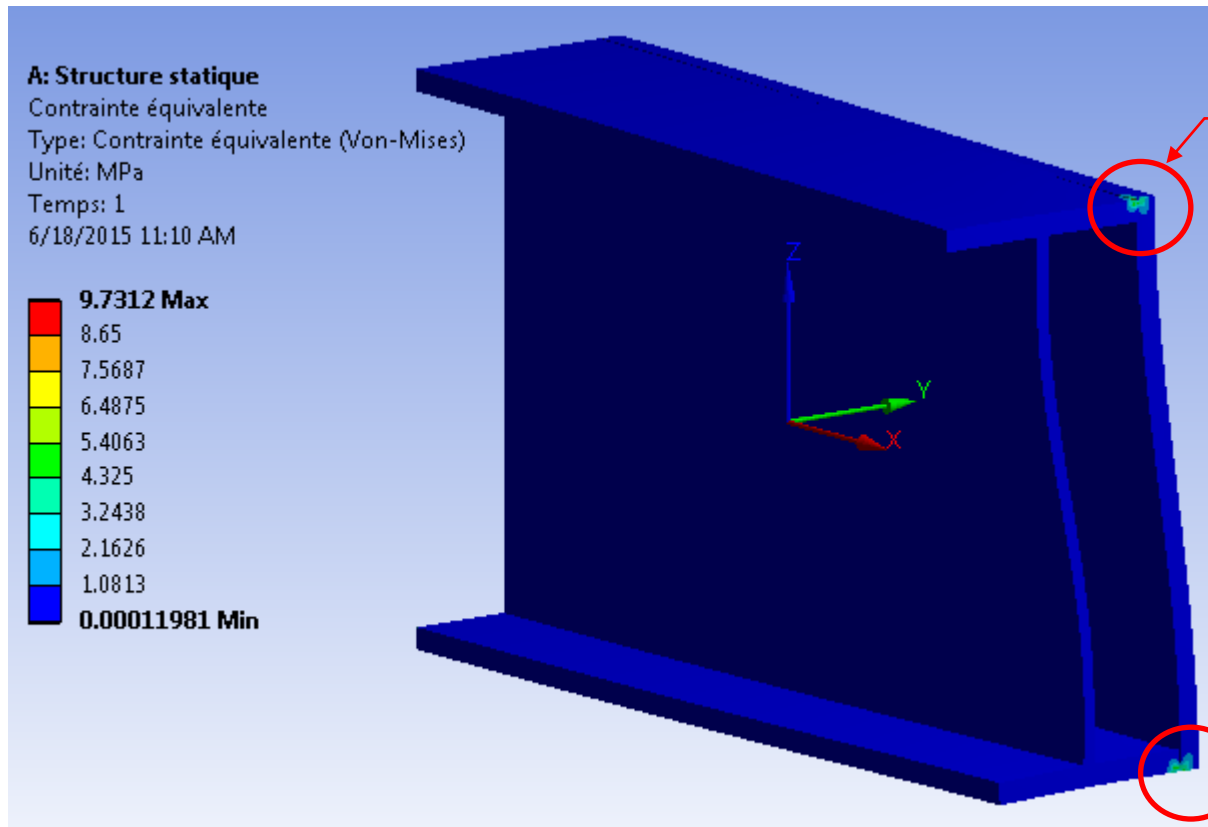
1.6: Section composée

Simulation ÉF de la section composée avec 3 types de soudure



1.6: Section composée

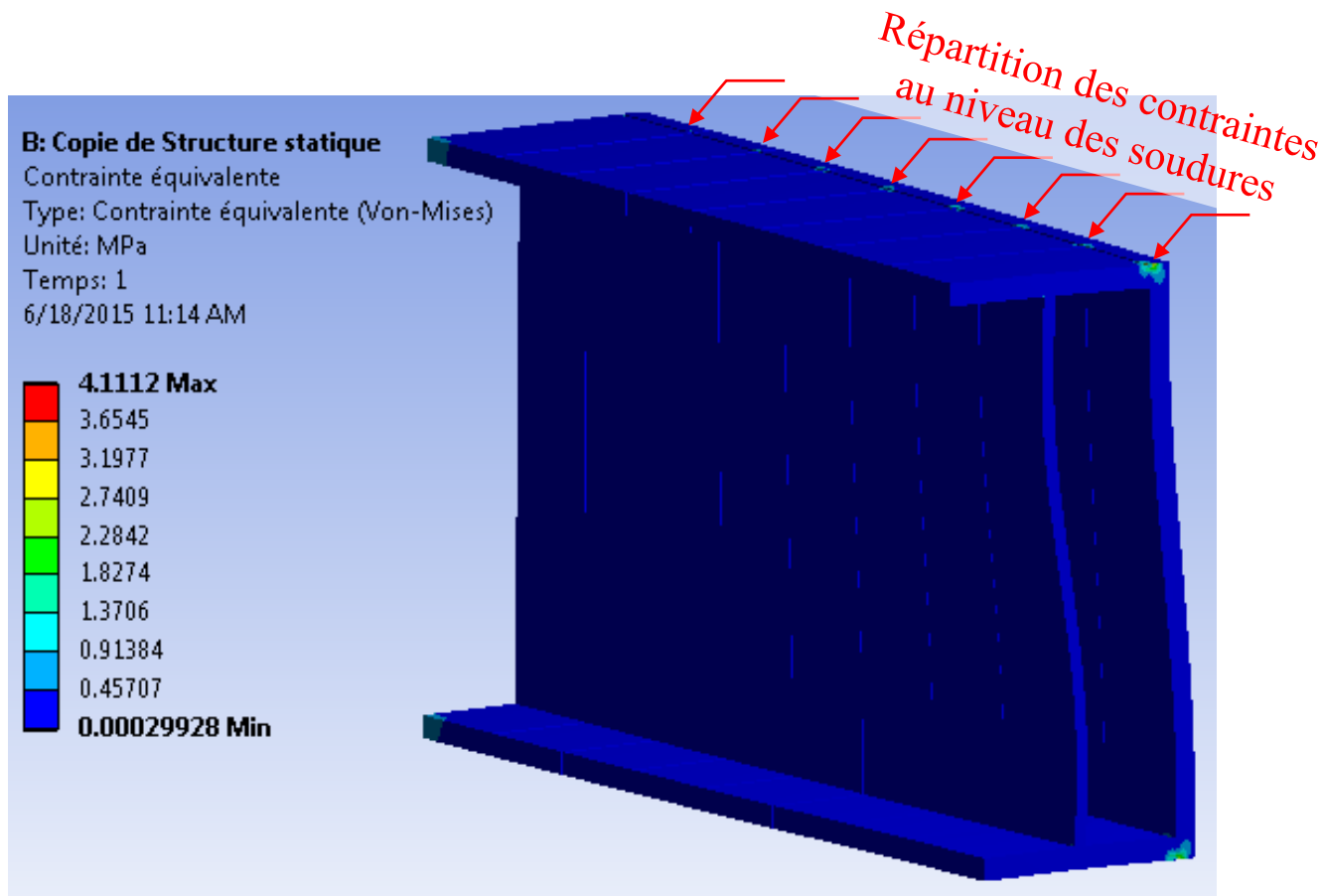
Section composée connectée par des soudures aux extrémités



Concentration de contraintes au niveau des soudures

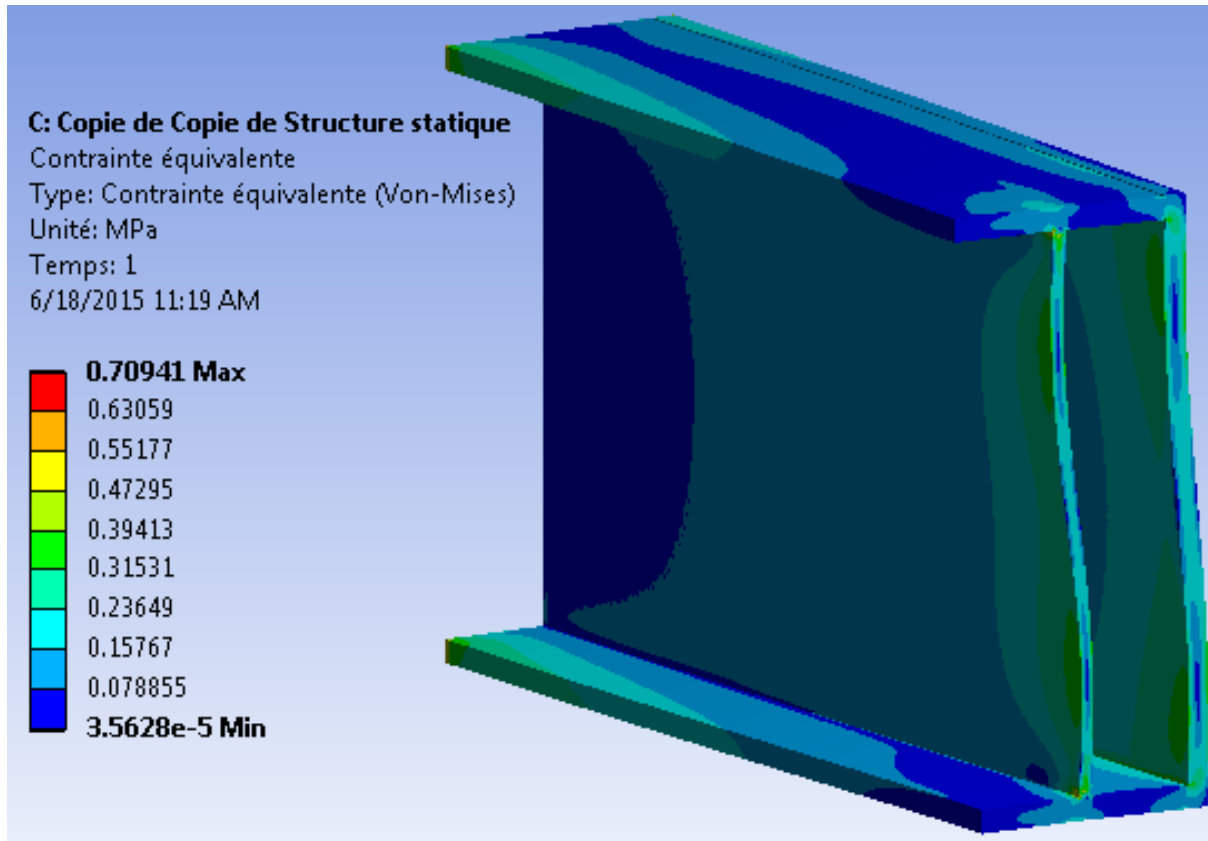
1.6: Section composée

Section composée connectée par des soudures multiples



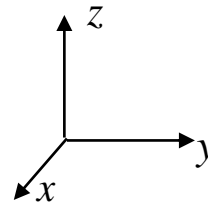
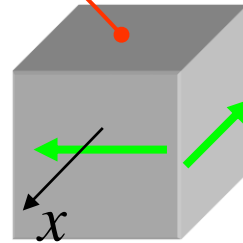
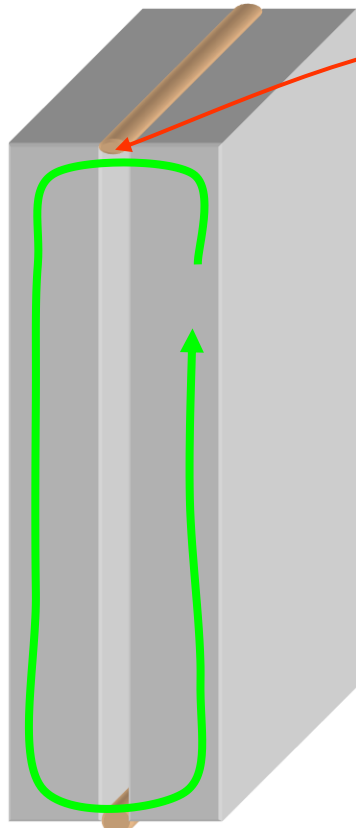
1.6: Section composée

Section composée connectée par des soudures continues

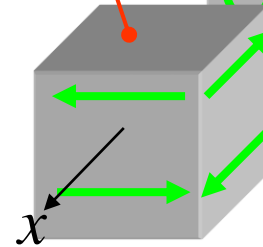
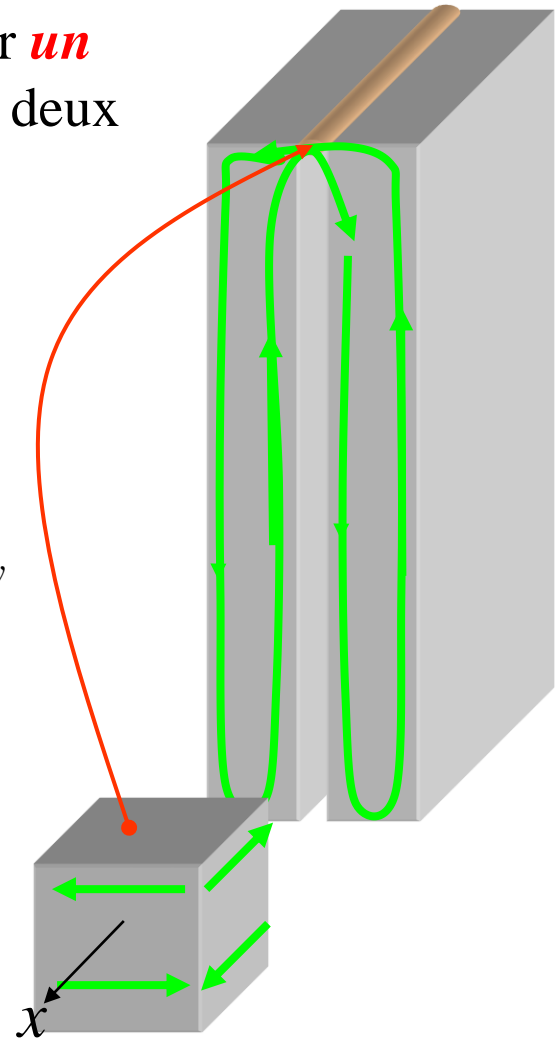


1.6: Section composée

Deux plaques parallèles réunies par *un* seul cordon de soudure constituent deux sections ouvertes.



Par contre, les deux mêmes plaques réunies par *deux* cordons de soudure sur toute leur longueur deviennent une section fermée



1.6: Section composée

Exemple :

- Deux cordons de soudure sur toute la longueur du profilé

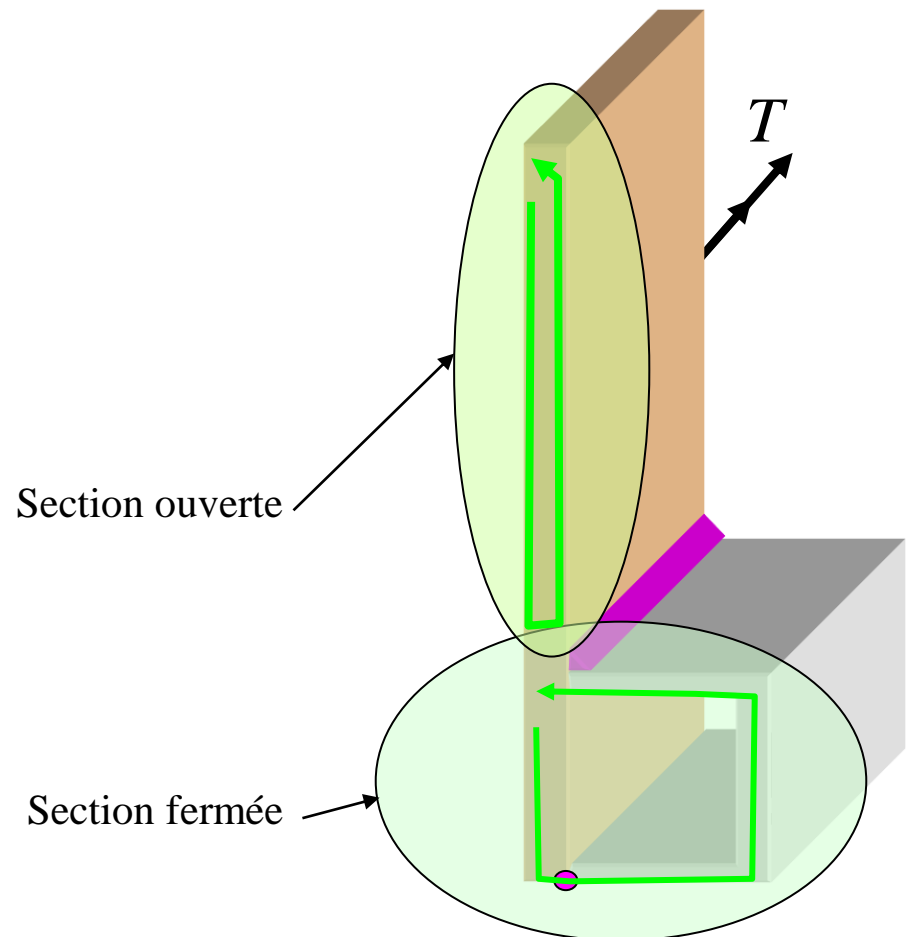


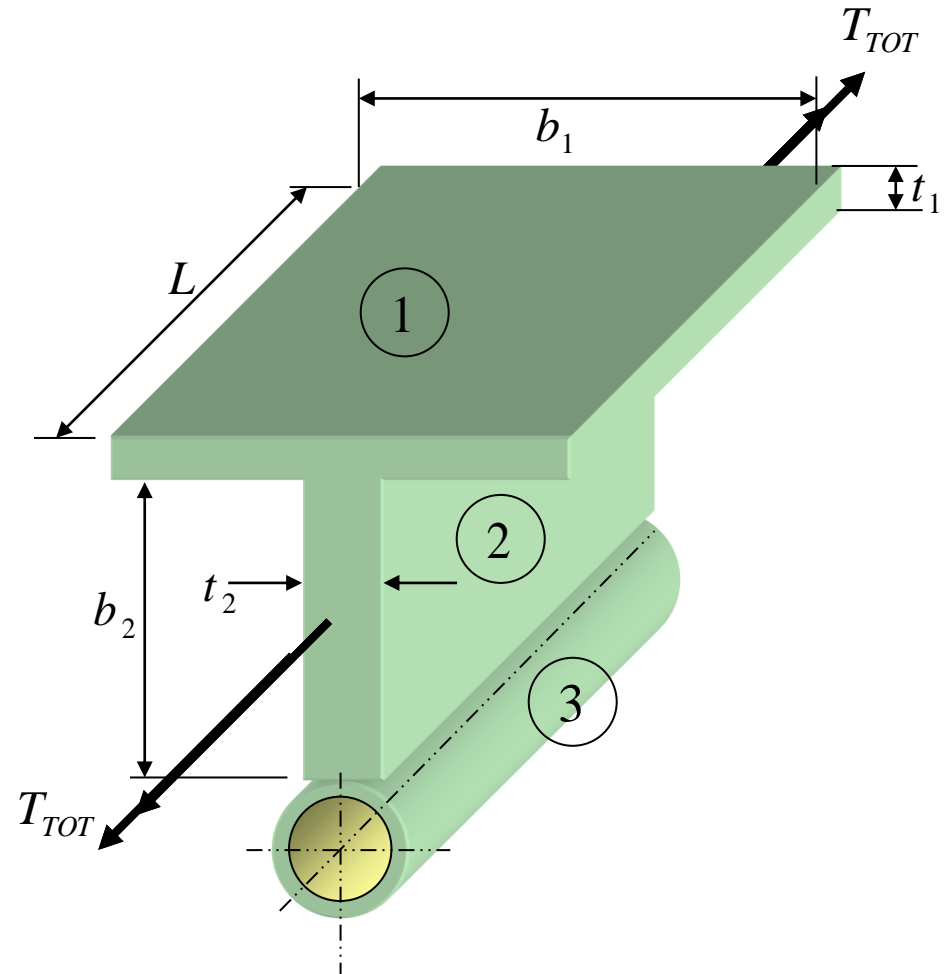
Illustration de la circulation du flux de cisaillement

1.6: Section composée

Exemple :

On veut connaître T_{TOT} permis pour une valeur de S_Y connue.

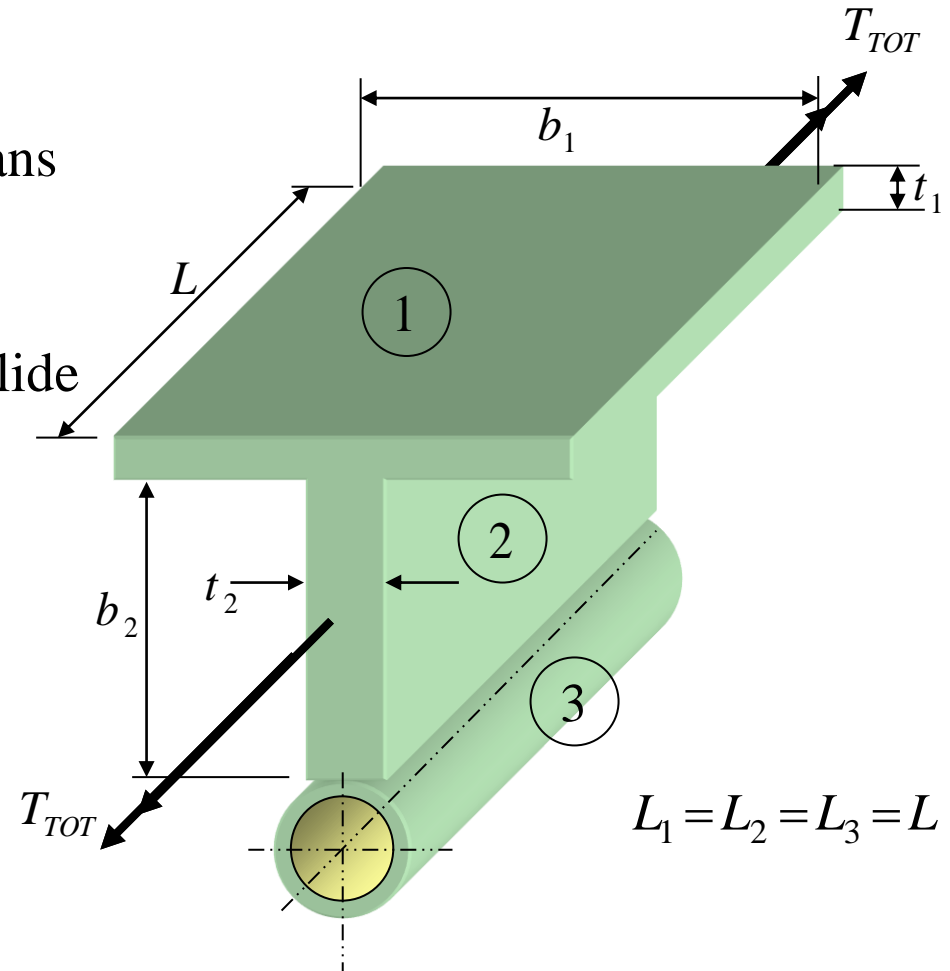
$$L_1 = L_2 = L_3 = L$$



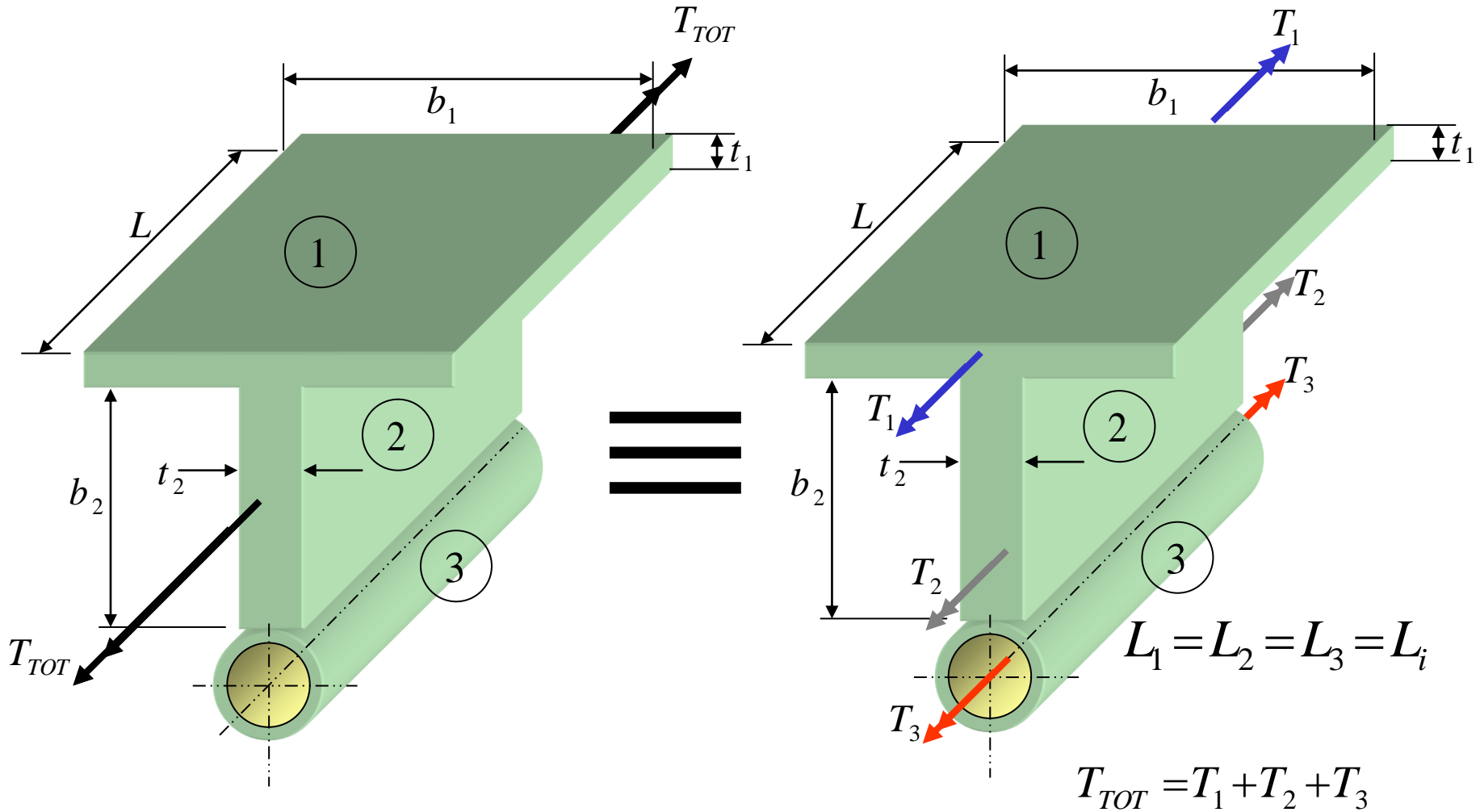
1.6: Section composée

Procédure de solution :

- 1- Établir la répartition de T_{tot} dans ①, ② et ③ (équilibre)
- 2- Assurer la compatibilité de déformation comme un corps solide
- 3- Calculer les relations T - φ
- 4- Calculer les contraintes
- 5- Calculer T_{TOT} permis



1.6: Section composée



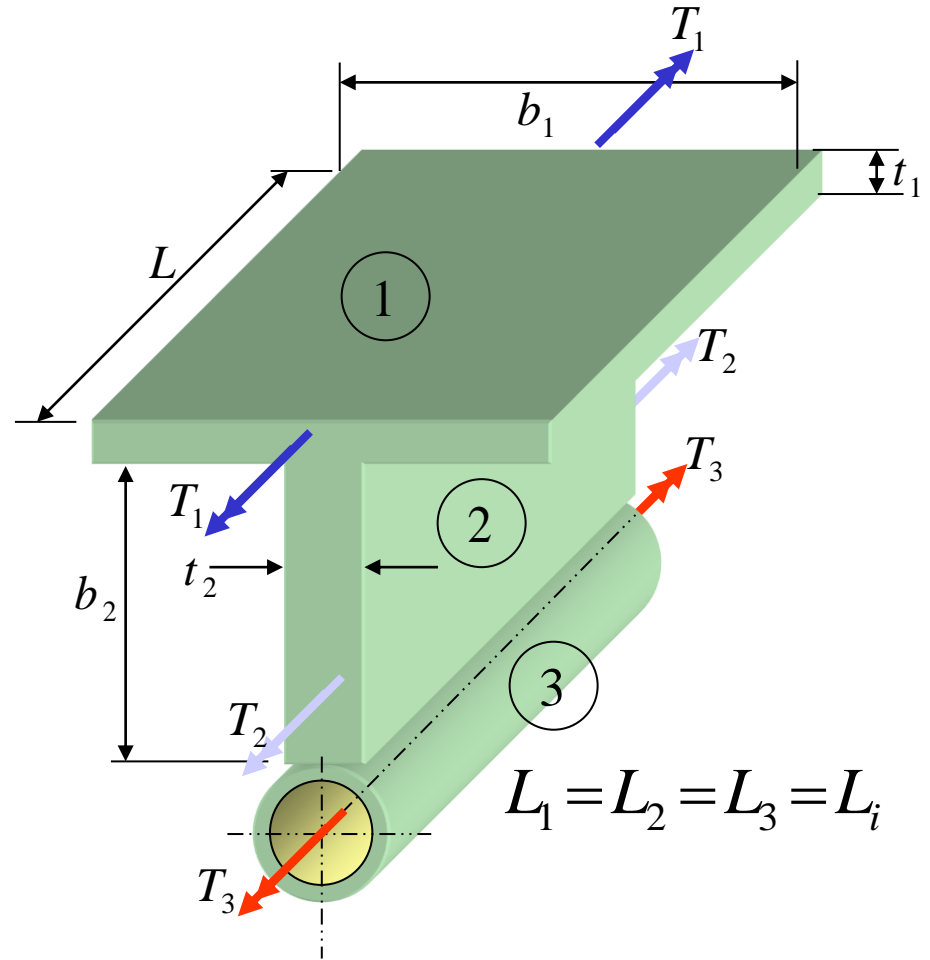
1.6: Section composée

Solution :

1- Équilibre :

$$T_{TOT} = T_1 + T_2 + T_3$$

T_1 , T_2 et T_3 sont les parties du couple total T_{TOT} reprises respectivement par les sections 1, 2 et 3.



1.6: Section composée

2- Compatibilité :

Les sections 1, 2 et 3 sont solidaires.

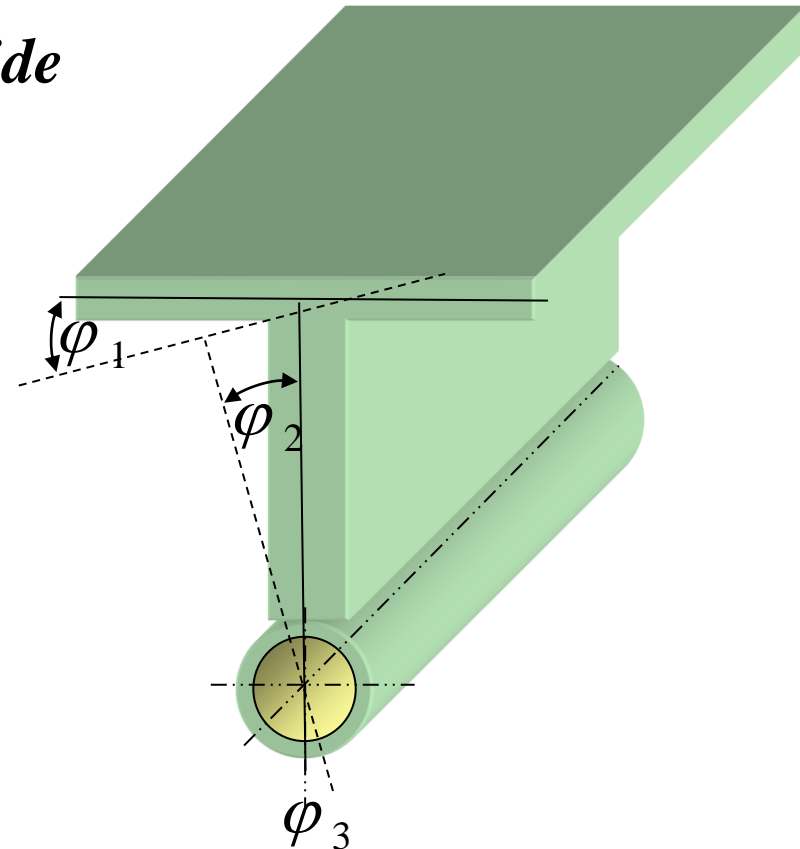
Elles se déforment comme un *corps solide*

sous l'action du couple T_{TOT} .

Donc, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_i$

Si on appelle $\beta = \varphi/L$, on a :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_i = \frac{\varphi_i}{L}$$



1.6: Section composée

2- Compatibilité :

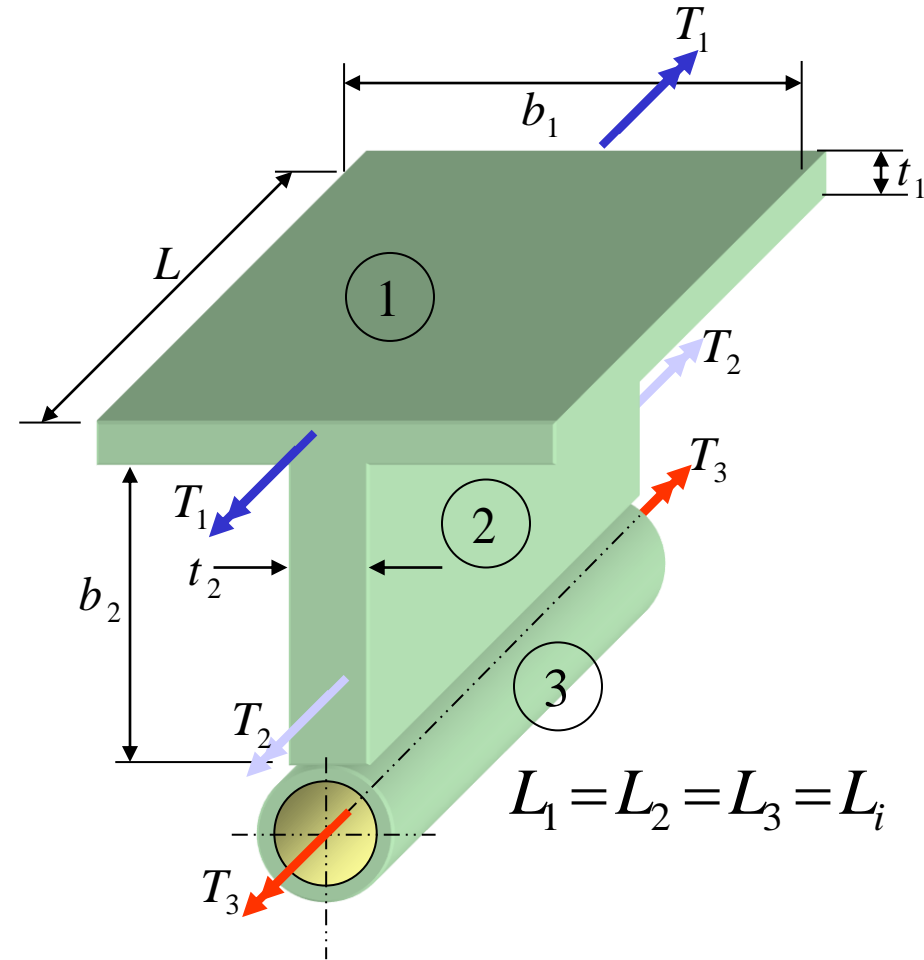
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_i = \frac{\phi_i}{L}$$

3- Relations $T - \phi$:

$$\phi_i = \frac{T_i L}{J_i G_i} \Rightarrow \beta_i = \frac{T_i}{J_i G_i}$$

ou que

$$\frac{T_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2}{J_2 G_2} = \frac{T_3}{J_3 G_3}$$



1.6: Section composée

2- Compatibilité :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_i = \frac{\phi_i}{L_i}$$

3- Relations $T - \phi$:

$$\phi_i = \frac{T_i L}{J_i G_i} \quad \beta_i = \frac{T_i}{J_i G_i}$$

Rappel:

Formule trigonométrique

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Si les valeurs de G_i sont identiques :

$$\frac{T_1}{J_1 G} = \frac{T_2}{J_2 G} = \frac{T_3}{J_3 G} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{(J_1 + J_2 + J_3) G} = \frac{T_{TOT}}{J_{TOT} G}$$

*Lorsque même matériau
dans sections 1,2 et 3*

1.6: Section composée

3- Relations $T - \varphi$:

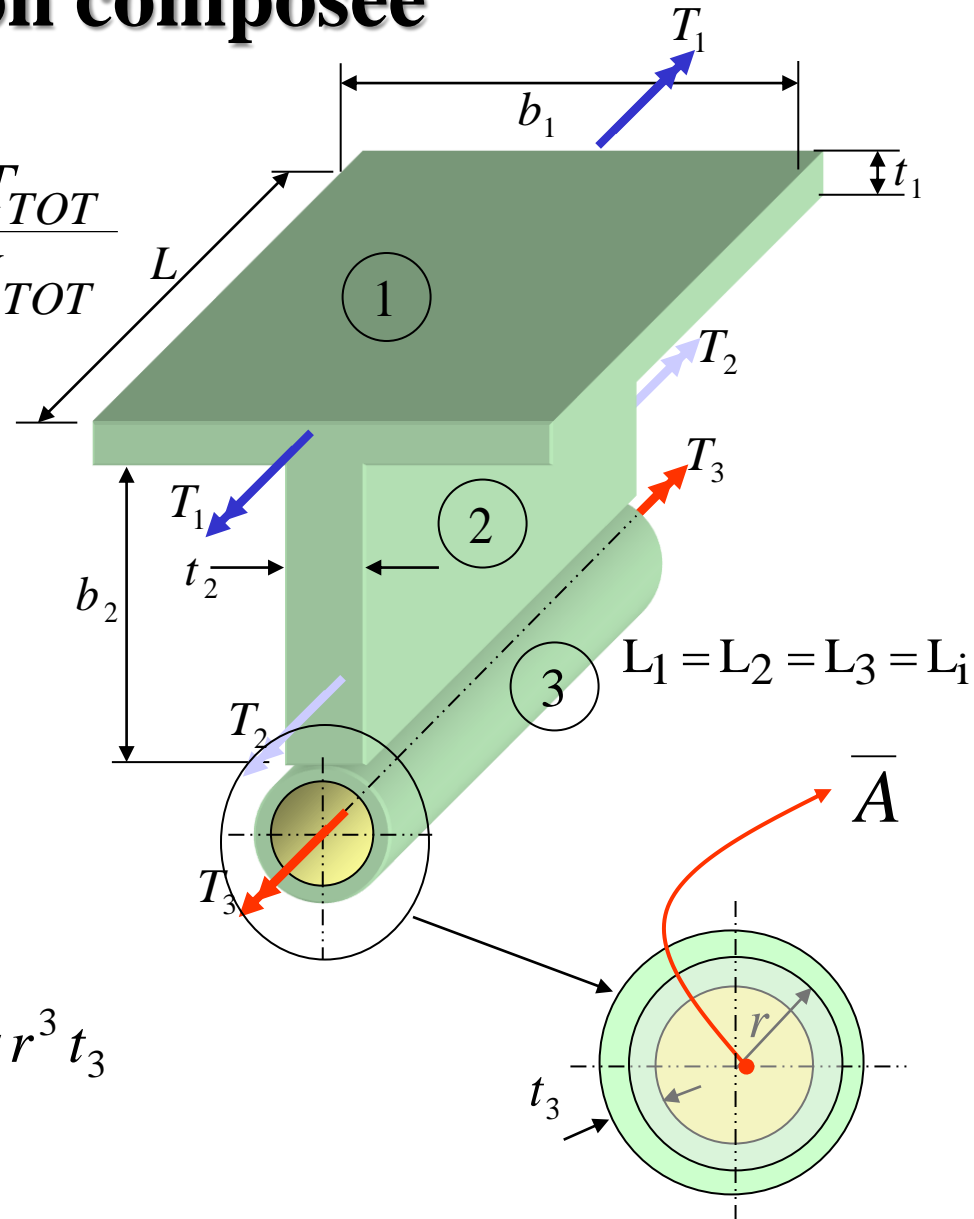
$$\frac{T_1}{J_1} = \frac{T_2}{J_2} = \frac{T_3}{J_3} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{(J_1 + J_2 + J_3)} = \frac{T_{TOT}}{J_{TOT}}$$

J_1 et J_2 : **constantes de torsion**
pour une section ouverte

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{3}(b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3)$$

J_3 : **constante de torsion**
pour une section fermée circulaire:

$$J_3 = \frac{4\bar{A}^2}{\int \frac{ds}{t_3}} = \frac{4\bar{A}^2}{\text{périmètre } t_3} = \frac{4\bar{A}^2}{2\pi r t_3} = 2\pi r^3 t_3$$



1.6: Section composée

4- Calcul de τ :

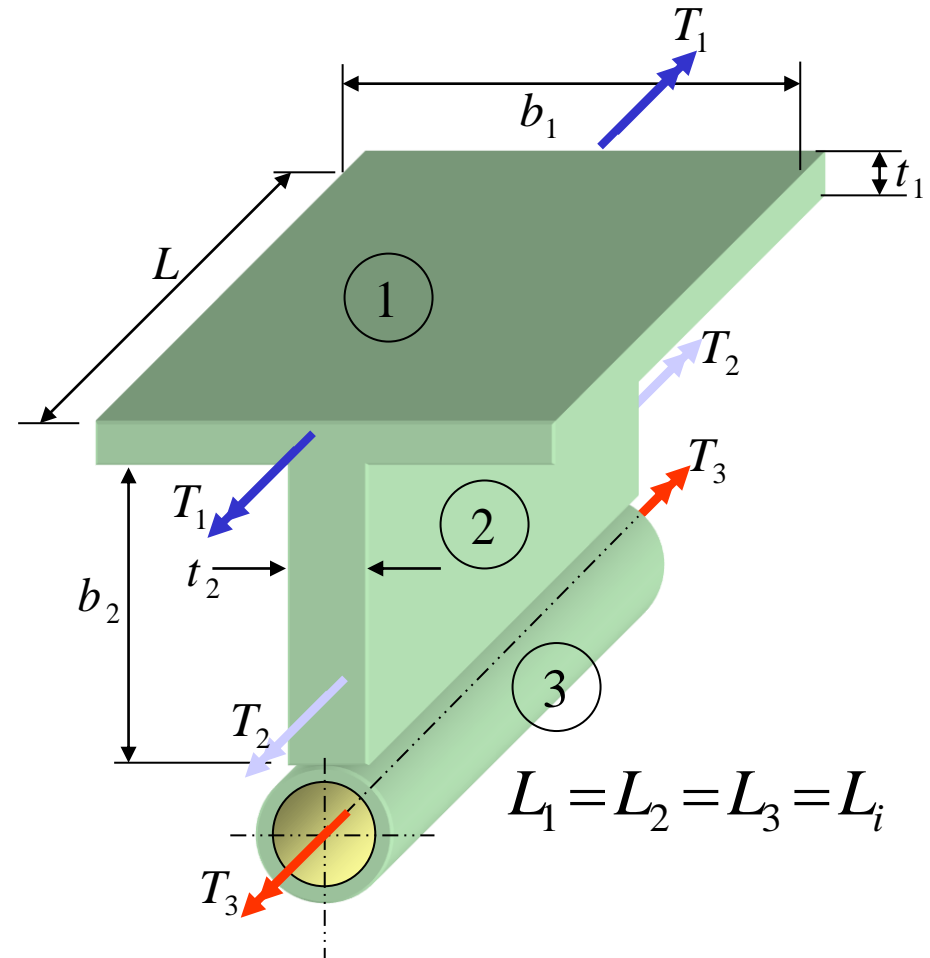
a) sections ouvertes (1)

$$(\tau_{xs})_1 = \frac{T_1 t_1}{J_1}$$

$$\frac{T_1}{J_1} = \frac{T_2}{J_2} = \frac{T_{TOT}}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs})_1 = \frac{T_1 t_1}{J_1} = \frac{T_{TOT} t_1}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs})_2 = \frac{T_2 t_2}{J_2} = \frac{T_{TOT} t_2}{J_{TOT}}$$



Même approche pour section (2)

1.6: Section composée

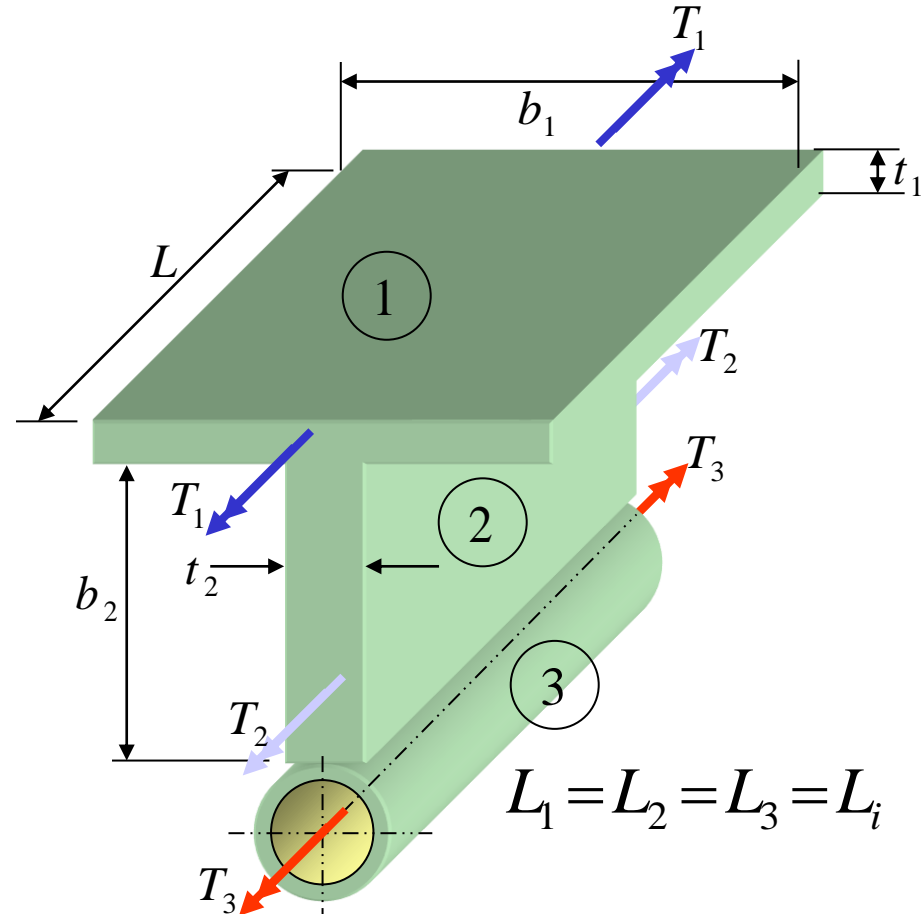
4- Calcul de τ :

a) sections ouvertes (1 et 2)

$$(\tau_{xs})_1 = \frac{T_{TOT} t_1}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs})_2 = \frac{T_{TOT} t_2}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs\max})_{ouvert} = \frac{T_{TOT} t_{\max\ de\ 1\ et\ 2}}{J_{TOT}}$$



Utiliser la plus grande épaisseur pour calculer la contrainte maximale des sections ouvertes

1.6: Section composée

4- Calcul de τ :

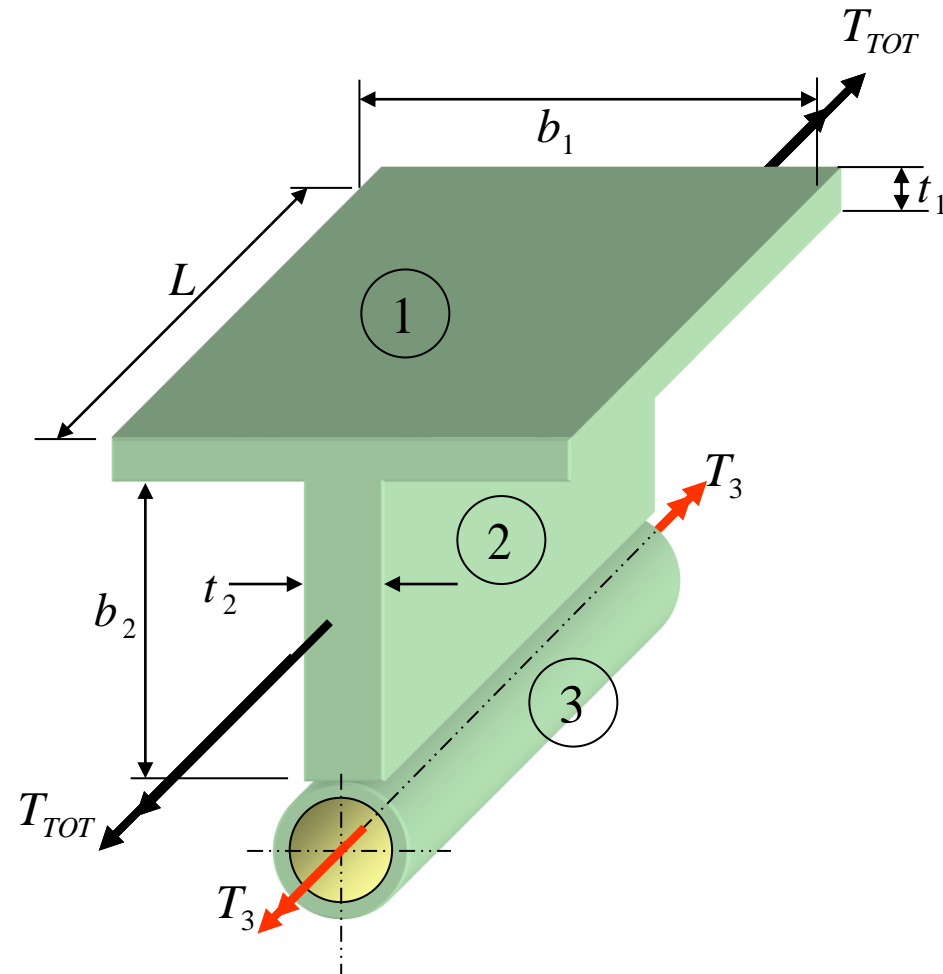
b) section fermée (3)

$$(\tau_{xs})_3 = \frac{T}{2At} = \frac{T_3}{2At_3}$$

$$\frac{T_3}{J_3} = \frac{T_{TOT}}{J_{TOT}}$$

$$(\tau_{xs})_3 = \frac{T_3}{2At_3} = \frac{T_{TOT} J_3}{J_{TOT} 2At_3} \cdot \frac{1}{2At_3}$$

$$(\tau_{xs})_3 = \frac{T_{TOT} J_3}{J_{TOT} 2At_3} \cdot \frac{1}{2At_3}$$



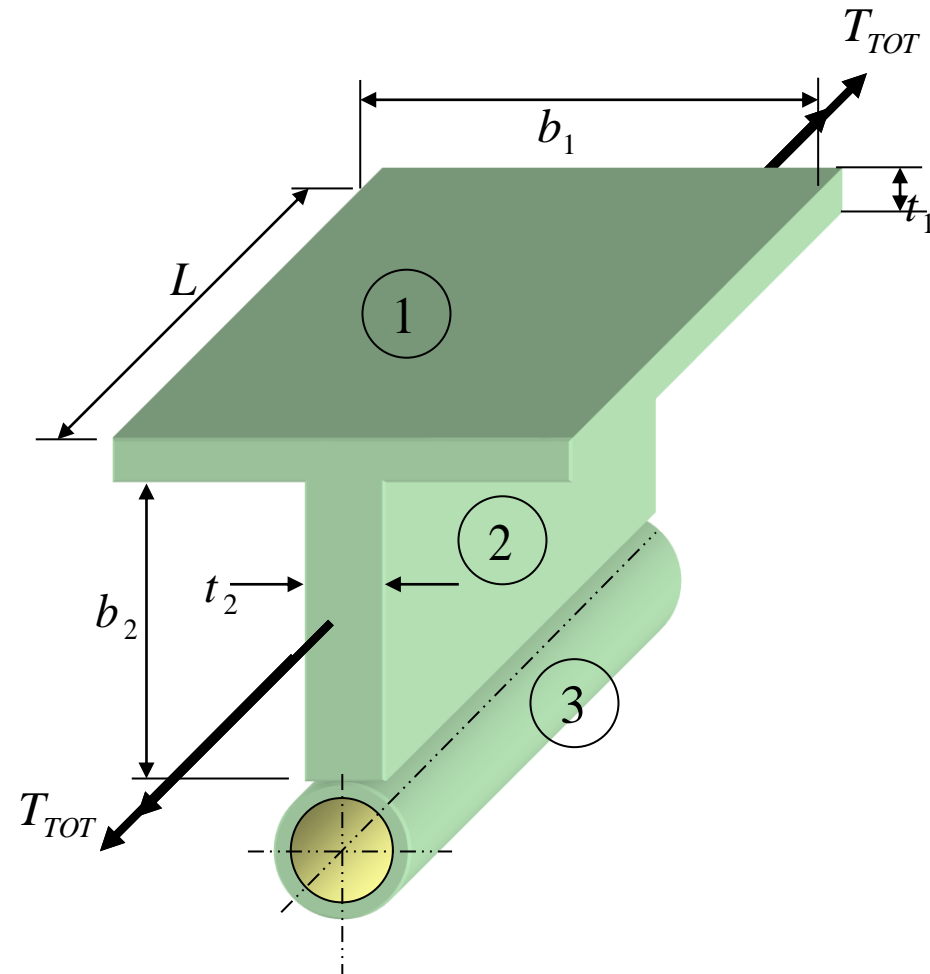
1.6: Section composée

5- Calcul de T_{TOT} permis :

T_{TOT} permis est le plus petit des deux valeurs calculées .

$$(T_{TOT})_{ouvert} = \frac{S_Y}{2FS} \frac{J_{TOT}}{t_{\max de 1 et 2}}$$

$$(T_{TOT})_{fermé} = \frac{S_Y}{2FS} \frac{J_{TOT}}{J_3} 2 \bar{A} t_3$$



1.6: Section composée

Calcul de FS lorsque la valeur de T est connue:

a) sections ouvertes (1 et 2)

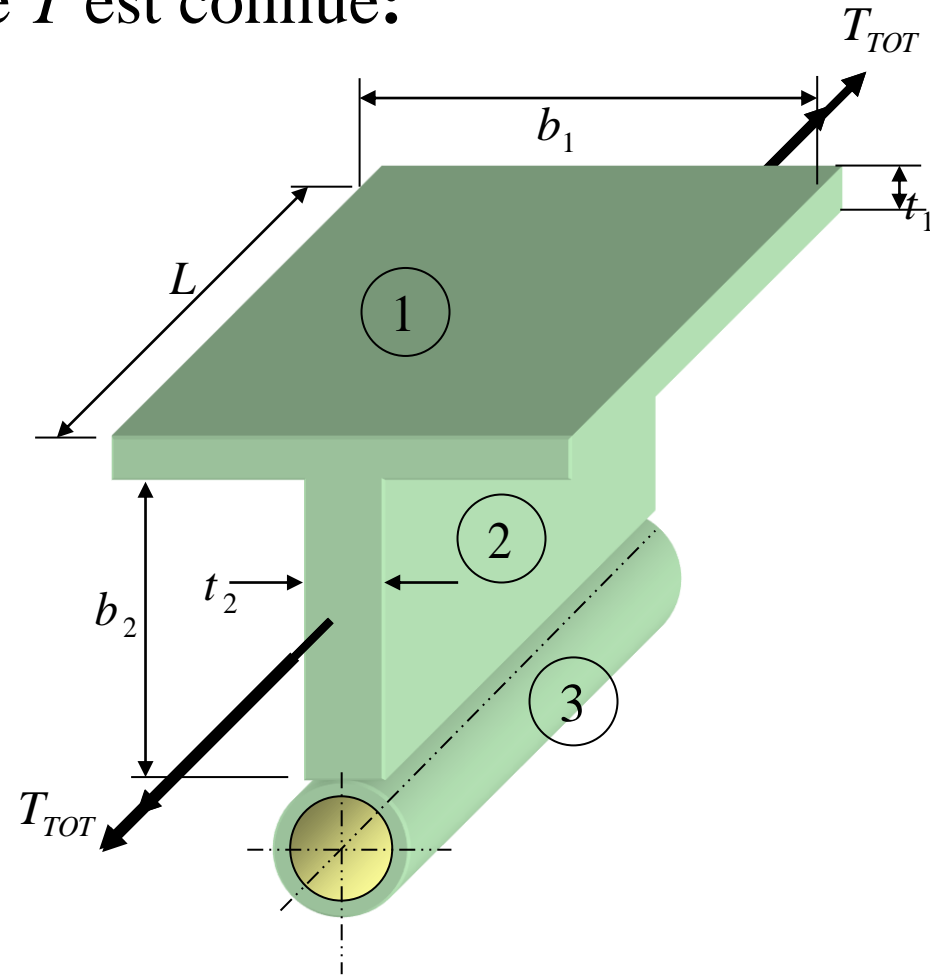
$$FS = \frac{S_Y}{2(\tau_{xs\max})_{ouvert}}$$

$$FS = \frac{S_Y J_{TOT}}{2T_{TOT} t_{\max\ de\ 1\ et\ 2}}$$

b) Section fermée (3)

$$FS = \frac{S_Y}{2(\tau_{xs})_3}$$

$$FS = \frac{S_Y J_{TOT} 2\bar{A} t_3}{2 T_{TOT} J_3}$$



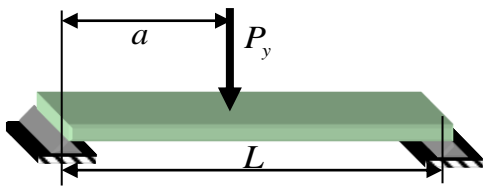
Notions de contrainte : Résumé



$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

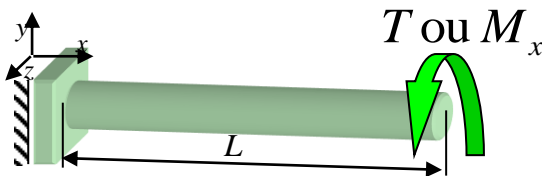
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$



$$\sigma_x = \frac{M_z}{S_z}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

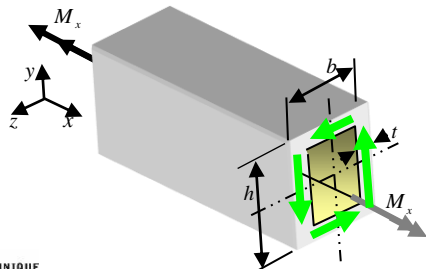
$$\tau_{xy} \text{ (ou } \tau_{xz}) = \frac{VQ}{I_z b}$$



$$|\tau_{x\theta}| = \left| \frac{T r}{J} \right|$$

$$\sigma_x = \sigma_r = \sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{xr} = \tau_{r\theta} = 0$$



$$\tau_{xs} = \frac{M_x}{2 \times A \times t}$$

$$\sigma_x = \sigma_n = \sigma_s = 0$$

$$\tau_{xn} = \tau_{ns} = 0$$

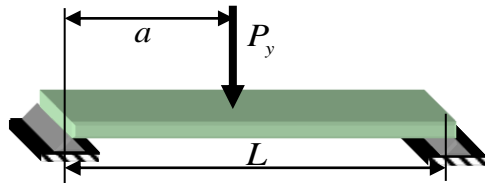
Notions de contrainte : Résumé

Exemples de section

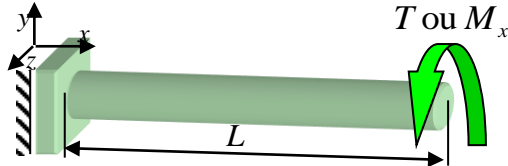
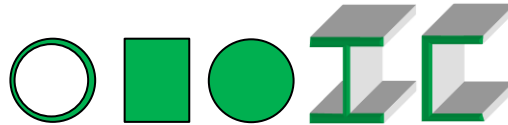


Axial → Toutes les sections constantes selon l'axe x

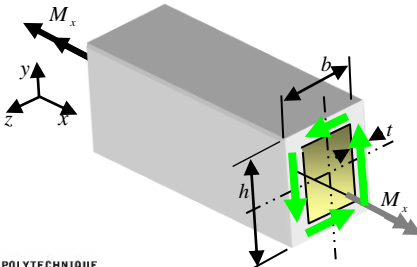
Pression → cyl. à paroi mince ○



Flexion → section simple



Torsion → section circulaire (x, r, θ)



Torsion → section fermée mince (x, s, n)



Nouveaux en RDM II

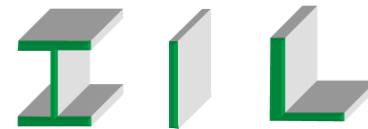
Changements de section
→ Concentration de contrainte

Section sans plan de symétrie
→ flexion gauche



Révision partie 4

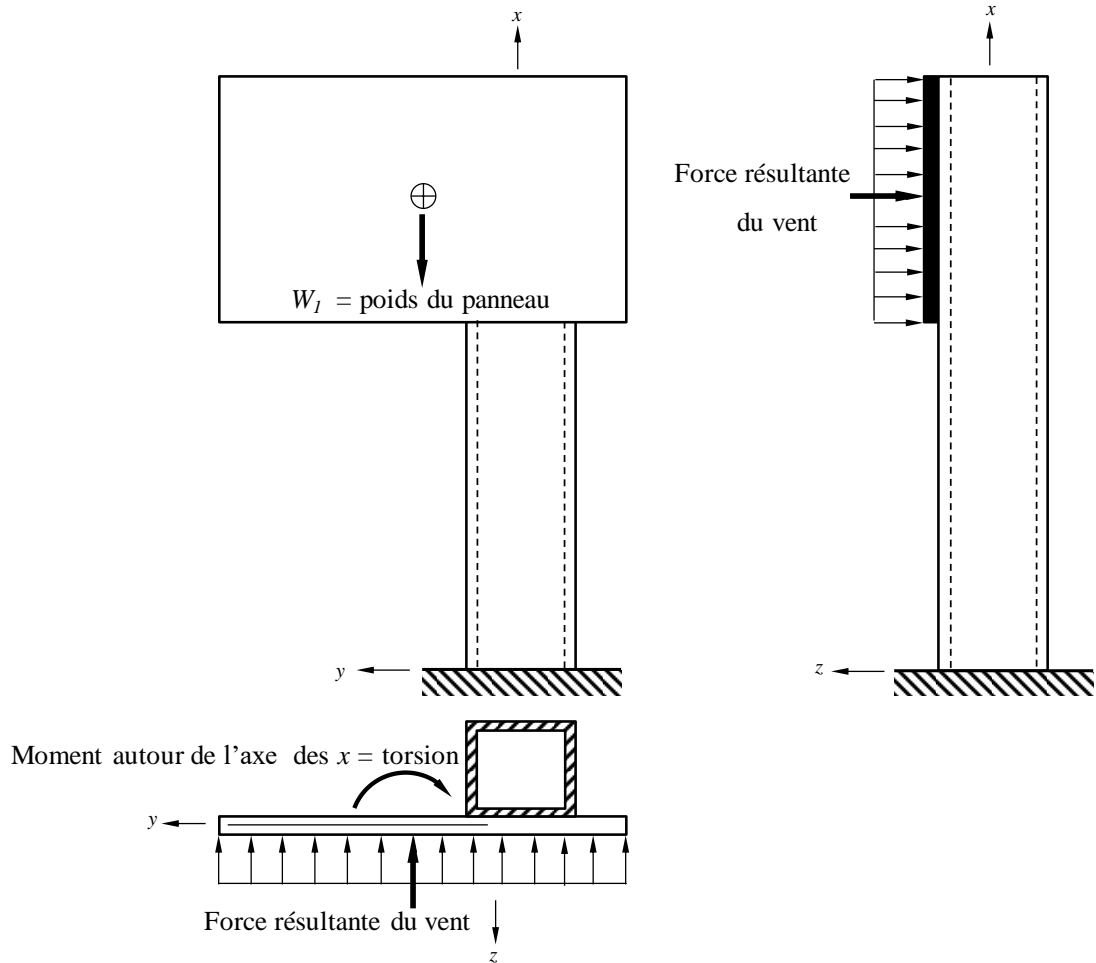
Torsion → section ouverte mince



Torsion → section combinée



1.7: Chargements combinés



Selon le sens et la force du vent sur le panneau, cette structure est soumise à trois types de charges : flexion, torsion et uniaxial.

Phénomène physique

Schéma de l'étude

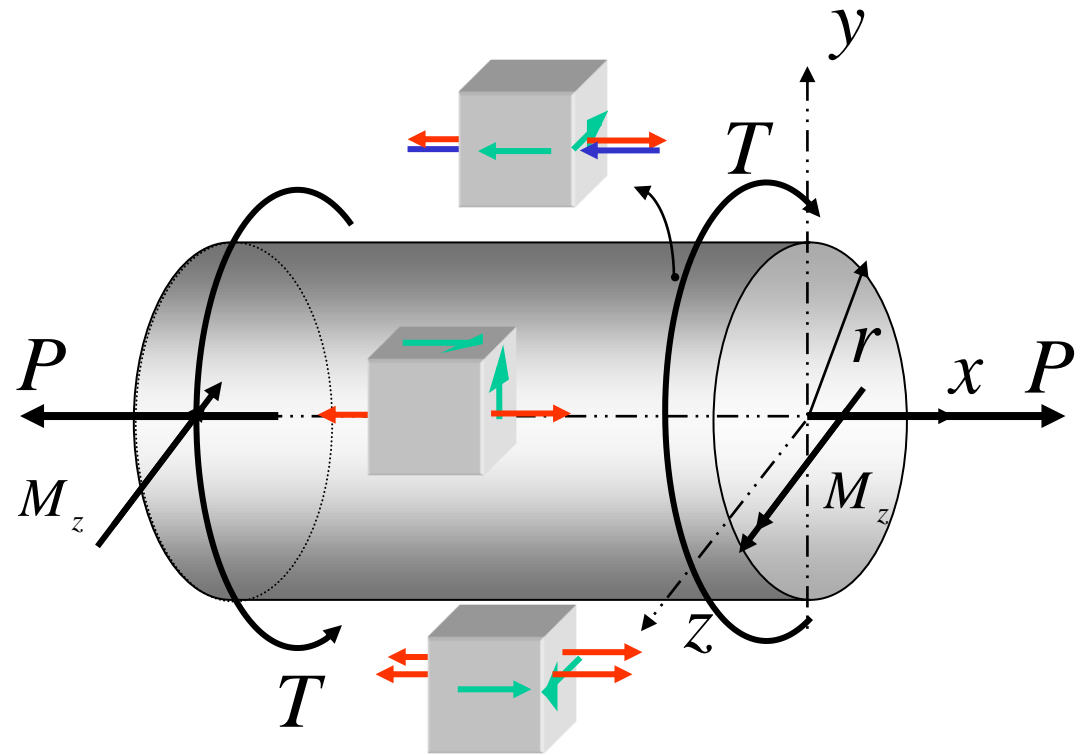
1.7: Chargements combinés

Flexion-axial-torsion

$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$A = \pi r^2$$



Contraintes aux fibres externes (r : rayon externe)

$$|\tau_{x\theta}| = \frac{T r}{J} \quad \sigma = \pm \frac{M_z c}{I} + \frac{P}{A}$$

Exercice 4 (problème de synthèse)

Une poutre en acier est encastrée à son extrémité A et munie à son extrémité, d'un bras de levier rigide, tel que montrée à la figure 1. Elle est soumise au chargement qui est indiqué sur la figure 1.

Les propriétés mécaniques de la poutre sont les suivantes : $S_y = 300 \text{ MPa}$; $E = 200 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,3$

- 1) Déterminez les efforts internes sur la section de la poutre qui sera la plus sollicitée.
- 2) Calculez les contraintes associées à chaque type d'efforts internes.
- 3) Appliquez le principe de superposition et identifiez le point le plus sollicité (plus critique) sur la Figure 2.
- 2) Représentez au point le plus sollicité de la section, l'état de contrainte à l'aide d'un cube élémentaire infinitésimal sur la Figure 3.
- 5) Déterminez les contraintes principales et calculez le facteur de sécurité par le critère Tresca et Von Mises. Lequel est le plus conservateur ?

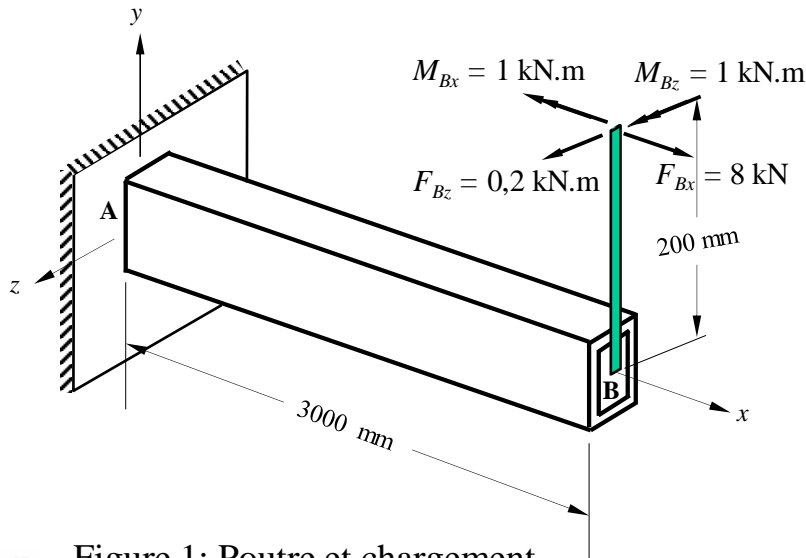


Figure 1: Poutre et chargement

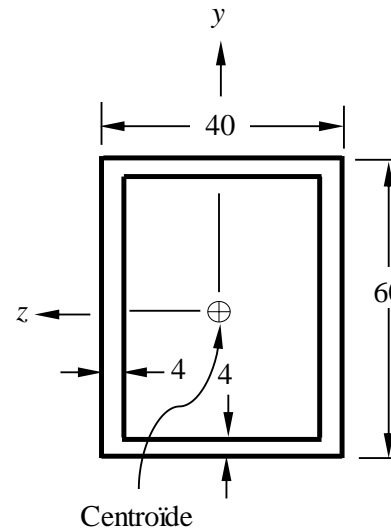


Figure 2: section de la Poutre

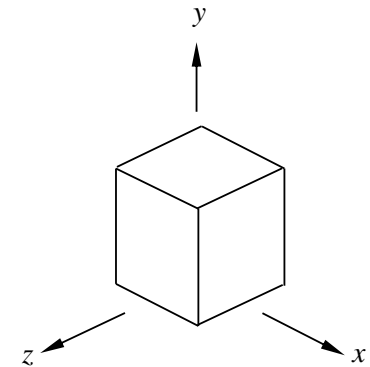


Figure 3: cube élémentaire infinitésimal

1.8: État de contrainte

- **Objectifs**

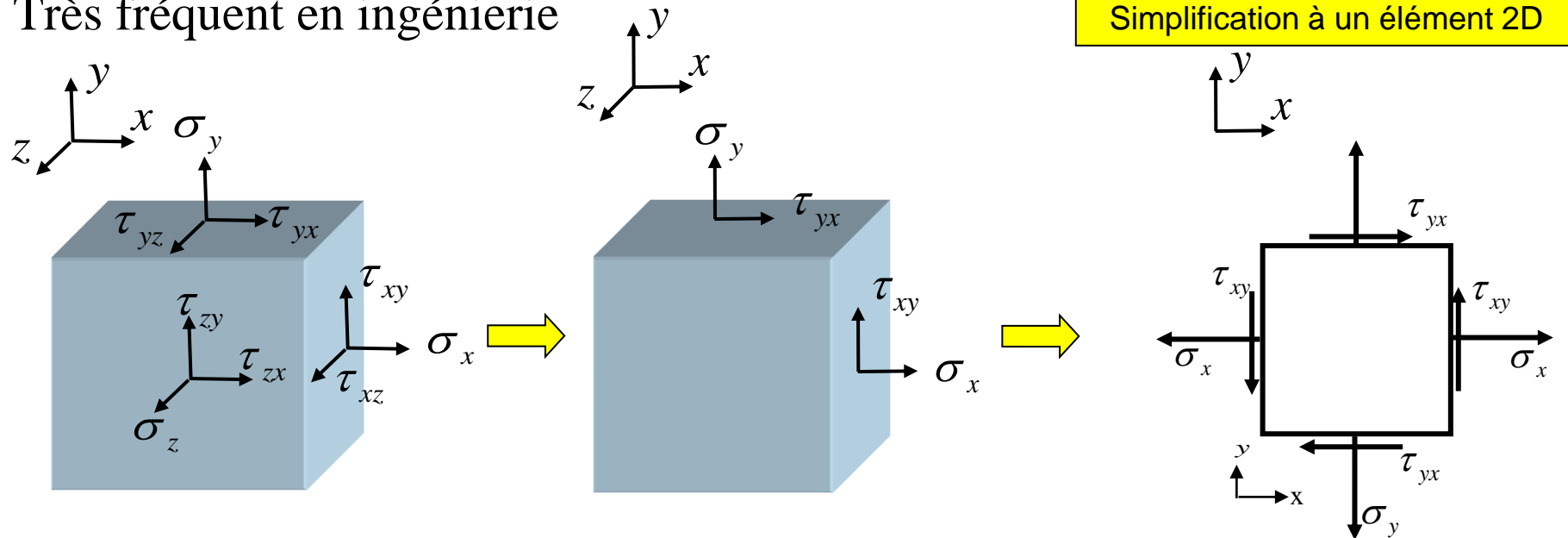
- Comprendre la définition d'un état plan de contrainte
- Calculer les contraintes selon une orientation arbitraire
- Calculer les contraintes principales et leur orientation
- Calculer la valeur du cisaillement maximal
- Évaluer la résistance d'un matériau ductile avec les critères d'écoulement (Tresca et von Mises)

1.8: État de contrainte

État plan de contrainte

Toutes les contraintes agissant sur une des faces du cube unitaire sont nulles (ici, la face z) ainsi que toutes les contraintes agissant sur les autres faces, dans la direction z . ($\sigma_z = 0$ et $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$)

Très fréquent en ingénierie

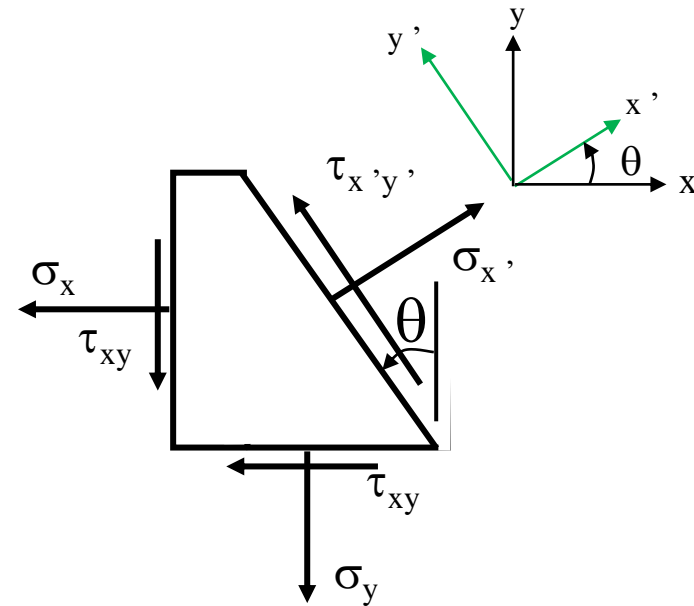



1.8: État de contrainte

État plan de contrainte

Contraintes en un point selon une orientation arbitraire ($x'-y'$)

- On calcule les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} suivant les directions x et y choisies
- On définit un nouveau système d'axes x' et y' qui fait un angle θ avec le système x, y ; l'axe x positif est l'axe de référence
- En utilisant les équations d'équilibre dans le système $x'-y'$ ($\Sigma F_{x'} = 0$; $\Sigma F_{y'} = 0$; $\Sigma M_z = 0$), on établit les expressions pour le calcul des contraintes $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}$ et $\tau_{x'y'}$ dans le nouveau système



 Attention à la convention de signe de θ

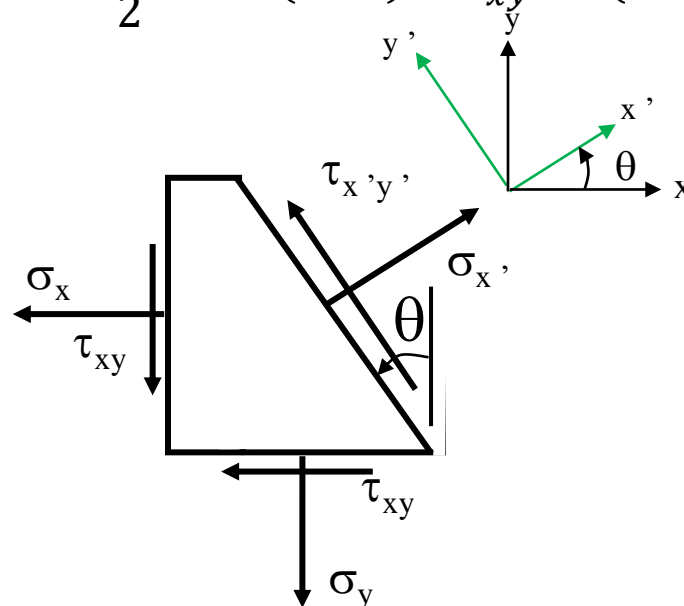
1.8: État de contrainte

État plan de contrainte

Pour transformer σ_x, σ_y et τ_{xy} en $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}$ et $\tau_{x'y'}$,

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \sin(2 \cdot \theta)$$

$$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cos(2 \cdot \theta)$$



1.8: État de contrainte

État plan de contrainte

Contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 en un point

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \times \theta) + \tau_{xy} \sin(2 \times \theta)$$

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 = 2\tau_{x'y'}$$

Contraintes
principales en
un point

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = 0 \text{ ou valeur connue}$$

Sur les plans où se trouvent les contraintes principales, les contraintes de cisaillement sont nulles.

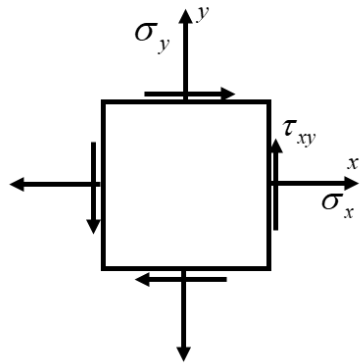
1.8: État de contrainte

État plan de contrainte - Cercle de Mohr

Pour tracer le cercle de *Mohr* d'un état plan de contrainte dans le plan x - y , on procède de la façon suivante :

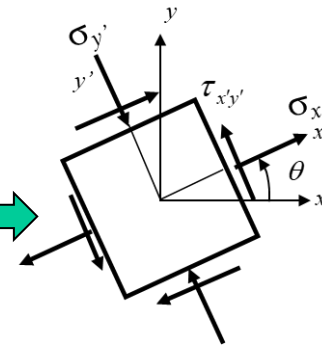
- Placer les points $X (\sigma_x, \tau_{xy})$ et $Y (\sigma_y, -\tau_{xy})$ dans un système d'axes σ - τ
- Joindre les deux points par une droite et déterminer le point d'intersection C avec l'axe σ

$$(\sigma_c = (\sigma_x + \sigma_y)/2)$$

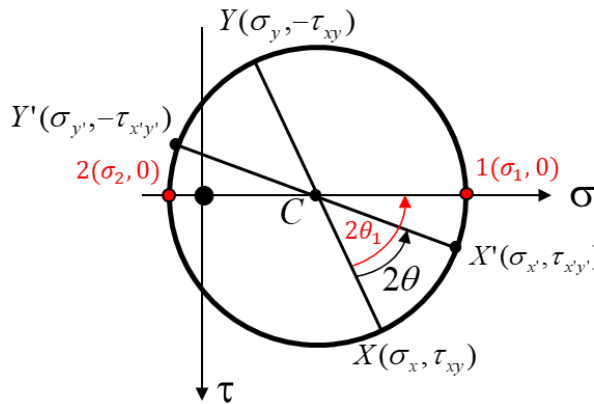


$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \sin(2 \cdot \theta)$$

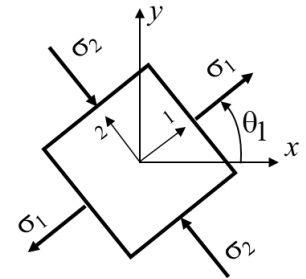
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cos(2 \cdot \theta)$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$\text{tg}(2 \cdot \theta_1) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



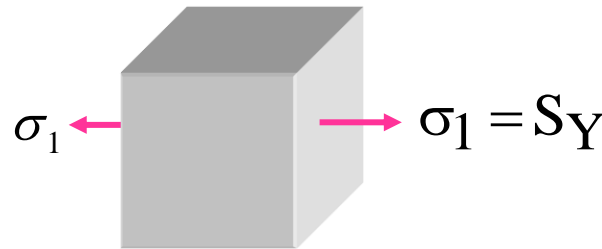
- Le cercle de *Mohr* est le cercle dont le centre est C et qui passe par les points X et Y .
- L'état de contrainte selon le système x' - y' est également représenté par le cercle

1.8: État de contrainte

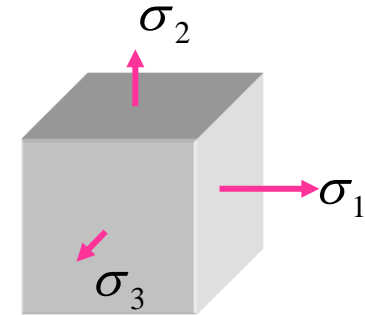
Critères d'écoulement : Tresca

L'écoulement d'un matériau ductile se produit lorsque τ_{max} atteint une valeur critique.

Essai de traction



Pièce réelle



$$FS = \frac{S_Y}{2} \frac{1}{\tau_{max}}$$

Cisaillement maximal $\tau_{max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2}$

Cas général 3D

Critères d'écoulement : von Mises

L'écoulement d'un matériau ductile se produit lorsque l'énergie de distorsion atteint une valeur critique.

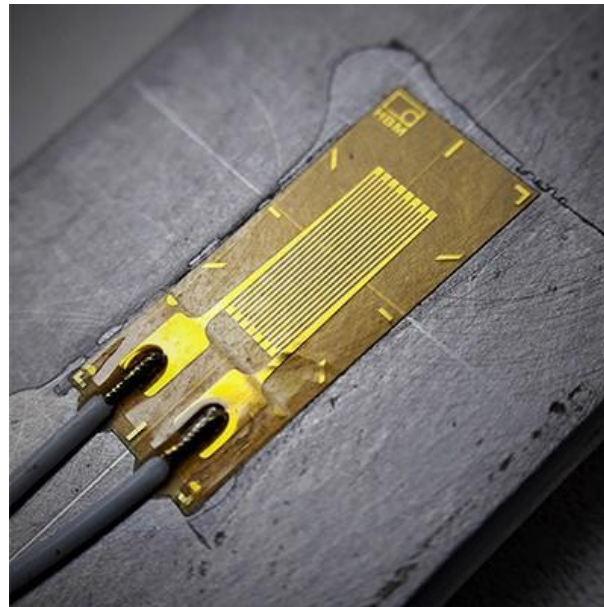
$$FS = \frac{S_Y}{\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}}$$

Contrainte équivalente de von Mises dans le système d'axes 1-2-3

1.9: Déformations et contraintes

- **Objectifs :**

- Connaître la définition d'un état plan de déformation
- Savoir définir les déformations à partir des déplacements
- Savoir calculer les déformations normales et de cisaillement selon une orientation quelconque; application des lectures de jauges
- Appliquer les relations contraintes-déformations (Loi de Hooke)



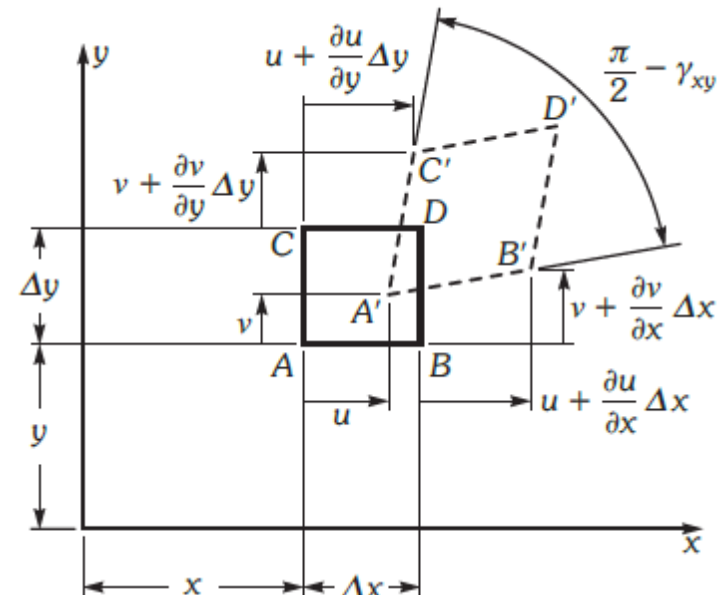
Source: sciencesindustrielles.com

1.9: Déformations et contraintes

Déformation

Les forces extérieures sur un solide causent :

- un déplacement de l'ensemble des points constituant le solide
- un mouvement **relatif** entre les points du solide → **déformation** du solide
- Comme pour le cas des contraintes, l'étude des déformations dans un solide est réalisée pour un état plan. Ici, c'est **l'état plan de déformation**, qui est différent de l'état plan de contraintes.
- Les côtés CAB d'un élément unitaire de longueurs Δx et Δy avant l'application d'une force extérieure se retrouvent en C'A'B' après chargement.
- Ce faisant, le point A s'est déplacé de la distance u selon l'axe x et de v selon l'axe y .



1.9: Déformations et contraintes

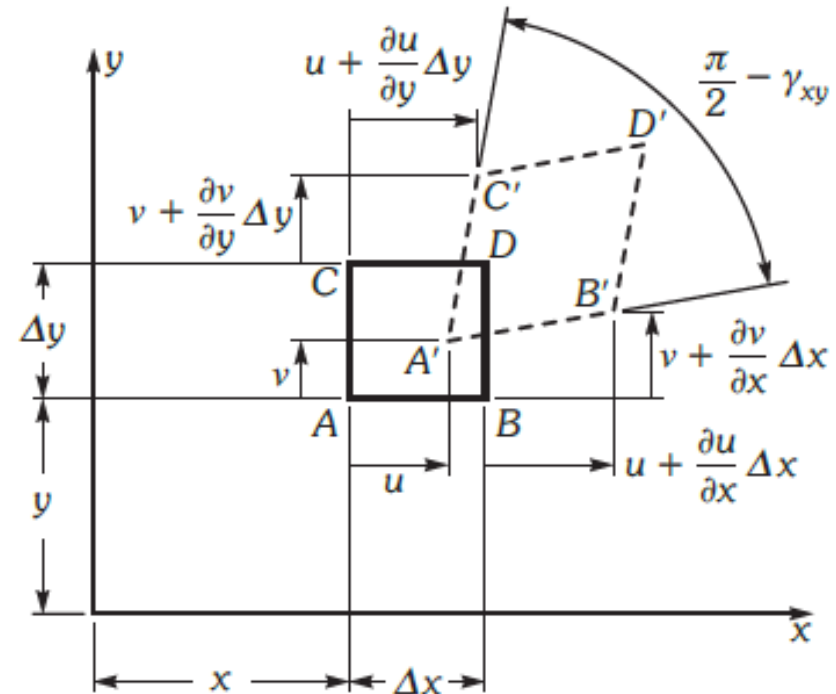
Déformation

Les déformations normales ε_x et ε_y et de cisaillement γ_{xy} sont définies de la façon suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \angle BAC - \angle B'A'C' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$



- **Déformations** : c'est ce qui existe physiquement.
- **Contraintes** : c'est un concept commode pour faire des calculs

1.9: Déformations et contraintes

Déformation

- La méthode expérimentale la plus répandue et la plus utile en ingénierie pour l'analyse des contraintes est basée sur la mesure des déformations à l'aide des **jauges de déformation**
- Connaissant les **déformations**, les **contraintes** peuvent être calculées à l'aide de la loi de Hooke
- Ce sont les **contraintes** qui permettent d'évaluer **le facteur de sécurité** (FS) d'une pièce soumise à des forces extérieures connues

Une jauge mesure une déformation normale et elle est toujours dans un état *plan de contrainte* parce qu'elle est collée sur une surface libre. Donc, $\sigma_3 = 0$.

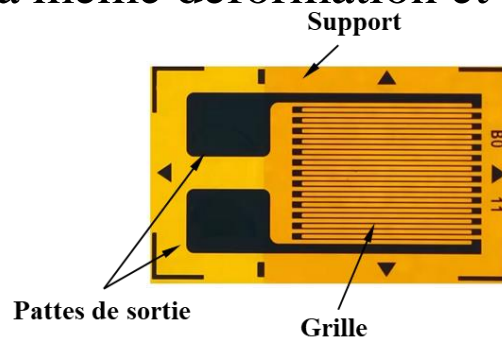
1.9: Déformations et contraintes

Jauges de déformation

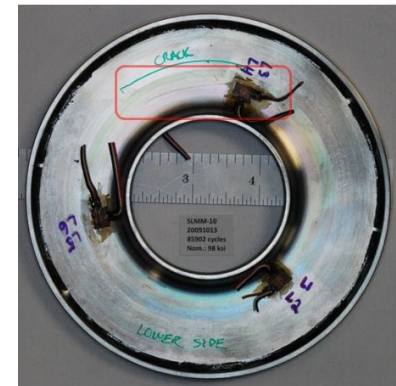
Fil dont la résistance électrique R varie avec son allongement. Elle mesure une déformation exclusivement dans l'axe de son fil.

- On colle solidement la jauge sur la surface de la pièce. Lorsqu'une force agit sur la pièce, celle-ci se déforme.
- La jauge subit alors la même déformation et sa résistance électrique varie en conséquence:

$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon$$



- On enregistre le changement de résistance.
- Après une calibration adéquate, on déduit la déformation.



Échantillon « disque » instrumentée de 3 rosettes

- Il n'existe aucune méthode simple qui permette de mesurer une déformation de cisaillement γ .

1.9: Déformations et contraintes

Jauges de déformation

On sait que :

$$FS \propto \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad \text{où } \sigma_3 \text{ en général est connue}$$

On sait aussi que :

$$\sigma_1, \sigma_2 \propto \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \quad (\text{pour état plan de contrainte en } z)$$

et que :

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \propto \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \quad (\text{loi de Hooke})$$

- Une jauge ne mesure qu'une déformation normale (ε)
- Elle ne peut pas mesurer une déformation de **cisaillement** (γ)

1.9: Déformations et contraintes

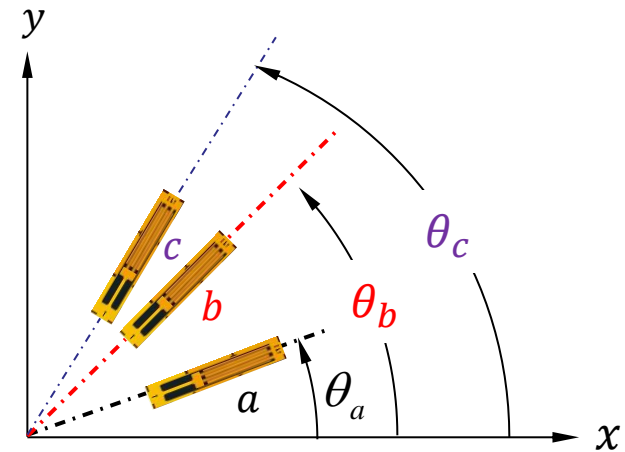
Jauges de déformation

À partir de **trois** valeurs de déformation **normale** ($\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$) mesurées suivant des orientations quelconques mais **connues**, ($\theta_a, \theta_b, \theta_c$) on peut déterminer ϵ_x, ϵ_y et γ_{xy} de la façon suivante :


$$\left. \begin{aligned} \epsilon_a &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2 \cdot \theta_a) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \cdot \theta_a) \\ \epsilon_b &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2 \cdot \theta_b) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \cdot \theta_b) \\ \epsilon_c &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2 \cdot \theta_c) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \cdot \theta_c) \end{aligned} \right\}$$

Dans ce système, l'axe x est l'axe de **référence**. Les angles θ_i sont mesurés à partir de cet axe ; ils sont positifs dans le sens anti-horaire.

Ensemble de jauges : une **rosette**



Ceci constitue un système de trois équations à trois inconnues $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$

 Attention à la convention de signe de θ

1.9: Déformations et contraintes

Relations contraintes-déformations (Loi de Hooke)

Axes x, y et z

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Axes $1, 2$ et 3

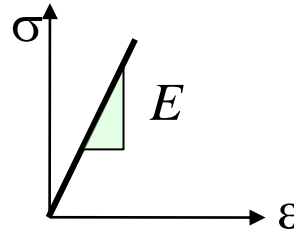
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

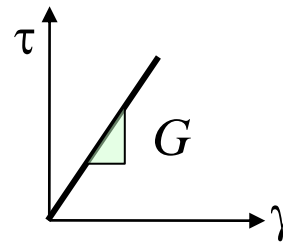
Rappel : Propriétés mécaniques

- Module d'Young (E)



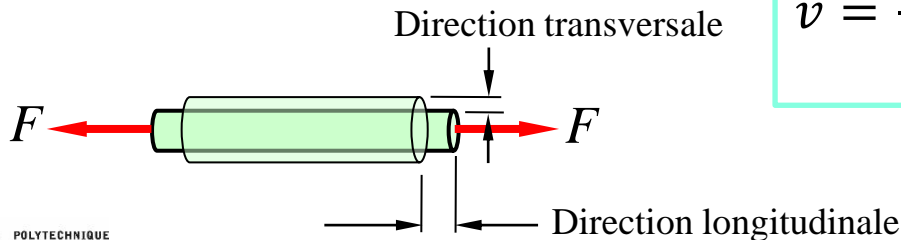
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- Module de cisaillement (G)



- Coefficient de Poisson (ν)

$$\nu = -\frac{\epsilon_T}{\epsilon_L}$$



Matériau	E (GPa)	ν
Acier	200 - 220	0,24 - 0,30
Aluminium	69	0,24 - 0,33
Fer	208	0,21 - 0,29
Fibre de verre	70 - 85	0,20 - 0,25
Fibre de carbone	150 - 345	0,10 - 0,30
Titane	100 - 120	0,32 - 0,36

Exercice 5 (problème de synthèse)

La figure a) illustre en isométrie une structure ABCD composée d'un profilé en U (30 mm × 20 mm × 30 mm; épaisseur = 2 mm) soudé sur toute la longueur ABC à une plaque de 120 mm × 5 mm. La connexion en C et la membrure CD sont rigides. Le centroïde de la section (Fig. b) est situé à 28,4 mm de la base de la section et les propriétés de la section sont les suivantes:

$$A = 752 \text{ mm}^2 \quad ; \quad I_z = 65,92 \times 10^3 \text{ mm}^4 \quad ; \quad I_y = 730,4 \times 10^3 \text{ mm}^4.$$

Le chargement externe est le suivant :

- Au point D, une force horizontale $F_{Dx} = 3\,760 \text{ N}$
- Au point C, un moment T_{Cx} autour de l'axe x (**valeur et sens inconnus**)
- Au point C, une force verticale $F_{Cy} = 375 \text{ N}$ (sens montré).

Deux jauges sont collées sur la plaque à une distance de 0,8 m du point A. La jauge B_1 est située à une distance de 25 mm de l'extrémité de la plaque et est orientée selon l'axe z . La jauge B_2 est située au plan de symétrie et est orientée à un angle de 30° par rapport à l'axe x . Lorsque la poutre est chargée, les lectures des jauges sont :

$$\varepsilon_{B1} = \text{inconnue} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{B2} = -394,2 \text{ } \mu\text{m/m}.$$

Les propriétés du matériau (acier) sont : $E = 200\,000 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$; $G = 76\,923 \text{ MPa}$.

Exercice 5_suite (problème de synthèse)

- a) Calculez le moment inconnu T_{Cx} et indiquez son sens (9 points).
- b) Déterminez la valeur de la lecture de la jauge B_1 sous l'effet de ce chargement en considérant que la membrure demeure dans le domaine élastique (3 points).

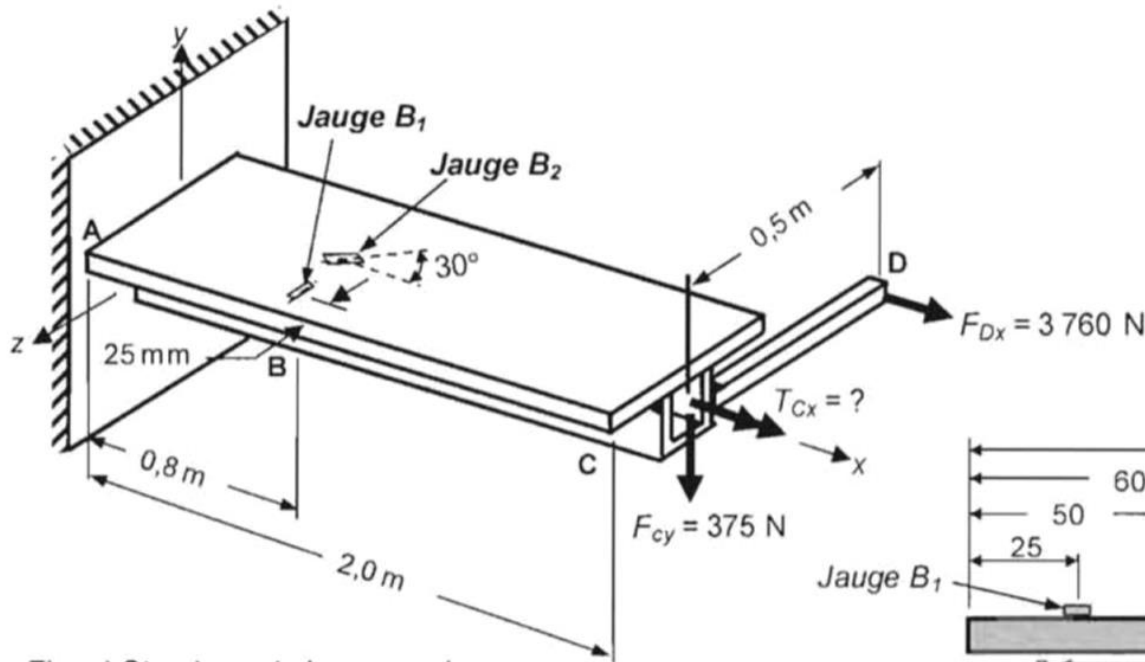


Fig. a) Structure et chargement

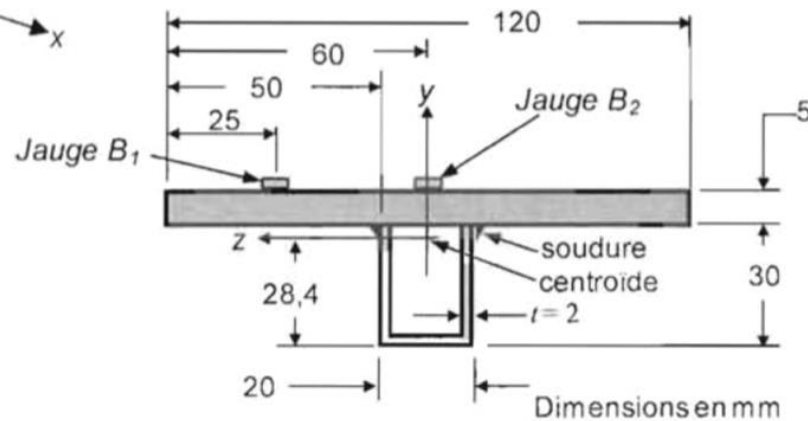


Fig. b) Section de la structure ABC
(dessin pas à l'échelle)