Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR É.D.O
LABORATOIRE IV

Directives: *Cette séance de laboratoire vous permettra de résoudre des équations différentielles à l'aide de méthodes numériques. Vous devrez utiliser des fonctions* Matlab *disponibles sur le site Internet du cours qui vous éviteront d'avoir à programmer les algorithmes étudiés au cours.*

La vitesse de propagation d'une maladie

1. On veut étudier la propagation d'une maladie contagieuse dans une population donnée. Pour ce faire, on formule les hypothèses suivantes:

   i) La population totale m reste fixe ($m = 100\,000$);
   ii) Tous les habitants courent le même risque de contracter la maladie;
   iii) Les personnes infectées demeurent dans cet état (pas de décès, pas de guérison).

   On montre que le nombre de personnes infectées en fonction du temps $y(t)$ (en jours) est donné par l'équation différentielle:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = k\,y(t)\,(m - y(t)), \tag{1}$$

   où k est une constante ($k = 2 \times 10^{-6}$). Il s'agit d'une équation de Bernoulli. Considérons le cas où, au départ de l'étude ($t = 0$), le nombre de personnes infectées est de 1000.

   (a) En utilisant le changement de variable $u(t) = \frac{1}{y(t)}$, montrer que la solution analytique de l'équation (1) peut être obtenue à l'aide de

$$u(t) = \left(\tfrac{1}{1000} - \tfrac{1}{m}\right)e^{-kmt} + \tfrac{1}{m}.$$

   (b) Calculer $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Commenter vos résultats.

   (c) Résoudre l'équation (1) avec la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. On effectuera les simulations pour les valeurs de t entre 0 et 30 jours. Présenter sur le même graphique les solutions numériques et analytique. Discuter les résultats obtenus.

Un problème de projectile

2. Un archer lance une flèche à la verticale à une vitesse de $200\,\mathrm{pi/s}$. On note $y(t)$ la hauteur de la flèche au temps t et $k\dot{y}^2(t)$ est la résistance de l'air. La deuxième loi de Newton nous donne l'équation différentielle

$$m\frac{d\dot{y}}{dt} = -k\,|\dot{y}(t)|\,\dot{y}(t) - mg,$$

   où $k = 0,83 \times 10^{-6}\,\mathrm{s^2/pi^2}$, $m = 0,001\,781\,163\,\mathrm{lb\,s^2/pi}$ et $g = 32,17\,\mathrm{pi/s^2}$.

   (a) Transformer cette équation différentielle d'ordre 2 en un système de deux équations différentielles du premier ordre.

(b) Résoudre numériquement ce système d'équations différentielles en utilisant un pas de temps de $h = 0,15$ secondes. Expérimenter avec les différentes méthodes

(c) Déterminer la hauteur maximale atteinte par la flèche et le temps correspondant. Quelle est l'accélération de la flèche à ce moment?

(d) Estimer la vitesse de la flèche au moment où elle touche le sol. À quel moment y arrive-t-elle?

Guy Jomphe