Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LABORATOIRE III

Directives: *Cette séance de laboratoire vous permettra d'observer, à l'aide du logiciel* Matlab*, les effets de la propagation d'erreurs et les conséquences pratiques reliées à l'utilisation de l'arithmétique flottante et des développements de Taylor.*

Propagation d'erreurs

1. On définit la suite s_n pour $n \geq 0$ par $s_n = \dfrac{1}{3^n}$.

   On peut vérifier analytiquement que les termes de la suite s_n peuvent être générés en arithmétique exacte à partir de chacune des deux formules récursives suivantes:

$$r_0 = 1 \quad \text{et} \quad r_n = \frac{1}{3} r_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad q_n = \frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots \tag{2}$$

   (a) Écrire un fichier-m qui produit les 10 premiers termes (pour $n = 0, 1, \cdots, 9$) obtenus pour chaque formule. Les résultats doivent être présentés dans un tableau comportant trois colonnes (n, r_n, q_n). Identifiez vos colonnes.

   (b) Pour $n = 0, 1, \cdots, 9$, comparer les valeurs de r_n et q_n avec la valeur exacte $s_n = \frac{1}{3^n}$ et commenter, de façon pertinente, les résultats obtenus.

   (c) En remplaçant les conditions initiales des formules (1) et (2) par

$$r_0 = 0,99996;$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 0,33332,$$

   générer les approximations r_n et q_n de s_n, pour $n = 0, 1, \cdots, 9$ et donner les erreurs absolues correspondantes. Les approximations et les erreurs doivent être présentées dans deux tableaux de trois colonnes. Un tableau pour (n, r_n, q_n) et un autre pour $(n, \Delta r_n, \Delta q_n)$.De plus, tracer les courbes d'erreurs en utilisant une échelle logarithmique.
   Indice: La fonction `semilogy` pourrait être utile.

   (d) Soient Δr_{n-1}, Δq_{n-1} et Δq_{n-2} les erreurs absolues sur les valeurs r_{n-1}, q_{n-1} et q_{n-2}. On peut montrer à l'aide des formules (1), (2) que :

$$\Delta r_n \simeq \frac{1}{3} \Delta r_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\Delta q_n \simeq \frac{10}{3}\Delta q_{n-1} + \Delta q_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots$$

En vous servant de ces résultats commenter et expliquer les résultats obtenus en (c).

Développements de Taylor et Algorithme de Horner

2. Soit

$$f(x) = \frac{(3-2x^2)\arcsin(x) - 3x\sqrt{1-x^2}}{x^5}.$$

En se servant du développement de Taylor de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$ on peut montrer que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{15} + \frac{6}{35}x^2 + \frac{5}{42}x^4 + \frac{35}{396}x^6 + \cdots + \frac{(2n+1)!x^{2n}}{(2n+3)(2n+5)(n!)^2 2^{2n-2}} + \cdots \\ &\simeq P_n(x^2). \end{aligned}$$

(a) Écrire un programme Matlab permettant d'évaluer $P_n(x^2)$ par l'algorithme de Horner décrit aux pages 29–30 du livre du cours. Ce programme sera une fonction de deux arguments d'entrée: n le degré du polynôme de Taylor et x^2 le(s) points où on veut évaluer la fonction.

(b) On désire évaluer l'expression

$$f(\alpha) = \frac{(3-2\alpha^2)\arcsin(\alpha) - 3\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^5}$$

où $\alpha^2 = 0,006\,694\,380\,022\,903\,415\,749\,574\,948\,586$.

i. En vous servant de la fonction développée en (a), écrire un script Matlab qui permet de déterminer numériquement le plus petit degré n nécessaire pour que le polynôme de Taylor de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$ fournisse une approximation de $f(\alpha)$ avec 16 chiffres exacts (ou significatifs). On admettra que $f(\alpha) = 0,267\,819\,636\,411\,523\,324\,998\,687\,379\,451$.

ii. En vous servant de la fonction $f(x)$, calculer une approximation de $f(\alpha)$ et en déduire le nombre de chiffres significatifs. Qu'observez-vous? Expliquer les résultats observés.

Donatien N'dri & Steven Dufour